H1 · Espacios de probabilidad, conteo, condicional e independencia

H1.3 Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

H1.7 Probabilidad geométrica: punto al azar en Λ (largo, área o volumen $|\Lambda|$): $P(A) = \frac{|A \cap \Lambda|}{|\Lambda|}$

H1.9 Conteo: elegir k entre n: con orden y con reposición n^k; con orden sin reposición $\frac{n!}{(n-k)!}$; sin orden sin reposición $C(n, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; sin orden con reposición $C(n + k - 1, k)$

H1.10 Permutaciones: $n!$; con repetidos $(k_1, \dots, k_r$, suman $n)$: $\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$

H1.11 Bolas en urnas (k bolas, n urnas): distinguibles: n^k, equiprobables; indistinguibles: $C(n + k - 1, k)$ (equiprobables sólo si el enunciado lo dice); sin urnas vacías: $C(k - 1, n - 1)$

H1.12 Extracción sin reposición: N objetos, d marcados, se sacan n: $P(\text{x marcados}) = \frac{C(d, x)\, C(N - d, n - x)}{C(N, n)}$

H1.19 Sistemas: componentes independientes, funcionan con p_i: serie $\prod p_i$; paralelo $1 - \prod (1 - p_i)$

H1.21 Series: $|r| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$; $\sum_{n=1}^{\infty} n\, r^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

H2 · Variables y vectores aleatorios

H2.5 Mixta: $P(X \in B) = $ (saltos en B) $+ \int_B F'(x)\,dx$

H2.6 Cuantil: x_a con $F_X(x_a) = a$; en general $P(X < x) \le a \le P(X \le x)$; mediana $x_{0.5}$

H2.7 Falta de memoria: $T \sim E(\lambda)$: $P(T > s + t \mid T > s) = e^{-\lambda t}$; $N \sim G(p)$: $P(N > m + n \mid N > m) = (1-p)^n$

H2.8 Intensidad de fallas: $\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$; $F_T(t) = 1 - \exp(-\int_0^t \lambda(s)\,ds)$; λ constante $\Leftrightarrow T \sim E(\lambda)$; dado $T > t_0$, $T - t_0$ tiene intensidad $\lambda(t + t_0)$

H2.9 Simulación por la inversa: $U \sim U(0, 1)$: $X = F^{-1}(U) = \text{mín}\{x : F(x) \ge U\}$ tiene distribución F; F_X continua $\Rightarrow F_X(X) \sim U(0, 1)$

H2.10 Condicionar a un evento (truncar): $f_{X \mid X \in A}(x) = \frac{f_X(x)\, 1\{x \in A\}}{P(X \in A)}$

H2.15 Uniforme en una región: $(X, Y) \sim U(\Lambda)$: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1\{(x, y) \in \Lambda\}}{|\Lambda|}$; $P((X, Y) \in A) = \frac{|A \cap \Lambda|}{|\Lambda|}$

H3 · Esperanza, varianza, covarianza y desigualdades

H3.3 Con la función de distribución: $X \ge 0$: $E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx$; X en $\{0, 1, 2, \dots\}$: $E[X] = \sum_{n \ge 0} P(X > n)$

H3.7 Varianza de una suma: $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\,\text{cov}(X, Y)$; $\text{var}(\sum a_i X_i) = \sum a_i^2\, \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j\, \text{cov}(X_i, X_j)$; independientes: sin covarianzas

H3.8 Correlación: $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}$, $|\rho| \le 1$; $|\rho| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$

H3.9 Recta de regresión: $\hat{Y} = E[Y] + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}(X - E[X])$; error cuadrático medio mínimo $\text{var}(Y)(1 - \rho^2)$

H3.10 Markov: $X \ge 0$, $a > 0$: $P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$

H3.11 Chebyshev: $P(|X - E[X]| \ge \varepsilon) \le \frac{\text{var}(X)}{\varepsilon^2}$; o sea $P(|X - E[X]| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{\text{var}(X)}{\varepsilon^2}$

H3.14 Esperanza de la varianza muestral: $E[S^2] = \sigma^2$; $\frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ tiene esperanza $\frac{n-1}{n}\sigma^2$; con μ conocida, $\frac{1}{n} \sum (X_i - \mu)^2$ es insesgado

H3.15 Esperanza condicionada a un evento: $E[X \mid A] = \frac{E[X\, 1\{A\}]}{P(A)} = \int x\, f_{X \mid X \in A}(x)\,dx$

H4 · Funciones de variables y vectores aleatorios

H4.1 Eventos equivalentes: $Y = g(X)$: $F_Y(y) = P(X \in \{x : g(x) \le y\})$, tramo a tramo; si Y es continua, se deriva

H4.2 g monótona: estrictamente monótona y derivable: $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\, |(g^{-1})'(y)|$, soporte g(soporte de X)

H4.3 g no monótona: $f_Y(y) = \sum_{x\,:\,g(x) = y} \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$

H4.5 Cambio lineal: $Y = aX + b$: $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y - b}{a})$; $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$; lineal de uniforme es uniforme

H4.6 Recortes (dan variables mixtas): $Y = \text{mín}(X, c)$: $P(Y = c) = P(X \ge c)$, $F_Y(y) = F_X(y)$ para $y < c$; $W = \text{máx}(X - c, 0)$: $P(W = 0) = P(X \le c)$, $F_W(w) = F_X(c + w)$ para $w \ge 0$

H4.7 Jacobiano: $(U, V) = g(X, Y)$ biyectiva: $f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v))\, |J|$, $J = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$; soporte = imagen del viejo; si g no es inyectiva, se parte el soporte y se suman las regiones

H4.8 Suma (convolución): independientes: $f_{X+Y}(z) = \int f_X(x)\, f_Y(z - x)\,dx$; discretas $p_{X+Y}(z) = \sum_x p_X(x)\, p_Y(z - x)$; en general $F_{X+Y}(z) = \iint_{x+y \le z} f_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy$

H4.9 Sumas que conviene saber (independientes): $B(n, p) + B(m, p) \sim B(n + m, p)$; $\text{Poi}(\mu_1) + \text{Poi}(\mu_2) \sim \text{Poi}(\mu_1 + \mu_2)$; $k\,E(\lambda) \sim \Gamma(k, \lambda)$; $\Gamma(\nu_1, \lambda) + \Gamma(\nu_2, \lambda) \sim \Gamma(\nu_1 + \nu_2, \lambda)$; $N(\mu_1, \sigma_1^2) + N(\mu_2, \sigma_2^2) \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$; $k\,G(p) \sim \text{Pas}(k, p)$

H4.10 Máximo y mínimo (independientes): $P(\text{máx} \le t) = \prod F_{X_i}(t)$; $P(\text{mín} > t) = \prod P(X_i > t)$; $X_i \sim E(\lambda_i)$: mín $\sim E(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ y $P(\text{el mínimo es } X_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

H4.12 Poisson dada la suma: $X \sim \text{Poi}(\mu_1)$, $Y \sim \text{Poi}(\mu_2)$ independientes: $X \mid X + Y = n \sim B(n, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2})$; en general $(X_1, \dots, X_k) \mid \sum X_i = n \sim M(n, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \dots + \mu_k}, \dots, \frac{\mu_k}{\mu_1 + \dots + \mu_k})$

H5 · Condicionales y esperanza condicional

H5.2 Condicional continua: $f_{Y \mid X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$, $f_X(x) > 0$; en y es proporcional a $f_{X,Y}(x, y)$: si ese núcleo es de una densidad conocida, es esa

H5.4 Mezcla: $f_Y(y) = \int f_{Y \mid X=x}(y)\, f_X(x)\,dx$; M discreta: $f_Y(y) = \sum_m P(M = m)\, f_{Y \mid M=m}(y)$, $P(Y \in B) = \sum_m P(M = m)\, P(Y \in B \mid M = m)$

H5.5 Bayes con variables: $f_{X \mid Y=y}(x) = \frac{f_{Y \mid X=x}(y)\, f_X(x)}{f_Y(y)}$; M discreta, Y continua: $P(M = m \mid Y = y) = \frac{P(M = m)\, f_{Y \mid M=m}(y)}{\sum_k P(M = k)\, f_{Y \mid M=k}(y)}$

H5.7 Esperanza total: $E[Y] = E[E[Y \mid X]] = \sum_x E[Y \mid X = x]\, p_X(x)$ o $\int E[Y \mid X = x]\, f_X(x)\,dx$; $P(A) = E[P(A \mid X)]$

H5.8 Propiedades: $E[g(X)\, Y \mid X] = g(X)\, E[Y \mid X]$; $E[aY + bZ \mid X] = a\,E[Y \mid X] + b\,E[Z \mid X]$; independientes $\Rightarrow E[Y \mid X] = E[Y]$

H5.9 Varianza condicional y total (Pitágoras): $\text{var}(Y \mid X = x) = E[Y^2 \mid X = x] - E[Y \mid X = x]^2$; $\text{var}(Y) = E[\text{var}(Y \mid X)] + \text{var}(E[Y \mid X])$

H5.10 Mejor predictor: $E[Y \mid X]$ minimiza $E[(Y - h(X))^2]$; error mínimo $E[\text{var}(Y \mid X)]$

H5.11 Suma aleatoria: $S = X_1 + \dots + X_N$, X_i iguales e independientes de N: $E[S] = E[N]\, E[X]$; $\text{var}(S) = E[N]\, \text{var}(X) + \text{var}(N)\, E[X]^2$

H6 · Proceso de Bernoulli

H6.1 Proceso de Bernoulli: ensayos independientes, éxito p: éxitos en n ensayos $\sim B(n, p)$; ensayos hasta el primero $\sim G(p)$, hasta el k-ésimo $\sim \text{Pas}(k, p)$; moda de $B(n, p)$: $\lfloor (n + 1)p \rfloor$

H6.2 Colas: $P(G > n) = (1 - p)^n$; $P(\text{Pas}(k, p) \le n) = P(B(n, p) \ge k)$

H6.4 Clasificar los éxitos: cada éxito marcado con probabilidad q, independiente: los marcados son un proceso de Bernoulli de probabilidad pq

H6.5 Condicional: dados k éxitos en n ensayos, las $C(n, k)$ ubicaciones son equiprobables

H6.6 Multinomial: n ensayos, k resultados de probabilidades $p_1, \dots, p_k$: $P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$; $X_i \sim B(n, p_i)$; $\text{cov}(X_i, X_j) = -n\, p_i\, p_j$

H6.7 Aproximaciones: $H(N, d, n) \approx B(n, d/N)$ si n es chico frente a N; $B(n, p) \approx \text{Poi}(np)$ si n es grande y p chica

H7 · Proceso de Poisson

H7.1 Proceso de Poisson de intensidad λ: $N(a, b] \sim \text{Poi}(\lambda(b - a))$, independientes en intervalos disjuntos; $N(t) = N(0, t] \sim \text{Poi}(\lambda t)$

H7.2 Tiempos: entre arribos: $E(\lambda)$ independientes; k-ésimo arribo $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$; $P(S_k > t) = P(N(t) < k) = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

H7.3 Falta de memoria: desde un instante fijo, o uno decidido con lo ocurrido antes (un arribo), lo que sigue es otro Poisson de intensidad λ, independiente del pasado

H7.4 Condicional: dado $N(t) = n$, los arribos son n uniformes independientes en $(0, t)$, ordenadas; $N(s) \mid N(t) = n \sim B(n, s/t)$; dado $S_k = s$, los $k - 1$ anteriores son uniformes independientes en $(0, s)$, ordenadas

H7.5 Adelgazamiento: arribo de tipo 1 con probabilidad p, independiente: tipo 1 y tipo 2 son Poisson independientes de intensidades λp y λ(1 − p)

H7.6 Superposición: Poisson independientes de intensidades λ_1 y λ_2: juntos, intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$; cada arribo es del primero con probabilidad $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

H7.7 Proceso compuesto: $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, Y_i iguales e independientes del proceso: $E[S(t)] = \lambda t\, E[Y]$; $\text{var}(S(t)) = \lambda t\, E[Y^2]$

H8 · Normal y teorema central del límite

H8.2 Combinaciones lineales: normales independientes: $\sum a_i X_i + b \sim N(\sum a_i \mu_i + b, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$

H8.3 Cuantiles de la normal: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$; $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$; $z_{0.90} = 1.282$, $z_{0.95} = 1.645$, $z_{0.975} = 1.960$, $z_{0.99} = 2.326$, $z_{0.995} = 2.576$

H8.4 Teorema central del límite: independientes, iguales, media μ, varianza σ^2: $P(\sum X_i \le s) \approx \Phi(\frac{s - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$; $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$

H8.5 Aproximaciones normales: $B(n, p) \approx N(np, np(1 - p))$; $\text{Poi}(\mu) \approx N(\mu, \mu)$; $\Gamma(k, \lambda) \approx N(k/\lambda, k/\lambda^2)$ (n, μ, k grandes)

H8.6 Corrección por continuidad: enteros: $P(X \le k) \approx \Phi(\frac{k + 0.5 - E[X]}{\sigma_X})$; $P(X \ge k) \approx 1 - \Phi(\frac{k - 0.5 - E[X]}{\sigma_X})$; $P(X = k) \approx \Phi(\frac{k + 0.5 - E[X]}{\sigma_X}) - \Phi(\frac{k - 0.5 - E[X]}{\sigma_X})$

H8.7 Tamaño de muestra: $P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \approx 1 - \alpha$ si $n \ge (\frac{z_{1-\alpha/2}\, \sigma}{\varepsilon})^2$; proporción $(p(1 - p) \le 1/4)$: $n \ge (\frac{z_{1-\alpha/2}}{2\varepsilon})^2$

H9 · Estimación: estadísticos, suficiencia y máxima verosimilitud

H9.3 Suficiencia (factorización): T es suficiente para $\theta \Leftrightarrow L(\theta; x) = \prod f_\theta(x_i) = g(T(x), \theta)\, h(x)$

H9.4 Familia exponencial: $f_\theta(x) = c(\theta)\, h(x) \exp(a(\theta)\, t(x))$, soporte sin θ: $\sum t(X_i)$ es suficiente; con k parámetros (exponente $a_1\, t_1 + \cdots + a_k\, t_k$), el vector $(\sum t_1(X_i), \ldots, \sum t_k(X_i))$

H9.5 Máxima verosimilitud: $L(\theta) = \prod f_\theta(x_i)$; el EMV $\hat\theta$ maximiza L o ln L: $\frac{d}{d\theta} \ln L = 0$ y se verifica el máximo; si el soporte depende de θ no se deriva: se mira L

H9.6 Invarianza: el EMV de $g(\theta)$ es $g(\hat\theta)$

H9.7 EMV que conviene saber: Ber(p): $\hat p = \bar X$; Poi(μ): $\hat\mu = \bar X$; E(λ): $\hat\lambda = 1/\bar X$; N(μ, σ²): $\hat\mu = \bar X$ y $\hat\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar X)^2$; U(0, θ): $\hat\theta = X_{(n)} = \text{máx}\, X_i$

H9.8 Información de Fisher: $I(\theta) = E_\theta[(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X))^2] = -E_\theta[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_\theta(X)]$; n grande: $\hat\theta \approx N(\theta, \frac{1}{n\, I(\theta)})$

H9.9 Muestras normales: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$: $\bar X \sim N(\mu, \sigma^2/n)$; $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$; $\bar X$ y S^2 independientes; $\frac{\bar X - \mu}{S/\sqrt n} \sim t_{n-1}$

H9.10 Chi cuadrado y t: $Z_i \sim N(0,1)$ independientes: $\sum Z_i^2 \sim \chi^2_k = \Gamma(k/2, 1/2)$; $Z \sim N(0,1)$, $W \sim \chi^2_k$ independientes: $\frac{Z}{\sqrt{(W/k)}} \sim t_k$

H9.11 Más EMV: G(p): $\hat p = 1/\bar X$; B(m, p), m conocido: $\hat p = \bar X/m$; multinomial: $\hat p_i = x_i/n$; $f_\theta(x) = \theta\, x^{-(\theta+1)}$ en $x > 1$: $\hat\theta = \frac{n}{\sum \ln X_i}$; soporte con θ ($3\theta^3\, x^{-4}$ en $x \ge \theta$): $\hat\theta =$ mín X_i; θ con pocos valores: se compara L en cada uno

H10 · Tests de hipótesis

H10.2 Neyman y Pearson: $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_1: \theta = \theta_1$: el test de menor β con nivel α rechaza si $\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)} > k$; discreto: se agregan resultados por cociente decreciente mientras $P_{\theta_0}(\text{región}) \le \alpha$, y se elige la región de nivel ≤ α con mayor P_{θ_1} (menor β)

H10.3 Hipótesis unilaterales: si el cociente $\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_0; x)}$ crece con T(x) para todo $\theta_1 > \theta_0$, "rechazar si T > c" es el más potente de nivel α para $H_1: \theta > \theta_0$

H10.5 Media de una normal: σ conocido: $Z = \frac{\bar X - \mu_0}{\sigma/\sqrt n} \sim N(0,1)$; σ desconocido: $T = \frac{\bar X - \mu_0}{S/\sqrt n} \sim t_{n-1}$; se rechaza si: $H_1: \mu > \mu_0$, $Z > z_{1-\alpha}$; $\mu < \mu_0$, $Z < z_\alpha$; $\mu \ne \mu_0$, $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ (con t_{n-1} si σ es desconocido)

H10.6 Varianza de una normal: bajo H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$: $\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$; se rechaza si: $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, $\chi^2_{obs} > \chi^2_{n-1,\,1-\alpha}$; $\sigma^2 < \sigma_0^2$, $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n-1,\,\alpha}$; $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$, $\chi^2_{obs} < \chi^2_{n-1,\,\alpha/2}$ o $> \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}$

H10.7 Proporción: $\hat p = \bar X$: $Z = \frac{\hat p - p_0}{\sqrt{(p_0(1-p_0)/n)}} \approx N(0,1)$ bajo H_0 (n grande); n chico: $\sum X_i \sim B(n, p_0)$

H10.8 Exponencial y Poisson: $E(\lambda)$: $2\lambda \sum X_i \sim \chi^2_{2n}$; Poi(μ): $\sum X_i \sim \text{Poi}(n\mu) \approx N(n\mu, n\mu)$

H10.9 Test asintótico: $\frac{\hat\theta - \theta_0}{\sqrt{(1/(n\, I(\theta_0)))}} \approx N(0,1)$ bajo H_0 (n grande)

H10.10 Dualidad con los intervalos: se rechaza $H_0: \theta = \theta_0$ (bilateral, nivel α) ⇔ θ_0 no está en el IC de nivel 1 − α

H10.11 Potencia y tamaño de muestra: σ conocido, $H_1: \mu > \mu_0$: $\pi(\mu) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \frac{(\mu - \mu_0)\sqrt n}{\sigma})$; nivel α y potencia 1 − β en μ_1: $n \ge (\frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})\,\sigma}{\mu_1 - \mu_0})^2$; proporción: $n \ge (\frac{z_{1-\alpha}\sqrt{(p_0(1-p_0))} + z_{1-\beta}\sqrt{(p_1(1-p_1))}}{p_1 - p_0})^2$

H10.12 p-valor con un estadístico normal: z_{obs} observado: $H_1: \theta > \theta_0$, p-valor = $1 - \Phi(z_{obs})$; $\theta < \theta_0$, $\Phi(z_{obs})$; $\theta \ne \theta_0$, $2(1 - \Phi(|z_{obs}|))$

H11 · Intervalos de confianza

H11.2 Media de una normal: σ conocido: $\bar X \pm z_{1-\alpha/2}\, \frac{\sigma}{\sqrt n}$; σ desconocido: $\bar X \pm t_{n-1,\,1-\alpha/2}\, \frac{S}{\sqrt n}$

H11.3 Varianza de una normal: $[\, \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}} \,]$

H11.4 Proporción: $\hat p \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{(\frac{\hat p\,(1-\hat p)}{n})}$ (asintótico)

H11.5 Exponencial: $2\lambda \sum X_i \sim \chi^2_{2n}$: $\lambda \in [\, \frac{\chi^2_{2n,\,\alpha/2}}{2\sum X_i}, \frac{\chi^2_{2n,\,1-\alpha/2}}{2\sum X_i} \,]$; para la media $1/\lambda$ se invierten

H11.6 Uniforme U(0, θ): $X_{(n)}/\theta$ tiene $F(t) = t^n$ en [0, 1]: $\theta \in [\, X_{(n)}, X_{(n)}/\alpha^{1/n} \,]$ tiene nivel 1 − α

H11.7 Poisson: $\mu \in \bar X \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{(\bar X/n)}$ (asintótico)

H11.8 Asintótico general: $\hat\theta \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{(n\, I(\theta))}}$

H11.9 Cotas de confianza: un extremo, con 1 − α en lugar de α/2 y 1 − α/2. Media: inferior $\bar X - t_{n-1,\,1-\alpha}\, \frac{S}{\sqrt n}$, superior $\bar X + t_{n-1,\,1-\alpha}\, \frac{S}{\sqrt n}$; λ exponencial: inferior $\frac{\chi^2_{2n,\,\alpha}}{2\sum X_i}$, superior $\frac{\chi^2_{2n,\,1-\alpha}}{2\sum X_i}$; σ^2: inferior $\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha}}$, superior $\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha}}$

H11.10 Tamaño de muestra: longitud a lo sumo L, media con σ conocido: $n \ge (\frac{2\, z_{1-\alpha/2}\, \sigma}{L})^2$; proporción ($p(1-p) \le 1/4$): $n \ge (\frac{z_{1-\alpha/2}}{L})^2$

H11.11 Intensidad de un proceso de Poisson: N arribos en tiempo t: $\hat\lambda = N/t$ y $\lambda \in \frac{N}{t} \pm z_{1-\alpha/2}\, \frac{\sqrt N}{t}$ (asintótico)

H12 · Estimación bayesiana

H12.2 Estimador bayesiano: pérdida cuadrática: $\hat\theta = E[\theta \mid x]$; pérdida absoluta: mediana a posteriori; el máximo de la a posteriori es su moda

H12.3 Beta y binomial: $p \sim \beta(a, b)$ y k éxitos en n ensayos: $p \mid x \sim \beta(a + k, b + n - k)$; $E[p \mid x] = \frac{a + k}{a + b + n}$

H12.4 Gamma y Poisson: $\mu \sim \Gamma(\nu, c)$ y n datos Poi(μ) que suman s: $\mu \mid x \sim \Gamma(\nu + s, c + n)$; $E[\mu \mid x] = \frac{\nu + s}{c + n}$

H12.5 Gamma y exponencial: $\theta \sim \Gamma(\nu, c)$ y n datos E(θ) que suman s: $\theta \mid x \sim \Gamma(\nu + n, c + s)$; $E[\theta \mid x] = \frac{\nu + n}{c + s}$; datos $\Gamma(k, \theta)$, k conocida: $\theta \mid x \sim \Gamma(\nu + nk, c + s)$

H12.6 Normal y normal: σ^2 conocida, $\mu \sim N(m, \tau^2)$, n datos de media $\bar x$: $\mu \mid x \sim N(m_n, \tau_n^2)$, $\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{n}{\sigma^2}$, $m_n = \tau_n^2\, (\frac{m}{\tau^2} + \frac{n\,\bar x}{\sigma^2})$

H12.7 Uniforme y Pareto: $\theta \sim \text{Par}(m, \alpha)$ y n datos U(0, θ): $\theta \mid x \sim \text{Par}(\text{máx}(m, x_{(n)}), \alpha + n)$

H12.8 Predictiva: $f(x_{nuevo} \mid x) = \int f(x_{nuevo} \mid \theta)\, \pi(\theta \mid x)\, d\theta$

H12.9 Intervalos y predicción: credibilidad 1 − α: $P(a \le \theta \le b \mid x) = 1 - \alpha$, con los cuantiles α/2 y 1 − α/2 (normal: $m_n \pm z_{1-\alpha/2}\, \tau_n$); predictiva normal: $N(m_n, \tau_n^2 + \sigma^2)$, intervalo $m_n \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{(\tau_n^2 + \sigma^2)}$; a priori beta: P(éxito siguiente | x) = E[p | x]

D · Tabla de distribuciones (fuera del soporte vale 0)

D.1 Bernoulli Ber(p): $p(x)$ o $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, {0, 1}; $E[X] = p$; $\text{var}(X) = p(1-p)$

D.2 Binomial B(n, p): $p(x)$ o $f(x) = C(n, x)\, p^x(1-p)^{n-x}$, {0, …, n}; $E[X] = np$; $\text{var}(X) = np(1-p)$

D.3 Geométrica G(p): $p(x)$ o $f(x) = (1-p)^{x-1}\, p$, {1, 2, …}; $E[X] = 1/p$; $\text{var}(X) = (1-p)/p^2$

D.4 Pascal Pas(k, p): $p(x)$ o $f(x) = C(x-1, k-1)(1-p)^{x-k}\, p^k$, {k, k + 1, …}; $E[X] = k/p$; $\text{var}(X) = k(1-p)/p^2$

D.5 Poisson Poi(μ): $p(x)$ o $f(x) = e^{-\mu}\, \mu^x/x!$, {0, 1, 2, …}; $E[X] = \mu$; $\text{var}(X) = \mu$

D.6 Hipergeométrica H(N, d, n): $p(x)$ o $f(x) = C(d, x)\, C(N-d, n-x)/C(N, n)$, $\text{máx}(0, n + d - N) \le x \le \text{mín}(n, d)$; $E[X] = nd/N$; $\text{var}(X) = n\, \frac{d}{N}\, (1 - \frac{d}{N})\, \frac{N-n}{N-1}$

D.7 Uniforme U(a, b): $p(x)$ o $f(x) = 1/(b-a)$, (a, b); $E[X] = (a+b)/2$; $\text{var}(X) = (b-a)^2/12$

D.8 Exponencial E(λ): $p(x)$ o $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$; $E[X] = 1/\lambda$; $\text{var}(X) = 1/\lambda^2$

D.9 Gamma Γ(ν, λ): $p(x)$ o $f(x) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1}\, e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$; $E[X] = \nu/\lambda$; $\text{var}(X) = \nu/\lambda^2$

D.10 Normal N(μ, σ²): $p(x)$ o $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, todo $\mathbb{R}$; $E[X] = \mu$; $\text{var}(X) = \sigma^2$

D.11 Chi cuadrado χ^2_k: $p(x)$ o $f(x) = \frac{x^{k/2-1}\, e^{-x/2}}{2^{k/2}\, \Gamma(k/2)}$, $x \ge 0$; $E[X] = k$; $\text{var}(X) = 2k$

D.12 t de Student t_ν: $p(x)$ o $f(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{(\nu\pi)}\, \Gamma(\nu/2)}\, (1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$, todo $\mathbb{R}$; $E[X] = 0$ (si $\nu > 1$); $\text{var}(X) = \nu/(\nu - 2)$ (si $\nu > 2$)

D.13 Beta β(a, b): $p(x)$ o $f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, (0, 1); $E[X] = a/(a+b)$; $\text{var}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

D.14 Weibull Wei(c, α): $p(x)$ o $f(x) = \frac{c}{\alpha}\, (\frac{x}{\alpha})^{c-1}\, e^{-(x/\alpha)^c}$, $x \ge 0$; $E[X] = \alpha\, \Gamma(1 + 1/c)$; $\text{var}(X) = \alpha^2\, [\Gamma(1 + 2/c) - \Gamma(1 + 1/c)^2]$

D.15 Rayleigh Ray(σ): $p(x)$ o $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, $x \ge 0$; $E[X] = \sigma\sqrt{(\pi/2)}$; $\text{var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\, \sigma^2$

D.16 Pareto Par(m, α): $p(x)$ o $f(x) = \frac{\alpha\, m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x \ge m$; $E[X] = \frac{\alpha\, m}{\alpha - 1}$ (si $\alpha > 1$); $\text{var}(X) = \frac{m^2\, \alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ (si $\alpha > 2$)

D.17 Multinomial M(n, p_1, …, p_k): $p(x)$ o $f(x) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$, $x_1 + \cdots + x_k = n$; $E[X] = E[X_i] = n\, p_i$; $\text{var}(X) = \text{var}(X_i) = n\, p_i(1-p_i)$; $\text{cov}(X_i, X_j) = -n\, p_i\, p_j$

D.18 Normal bivariada $N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$: $p(x)$ o $f(x) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_1\, \sigma_2\, \sqrt{(1-\rho^2)}}\, \exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\, [\, \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\, \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\, \sigma_2}\,])$, $\mathbb{R}^2$; $E[X] = (\mu_1, \mu_2)$; $\text{var}(X) = \text{var}(X_i) = \sigma_i^2$; $\text{cov}(X_1, X_2) = \rho\, \sigma_1\, \sigma_2$

C(n, k) = n!/(k! (n − k)!); Γ(n) = (n − 1)! para n entero, Γ(1/2) = √π; N(μ, σ²) lleva la varianza; G(p) cuenta ensayos; E(λ) tiene intensidad λ.

No están en la hoja porque hay que saberlas: Axiomas; Consecuencias; De Morgan y "al menos uno"; Laplace; Espacio discreto; Probabilidad condicional; Regla del producto; Probabilidad total; Bayes; Independencia de dos eventos; Independencia de varios; Ensayos independientes; Función de distribución; Probabilidades con F; Discreta; Continua; Vector aleatorio; Marginales; Independencia de variables; Esperanza; Esperanza de una función; Propiedades de E (linealidad); Varianza; Covarianza; Media muestral y ley de los grandes números; Media y varianza de datos; Y discreta; Condicional discreta; Armar la conjunta; Esperanza condicional; Entre éxitos; Estandarizar; Muestra y estadístico; Sesgo y error cuadrático medio; Errores y potencia; p-valor; Pivote; A posteriori. **De uso raro, sólo en la guía web:** Continuidad; Simulación; Datos: empírica e histograma; Suma de cuadrados respecto de un punto; Tamaño de muestra con Chebyshev; Cauchy y Schwarz; Covarianza de una muestra; Polares; Mínimo y máximo juntos; Condicionar a una función del par; Colas más allá de la tabla; Cuentas útiles; Mínimo de exponenciales y máximo de una potencia.

T.1 · Normal estándar: $\Phi(z) = P(Z \le z)$

Fila: entero y primer decimal de z; columna: segundo decimal. Para $z < 0$: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

T.2 · t de Student: $P(T \le t_{\nu,\,a}) = a$

Fila ν (n − 1 en una muestra normal); la fila ∞ es la normal. Si tu ν no está, usá la fila de menos grados de libertad más cercana.

ν	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

T.3 · Chi cuadrado: $P(X \le \chi^2_{\nu,\,a}) = a$

Intervalo de la varianza de nivel $1 - \alpha$: columnas $\alpha/2$ y $1 - \alpha/2$. Si tu ν no está, usá la fila de menos grados de libertad más cercana.

ν	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169