Análisis Matemático II

Segundo parcial: exámenes reales, con resoluciones

Análisis Matemático II (61.03 / 81.01) · CB001

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; las resoluciones son nuestras. Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

14/7/26 (recuperatorio)	3
7/7/26 (recuperatorio)	6
29/6/26 (diferido)	9
27/6/26, tema 1	13
27/6/26, tema 2	16
3/3/26 (integrador)	19
24/2/26 (integrador)	23
10/2/26 (recuperatorio)	26
16/12/25 (recuperatorio)	29
6/12/25, tema 1	32
6/12/25, tema 2	35
5/8/25 (integrador)	38
15/7/25 (recuperatorio)	41
8/7/25 (recuperatorio)	44
30/6/25 (diferido)	47
28/6/25, tema 2	50
25/2/25, tema 1 (integrador)	53
25/2/25, tema 2 (integrador)	56
18/2/25, tema 2 (integrador)	59
11/2/25, tema 2 (integrador)	62
17/12/24, tema 2 (integrador)	65
10/12/24, tema 1 (integrador)	68
10/12/24, tema 2 (integrador)	71
13/8/24, tema 1 (integrador)	74
13/8/24, tema 2 (integrador)	77
6/8/24, tema 1 (integrador)	80
30/7/24, tema 1 (integrador)	83
30/7/24, tema 2 (integrador)	86
10/7/24, tema 2 (integrador)	89
2/7/24, tema 1 (integrador)	93
5/3/24, tema 2 (integrador)	96
27/2/24, tema 1 (integrador)	99
27/2/24, tema 2 (integrador)	103
20/2/24, tema 2 (integrador)	107
19/12/23, tema 1 (integrador)	110
12/12/23, tema 2 (integrador)	113
15/8/23, tema 2 (integrador)	117
8/8/23, tema 1 (integrador)	121
1/8/23, tema 1 (integrador)	124
1/8/23, tema 2 (integrador)	128
11/7/23, tema 2 (integrador)	131
4/7/23, tema 1 (integrador)	135
4/7/23, tema 2 (integrador)	139
14/3/23, tema 1 (integrador)	142
7/3/23, tema 1 (integrador)	146
7/3/23, tema 2 (integrador)	150
28/2/23, tema 1 (integrador)	154
14/2/23, tema 1 (integrador)	157
14/2/23, tema 2 (integrador)	161
20/12/22, tema 1 (integrador)	165
13/12/22, tema 1 (integrador)	169
13/12/22, tema 2 (integrador)	172
16/8/22, tema 1 (integrador)	175
16/8/22, tema 2 (integrador)	179
9/8/22, tema 1 (integrador)	183
9/8/22, tema 2 (integrador)	187
2/8/22, tema 1 (integrador)	191
19/7/22, tema 1 (integrador)	195
19/7/22, tema 2 (integrador)	199
12/7/22, tema 1 (integrador)	203

14/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (z + y, x + z + 3y^2, x + y)$.
a) Pruebe que $\vec{f}$ es campo de gradientes y halle una función potencial.
b) Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, con
C: $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, $x \geq 0$,
recorrida de modo tal que la coordenada y resulta creciente.

> **Respuesta:** a) $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3$, $U = xy + yz + xz + y^3$. b) C va de $(0, -2, 2)$ a $(0, 2, 2)$; $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 24$.
>
> **a) Hipótesis:** $\vec{f} = (P, Q, R) = (z + y, x + z + 3y^2, x + y)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$.
> **Rotor:** $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = \vec{0}$. Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, $\vec{f}$ es de gradientes.
> **Potencial:** $U'_x = z + y \Rightarrow U = xz + xy + a(y, z)$. $U'_y = x + a'_y = x + z + 3y^2 \Rightarrow a = yz + y^3 + b(z)$. $U'_z = x + y + b'(z) = x + y \Rightarrow b$ constante. **$U = xy + yz + xz + y^3$** (más cualquier constante).
> **b) La curva:** cilindro $x^2 + y^2 = 4$ cortado por el plano $z = 2 - x$, con $x \geq 0$: media elipse. $\vec{X}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ($x = 2 \cos t \geq 0$). Como $y' = 2 \cos t \geq 0$, y crece con t: se recorre de $\vec{X}(-\pi/2) = (0, -2, 2)$ a $\vec{X}(\pi/2) = (0, 2, 2)$.
> **Cuenta:** $U(0, 2, 2) = 0 + 4 + 0 + 8 = 12$; $U(0, -2, 2) = 0 - 4 + 0 - 8 = -12$.
> **Resultado:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 12 - (-12) = \mathbf{24}$.
> **Trampa:** en a) no alcanza con $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$: hay que decir que $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo (o exhibir el potencial, como hicimos). En b), C es un arco abierto, no da 0.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por $(1, 0)$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^{x^2} - 3y, \cos^2(y) + x)$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el versor tangente a Γ en $(1, 0)$ sea $(0, -1)$.

> **Respuesta:** Γ: $x^2 + y^2/4 = 1$ en sentido horario. $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8\pi$.
>
> **Línea de campo:** $\vec{g} = (y, -4x)$. Donde $y \neq 0$, $y' = \dfrac{-4x}{y} \Rightarrow y\,dy = -4x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -2x^2 + c \Rightarrow$ **$4x^2 + y^2 = K$**. Por $(1, 0)$: $K = 4$. Control: $\nabla(4x^2 + y^2) \cdot \vec{g} = (8x, 2y) \cdot (y, -4x) = 0$, así que $\vec{g}$ es tangente a toda la elipse, también en $(1, 0)$ ($\vec{g}$ sólo se anula en el origen). Γ: $\mathbf{x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1}$, cerrada, semiejes 1 en x y 2 en y.
> **Orientación:** en $(1, 0)$, el punto más a la derecha, el versor tangente es $(0, -1)$: la curva baja por la derecha, o sea **sentido horario** (negativo). Parametrización compatible: $r(t) = (\cos t, -2 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, con $r'(0) = (0, -2)$, cuyo versor es $(0, -1)$ ✓ (coincide con $\vec{g}(1, 0) = (0, -4)$).
> **Hipótesis de Green:** $P = e^{x^2} - 3y$, $Q = \cos^2(y) + x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; $D = \{x^2 + y^2/4 \leq 1\}$ es regular y Γ es su borde, cerrado, simple y C^1. $Q'_x = 1$, $P'_y = -3$, **$Q'_x - P'_y = 4$**. Como Γ es horaria, $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 4\,dA = -4 \cdot \text{área}(D) = -4 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 = -8\pi$.
> **Cara directa:** $e^{x^2}\,dx$ y $\cos^2(y)\,dy$ son exactas (dependen de una sola variable), así que en la curva cerrada no aportan. Queda $\oint -3y\,dx + x\,dy$ con $r(t)$: $-3(-2 \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t\,(-2 \cos t) = -6 \operatorname{sen}^2 t - 2 \cos^2 t$, y $\int_0^{2\pi} (-6 \operatorname{sen}^2 t - 2 \cos^2 t)\,dt = -6\pi - 2\pi = -8\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-8\pi}$.
> **Trampa:** el versor $(0, -1)$ en $(1, 0)$ fija sentido horario; si aplicás Green sin el signo menos te da 8π.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo
H: $1 \le z \le 5 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 32\pi k/3$ ($k > 0$ la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$; hay que describir H, escribir la densidad y elegir coordenadas.
> **El sólido:** $z = 5 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono circular de eje z con vértice en (0, 0, 5) que abre hacia abajo. H es lo que queda debajo del cono y arriba del plano $z = 1$. Se cortan donde $5 - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 1$, o sea sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ a altura 1. Sin las otras condiciones sería un cono macizo de altura 4 y radio de base 4 (base en $z = 1$, vértice en (0, 0, 5)); $x \ge 0$, $y \ge 0$ se queda con el cuarto del primer octante. Cada corte horizontal a altura z es un cuarto de disco de radio $5 - z$.
> **Densidad:** la distancia de (x, y, z) al plano xy es $|z| = z$ (en H, $z \ge 1 > 0$): $\delta(x, y, z) = kz$, con $k > 0$ la constante de proporcionalidad.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $x \ge 0$ e $y \ge 0$ equivalen a $0 \le \theta \le \pi/2$; $\sqrt{(x^2 + y^2)} = r$, así que $1 \le z \le 5 - r$, que sólo tiene puntos si $5 - r \ge 1$, o sea $0 \le r \le 4$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_1^{5-r} z\, r\, dz\, dr\, d\theta$. Primitiva en z: $\frac{z^2}{2}$, entre 1 y $5 - r$: $\frac{r[(5-r)^2 - 1]}{2} = \frac{24r - 10r^2 + r^3}{2}$. Primitiva en r: $\frac{1}{2}(12r^2 - \frac{10r^3}{3} + \frac{r^4}{4})$, entre 0 y 4: $\frac{1}{2}(192 - \frac{640}{3} + 64) = \frac{1}{2} \cdot \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$. La integral en θ da $\pi/2$.
> **Resultado:** $M = k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{64}{3} = \mathbf{\frac{32\pi k}{3}}$.
> **Control (otro orden, por cortes horizontales):** para cada $z \in [1, 5]$, $0 \le r \le 5 - z$: $M = k\int_0^{\pi/2} \int_1^5 \int_0^{5-z} z\, r\, dr\, dz\, d\theta = k\frac{\pi}{2} \int_1^5 \frac{z(5-z)^2}{2}\, dz$. Con $u = 5 - z$: $\int_0^4 \frac{(5-u)u^2}{2}\, du = \frac{1}{2}(\frac{320}{3} - 64) = \frac{64}{3}$, y otra vez $M = \frac{32\pi k}{3}$ ✓.
> **Trampa:** tomar r de 0 a 5 (eso es el cono hasta $z = 0$, no hasta el plano $z = 1$), usar como densidad la distancia al origen o al eje z, o perder el r del jacobiano.

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie Σ: $z + y^2 = 5$, $y \ge 0$, $0 \le x \le 2$, $z \ge 1$.
Indique en un gráfico las orientaciones utilizadas en el cálculo.

> **Respuesta:** Normal de Σ hacia arriba, $\vec{N} = (0, 2y, 1)$, y borde recorrido $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. Con las dos orientaciones invertidas, -4.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x + z$, $Q = y^2 - xy$, $R = y + z^2$: polinomios, $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
> **La superficie y su borde:** Σ es el trozo del cilindro parabólico $z = 5 - y^2$ con $z \ge 1$ (o sea $y^2 \le 4$, y como $y \ge 0$, $0 \le y \le 2$) y $0 \le x \le 2$: el gráfico de $z = 5 - y^2$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ del plano xy. Su borde C tiene cuatro tramos: C_1 segmento $y = 0$, $z = 5$, de (0, 0, 5) a (2, 0, 5); C_2 arco de parábola $z = 5 - y^2$ en $x = 2$, de (2, 0, 5) a (2, 2, 1); C_3 segmento $y = 2$, $z = 1$, de (2, 2, 1) a (0, 2, 1); C_4 arco de parábola en $x = 0$, de (0, 2, 1) a (0, 0, 5). Es cerrada y suave a trozos.
> **Superficie elegida:** el borde no está en un plano, así que no hay un trozo de plano que lo tenga como borde; la propia Σ es la cómoda: un gráfico C^1 sobre un rectángulo, suave y orientable. Con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor.
> **Orientación:** tomo $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2y, 1)$, que apunta hacia arriba (tercera componente positiva).

Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia arriba los dedos giran en sentido antihorario visto desde arriba, así que el borde se recorre de modo que su proyección da la vuelta a R en sentido antihorario: **C_1 → C_2 → C_3 → C_4**, es decir (0, 0, 5) → (2, 0, 5) → (2, 2, 1) → (0, 2, 1) → (0, 0, 5). En el gráfico van las dos orientaciones: la normal $\vec{N}$ dibujada sobre Σ apuntando hacia arriba (hacia el lado de z grande) y las flechas del borde en ese orden.
Rotor: $\operatorname{rot}\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 0, 1 - 0, -y - 0) =$ **(1, 1, –y)**.
Cuenta: $\operatorname{rot}\vec{f} \cdot \vec{N} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2y + (-y) \cdot 1 = y$. $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_0^2 \int_0^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 [y^2/2]_0^2 \, dx = \int_0^2 2 \, dx = 4$.
Resultado: recorriendo (0, 0, 5) → (2, 0, 5) → (2, 2, 1) → (0, 2, 1) → (0, 0, 5), $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 4$ (en el sentido contrario, –4).
Control: tramo por tramo, C_1 da 12, C_2 da –48, C_3 da –4 y C_4 da 44: suman 4.
Trampa: la normal de $z = 5 - y^2$ es (0, 2y, 1), no (0, 0, 1): el término 2y se multiplica con la segunda componente del rotor y con (0, 0, 1) te daría –4. Fijate que se piden las dos orientaciones en el gráfico: la de Σ (la normal) y la de C, y tienen que ser compatibles.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 3$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + y^2, y - z^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

Respuesta: $\nabla \cdot \vec{f} = 3$; vol(H) = 9/2; flujo con normales hacia el interior = –27/2.

Planteo: H es el tetraedro limitado por $x + y + z = 3$ y los tres planos coordenados: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3 - x$, $0 \le z \le 3 - x - y$. ∂H son cuatro triángulos: superficie cerrada y suave a trozos.
Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (x + y^2, y - z^2, z)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior, $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}_{ext} \, d\sigma = \iiint_H \nabla \cdot \vec{f} \, dV$; el enunciado pide normales hacia el interior, así que el flujo pedido es menos esa triple.
Divergencia: $\partial/\partial x(x + y^2) + \partial/\partial y(y - z^2) + \partial/\partial z(z) = 1 + 1 + 1 =$ **3**.
Volumen: $\int_0^3 \int_0^{3-x} (3 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^3 \frac{(3 - x)^2}{2} \, dx = \left[-\frac{(3 - x)^3}{6}\right]_0^3 = \frac{3^3}{6} = \frac{9}{2}$.
Cuenta: flujo saliente $= 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$.
Resultado: con normales hacia el interior, **flujo = –27/2**.
Trampa: el signo (normales interiores). Los términos y^2 y z^2 no aportan a la divergencia: y^2 está en la primera componente y se deriva respecto de x, z^2 está en la segunda y se deriva respecto de y.

7/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el volumen del cuerpo H: $2y \le z \le 3 - x^2 - y^2$.

> **Respuesta:** $V(H) = 8\pi$.
>
> **Planteo:** $V = \iiint_H dV$ con piso el plano $z = 2y$ y techo el paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$.
> **El cuerpo:** $z = 3 - x^2 - y^2$ es un paraboloide con vértice $(0, 0, 3)$ que abre hacia abajo; $z = 2y$ es un plano inclinado que contiene al eje x. El plano corta al paraboloide y entre los dos encierran un sólido acotado: la tapa del paraboloide que queda por encima del plano.
> **Dónde se cortan (sombra):** $2y = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4$. La curva intersección es una elipse en el plano $z = 2y$, y su proyección sobre xy es la circunferencia de centro $(0, -1)$ y radio 2. La sombra D es el disco $x^2 + (y + 1)^2 \le 4$, y adentro la altura techo − piso es $3 - x^2 - y^2 - 2y = 4 - x^2 - (y + 1)^2 \ge 0$, así que el plano queda abajo.
> **Coordenadas:** polares centradas en $(0, -1)$: $x = r\cos\theta$, $y = -1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r (una traslación no cambia el jacobiano de polares). Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, y z va de $2y = -2 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta$ hasta $3 - x^2 - y^2 = 2 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta - r^2$. La diferencia es $4 - r^2$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva de $4r - r^3$: $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. En θ: 2π.
> **Resultado: $V = 8\pi$.**
> **Control:** en cartesianas, $V = \int_{-2}^{2}\int_{-1-\sqrt{(4-x^2)}}^{-1+\sqrt{(4-x^2)}} (3 - x^2 - y^2 - 2y)\, dy\, dx$ también da 8π. Y es el volumen de un paraboloide $z = h - r^2$ de altura $h = 4$ cortado en su base de radio 2: $\frac{\pi}{2}\cdot 2^4 = 8\pi$ ✓.
> **Trampa:** la sombra no es un disco centrado en el origen: hay que completar cuadrados. Usar polares comunes con $r \le 2$ (o con $r \le \sqrt{3}$, donde el paraboloide corta $z = 0$) da otra región. Y el piso es el plano $z = 2y$, no $z = 0$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(x) - y^2, xy + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de la curva
C: $x - y^2 = 0$, $x \le 1$
recorrida de modo que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = e - 1/e$ (= 2 sh 1 ≈ 2,350).
>
> **La curva:** $x = y^2$ con $x \le 1$ es el arco de parábola con $y \in [-1, 1]$, de $(1, -1)$ a $(1, 1)$ pasando por el origen (y creciente). No es cerrada: la cierro.
> **Cierre:** C_1: segmento $x = 1$ de $(1, 1)$ a $(1, -1)$. $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\}$. Al subir por la parábola (lado izquierdo de D), D queda a la derecha: el recorrido es **horario**, orientación negativa.
> **Hipótesis del teorema:** $P = h(x) - y^2$ y $Q = xy + e^y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$ ($h \in C^1$); D es una región elemental con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
> **Rotor:** $Q'_x = y$, $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
> **Doble integral:** $\iint_D 3y\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} 3y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} 3y(1 - y^2)\, dy = 0$ (integrando impar en un intervalo simétrico; D es simétrica respecto del eje x). Entonces $\oint_{C \cup C_1} = 0$.
> **Segmento:** C_1: $(1, y)$, y de 1 a −1; $dx = 0$, así que sólo cuenta $Q(1, y) = y + e^y$ (y h no aparece): $\int_1^{-1} (y + e^y)\, dy = [y^2/2 + e^y]_1^{-1} = (½ + 1/e) - (½ + e) = 1/e - e$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - (1/e - e) = \mathbf{e - 1/e} \approx 2{,}350$.
Control (la otra cara): con $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $t \in [-1, 1]$, $\vec{r}' = (2t, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{r}' = 2t\, h(t^2) - 2t^3 + t^3 + e^t$. Los términos $2t\, h(t^2)$ y $-t^3$ son impares y se anulan entre -1 y 1; queda $\int_{-1}^{1} e^t\, dt = e - 1/e$ ✓.
Trampa: en el segmento vertical $dx = 0$, así que P (la que tiene h) no aporta: no hace falta conocer h.

Ejercicio 3. Halle el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 3 - 2x$, $z \le 0$
orientada de modo que en $(-1, 0, -2)$ la normal tenga tercera componente negativa. Se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f}) = 2$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (y, x, 2)$.

Si lo necesita, use que el volumen de la esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Respuesta: $\Phi = 8\pi/3$ (normal saliente de la semiesfera, la pedida).

Planteo: $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$: esfera de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2. Σ es su mitad de abajo ($z \le 0$), abierta, con borde en $z = 0$, que es justo donde conocemos $\vec{f}$. La cerramos con la tapa T: $z = 0$, $(x + 1)^2 + y^2 \le 4$, y V es la media bola de abajo.
Orientación: $(-1, 0, -2)$ es el polo sur; ahí una normal con tercera componente negativa apunta hacia abajo, o sea hacia afuera de la esfera. Σ va con la normal **saliente** de V.
Hipótesis: el enunciado da $\operatorname{div} \vec{f} = 2$, así que $\vec{f}$ se supone de clase C^1 en un entorno de V; V es acotado y $\partial V = \Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, con normal exterior.
Triple: $\iiint_V 2\, dV = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (4/3)\pi \cdot 2^3 = 32\pi/3$.
Tapa: la normal saliente de la media bola de abajo en $z = 0$ es $(0, 0, 1)$. $\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) = 2$, flujo $= 2 \cdot$ área(T) $= 2 \cdot 4\pi = 8\pi$.
Resultado: $\Phi_\Sigma = 32\pi/3 - 8\pi = \mathbf{8\pi/3}$.
Trampa: la tapa de una semiesfera de **abajo** lleva normal hacia **arriba** (es la saliente de ese sólido). Con la normal hacia abajo te daría $32\pi/3 + 8\pi = 56\pi/3$.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y,\ 3x^2y^2z^2 + y,\ 2x^2y^3z)$
y C el borde del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ y $(0, 1, 1)$. Indique el sentido de recorrido considerado en el cálculo mediante un gráfico.

Respuesta: Recorriendo $P_1 = (1, 0, 0) \to P_3 = (0, 1, 1) \to P_2 = (0, -1, 1) \to P_1$ (antihorario visto desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1$. En el sentido contrario, -1.

Planteo: borde de un triángulo, curva cerrada: Stokes con el triángulo como superficie. Es el mismo campo del integrador del 5/8/25: $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, y, 0)$.
Plano del triángulo: $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, -1, 1)$, $P_3 = (0, 1, 1)$. $P_3 - P_1 = (-1, 1, 1)$, $P_2 - P_1 = (-1, -1, 1)$, $(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) = (2, 0, 2) \parallel (1, 0, 1)$. Plano $\mathbf{x + z = 1}$ (los tres vértices lo cumplen).
Superficie elegida: el triángulo, $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x)$ con $(x, y) \in T$, el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$: $T = \{0 \le x \le 1,\ |y| \le 1 - x\}$, Área$(T) = \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular, orientable; borde poligonal cerrado, suave a trozos.
Sentido elegido (lo que va en el gráfico): $P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1$. Proyectado: $(1, 0) \to (0, 1) \to (0, -1) \to (1, 0)$, antihorario visto desde arriba. En el dibujo: el triángulo con el lado P_2P_3 horizontal a altura $z = 1$ sobre el plano yz y el vértice P_1 en el eje x, con flechas $P_1 \to P_3 \to P_2$ y la normal $(1, 0, 1)$ saliendo hacia

arriba y hacia x positivo.

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con los dedos en $P_1 \to P_3 \to P_2$ el pulgar da $(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) = (2, 0, 2)$: coincide con la normal de la parametrización.

Rotor: el gradiente no aporta; $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot}(-y, y, 0) = (0, 0, 1)$ (con $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P)$ sobre $\vec{f}$ completo da lo mismo).

Flujo del rotor: $\iint_T (0, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)\, dxdy = \text{Área}(T) = 1$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{1}$ en el sentido $P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1$ (y -1 en el opuesto).

Control (circulación directa): el gradiente da 0 en la curva cerrada; queda $\oint -y\,dx + y\,dy$. $P_1 \to P_3$: $(1 - t, t, t)$, $\vec{r}' = (-1, 1, 1)$: $\int_0^1 (t + t)\, dt = 1$. $P_3 \to P_2$: $(0, 1 - 2t, 1)$, $\vec{r}' = (0, -2, 0)$: $\int_0^1 -2(1 - 2t)\, dt = 0$. $P_2 \to P_1$: $(t, t - 1, 1 - t)$, $\vec{r}' = (1, 1, -1)$: $\int_0^1 (-y + y)\, dt = 0$. Total 1 ✓.

Trampa: el orden en que te dan los vértices (P_1, P_2, P_3) da la normal hacia abajo, $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) = (-2, 0, -2)$. Si usás ese recorrido, el resultado es -1. Cualquiera de los dos vale si lo declarás y lo dibujás.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \varphi(x)(2y + x^2, x)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, tal que

1. $\vec{f}(-1, 0) = (-2, 2)$;
2. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada C.

Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva

$\Gamma: \vec{X} = (\sqrt{(3 + t^2)}, t^4 + t + 1), -1 \le t \le 1$

orientada según esa parametrización.

Respuesta: $\varphi(x) = 2x$; $\vec{f} = \nabla U$ con $U = 2x^2y + x^4/2$; Γ va de $(2, 1)$ a $(2, 3)$; circulación = 16.

Condición 2 ⇔ gradiente: circulación nula sobre toda curva cerrada equivale a que $\vec{f}$ sea de gradientes en $\mathbb{R}^2$. $\vec{f}$ es C^1 porque $\varphi \in C^1$, así que si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

La EDO: $P = \varphi(x)(2y + x^2)$, $Q = x\varphi(x)$. $P'_y = 2\varphi$; $Q'_x = \varphi + x\varphi'$. Igualando: **$x\,\varphi'(x) = \varphi(x)$** para todo x.

Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(\varphi/x)' = \dfrac{x\varphi' - \varphi}{x^2} = 0$, así que φ/x es constante en cada semirrecta: $\varphi(x) = c_1 x$ para $x > 0$ y $\varphi(x) = c_2 x$ para $x < 0$ (y $\varphi(0) = 0$ por continuidad). Como φ es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$\varphi(x) = cx$** en todo $\mathbb{R}$.

Condición 1: $\vec{f}(-1, 0) = \varphi(-1)\cdot(0 + 1, -1) = (\varphi(-1), -\varphi(-1)) = (-2, 2) \Rightarrow \varphi(-1) = -2 \Rightarrow c\cdot(-1) = -2 \Rightarrow c = 2$. **$\varphi(x) = 2x$**.

Suficiencia y potencial: $\vec{f} = (4xy + 2x^3, 2x^2)$ cumple $P'_y = 4x = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$ (simplemente conexo). $U'_y = 2x^2 \Rightarrow U = 2x^2y + k(x)$; $U'_x = 4xy + k'(x) = 4xy + 2x^3 \Rightarrow k = x^4/2$. $U(x, y) = 2x^2y + \dfrac{x^4}{2}$.

Extremos de Γ: $\vec{X}(-1) = (\sqrt{4}, 1 - 1 + 1) = (2, 1)$ y $\vec{X}(1) = (\sqrt{4}, 1 + 1 + 1) = (2, 3)$; orientada según la parametrización, va de $(2, 1)$ a $(2, 3)$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(2, 3) - U(2, 1) = (24 + 8) - (8 + 8) = \mathbf{16}$. No hace falta tocar la parametrización (que es fea a propósito).

Trampa: el dato está en $x = -1$ y Γ vive en $x \ge 2$: la constante encontrada vale para $x < 0$, y sólo porque φ es derivable en 0 se sabe que es la misma para $x > 0$. Con otra constante en las x positivas daría otra cosa (por ejemplo, -16 con $\varphi = -2x$).

29/6/26 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región H de $\mathbb{R}^3$ definida por
$H: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 17,\ z \geq 2,$
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 81\pi k/8$ ($\delta = kz$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta\, dV$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 2z^2 = 17$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$ y $\sqrt{(17/2)} \approx 2{,}92$. El plano $z = 2$ lo corta en $x^2 + y^2 = 17 - 8 = 9$ (circunferencia de radio 3). H es el casquete de arriba: entre $z = 2$ y la punta $z = \sqrt{(17/2)}$. Cada tajada $z = cte$ es el disco $x^2 + y^2 \leq 17 - 2z^2$.
> **Densidad:** la distancia al plano xy es $|z| = z$ (en H, $z \geq 2$): $\delta = kz$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $2 \leq z \leq \sqrt{(17/2)}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(17 - 2z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r da el área del disco, $\pi(17 - 2z^2)$. $M = k\pi\int_2^{\sqrt{(17/2)}} z(17 - 2z^2)\,dz$. Primitiva: $\frac{17z^2}{2} - \frac{z^4}{2}$. En $z^2 = \frac{17}{2}$: $\frac{289}{4} - \frac{289}{8} = \frac{289}{8}$. En $z = 2$: $34 - 8 = 26 = \frac{208}{8}$.
> Diferencia: $\frac{81}{8}$.
> **Resultado: $M = \frac{81\pi k}{8}$.**
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 3$ y $2 \leq z \leq \sqrt{(\frac{17 - r^2}{2})}$. $M = 2\pi k\int_0^3 r[\frac{z^2}{2}]_2^{\sqrt{((17 - r^2)/2)}}\,dr = \pi k\int_0^3 r\cdot\frac{9 - r^2}{2}\,dr = \frac{\pi k}{2}[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = \frac{\pi k}{2}\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi k}{8}$ ✓.
> **Trampa:** el techo es $z = \sqrt{(17/2)}$, no $\sqrt{17}$: el 2 que multiplica a z^2 achica ese semieje. En el orden dz dr, r va hasta 3 (radio del corte con $z = 2$).

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^x + h(3x + 3y),\ x^2 + h(3x + 3y))$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$
recorrida en sentido antihorario.

> **Respuesta:** $\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{ds} = 76/15$ (antihorario).
>
> **Planteo:** $P = e^x + h(3x + 3y)$, $Q = x^2 + h(3x + 3y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. No conocemos h, así que parametrizar no sirve: Green.
> **La región:** $D = \{|y| \leq x \leq 2 - y^2\}$. Las curvas se cortan donde $|y| = 2 - y^2$, o sea $|y|^2 + |y| - 2 = 0$, $(|y| + 2)(|y| - 1) = 0$, $|y| = 1$: en (1, 1) y (1, –1). Entonces $D = \{-1 \leq y \leq 1,\ |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$: a la izquierda la "V" $x = |y|$ (vértice en el origen) y a la derecha el arco de parábola $x = 2 - y^2$.
> **Hipótesis del teorema:** P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una función lineal, más e^x y x^2). D es una región elemental (regular) y su borde, formado por dos segmentos y un arco de parábola, es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es antihorario: orientación positiva, Green se aplica tal cual.
> **Rotor:** por la regla de la cadena, $Q'_x = 2x + 3h'(3x + 3y)$ y $P'_y = 3h'(3x + 3y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{2x}$: la h desaparece (de hecho $(h(3x + 3y), h(3x + 3y)) = \nabla(H(3x + 3y)/3)$ con $H' = h$).

Doble integral: $\iint_D 2x\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{2-y^2} 2x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} [x^2]_{|y|}^{2-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1} (4 - 4y^2 + y^4 - y^2)\,dy = 2[4y - 5y^3/3 + y^5/5]_0^1 = 2(4 - 5/3 + 1/5) = 76/15$.
Resultado: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$ **76/15**.
Control (la otra cara): e^x y los términos con h son gradientes y no aportan en una curva cerrada; queda $\oint x^2\,dy$. En sentido antihorario: por la parábola $x = 2 - y^2$, y de −1 a 1: $\int_{-1}^{1} (2 - y^2)^2\,dy = 86/15$; por $x = |y|$, de (1, 1) a (0, 0) y a (1, −1), y de 1 a −1: $\int_{1}^{-1} y^2\,dy = -2/3$. Total 86/15 − 10/15 = 76/15 ✓.
Trampa: elegí bien el orden: con franjas verticales la región se parte en dos ($x \in [0, 1]$ entre $y = \pm x$ y $x \in [1, 2]$ entre $y = \pm\sqrt{(2 - x)}$); con franjas horizontales (x entre $|y|$ y $2 - y^2$) sale en una sola integral, y como el integrando queda par en y se duplica la de 0 a 1.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 2,\ y \ge 0$
orientada de modo tal que las normales apunten hacia el eje z.
Calcule el flujo a través de Σ de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, \cos(xyz))$.

Respuesta: $\Phi = -8\pi$ (con $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0)$, hacia el eje z).

Planteo: $x^2 + y^2 = 4$ es el cilindro de radio 2 y eje z; con $y \ge 0$ es la mitad, $\theta \in [0, \pi]$. $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$, $D = [0, \pi] \times [0, 2]$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)$.
Orientación: ese vector es $1\cdot(x, y, 0)$: va del eje hacia el punto, o sea hacia afuera. Se pide hacia el eje z: **cambio el signo**, $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0)$.
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, \cos(4z\operatorname{sen}\theta\cos\theta))$. La tercera componente de $\vec{N}$ es 0, así que el coseno no aporta nada: $\vec{f}\cdot\vec{N} = -4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = -4$.
Cuenta: $\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2} (-4)\,dz\,d\theta = -4\cdot 2\cdot\pi = -8\pi$.
Resultado: $\Phi =$ **-8π**.
Control con el versor: $\check{n} = -(x, y, 0)/2$, $\vec{f}\cdot\check{n} = -(x^2 + y^2)/2 = -2$ constante sobre Σ; el área del medio cilindro es $\pi\cdot 2\cdot 2 = 4\pi$, así que $\Phi = -8\pi$ ✓.
Trampa: asustarse con cos(xyz) y querer cerrar con Gauss: las tapas $z = 0$ y $z = 2$ sí ven ese término y la cuenta se complica. Directo, no aparece.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por (1, 0) y está contenida en el semiplano $3x - y \ge 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (2 + xy^2, y + x^2y)$ a lo largo de C. Indique en un gráfico la orientación elegida.

Respuesta: C: media elipse $9x^2 + y^2 = 9$ con $y \le 3x$, de $(-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ a $(1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ pasando por (1, 0). $\vec{f} = \nabla U$ con $U = 2x + x^2y^2/2 + y^2/2$. En sentido antihorario la circulación vale $2\sqrt{2}$ (en sentido horario, $-2\sqrt{2}$).

Planteo: hay que hallar la línea de campo de $\vec{g}$ por (1, 0), quedarse con la parte que cae en el semiplano y, si $\vec{f}$ es de gradientes, usar el potencial entre los extremos.
Línea de campo (EDO): $\vec{X}' = \vec{g}(\vec{X})$ da $x' = -y$, $y' = 9x$. Las trayectorias cumplen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9x}{-y}$, separable: $y\,dy = -9x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{9x^2}{2} + k \Rightarrow 9x^2 + y^2 = c$. Por (1, 0): $c = 9$. La línea es la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (semieje 1 en x, 3 en y). Control: $\dfrac{d}{dt}(9x^2 + y^2) = 18x(-y) + 2y(9x) = 0$.

Recorte con $3x - y \geq 0$: la recta $y = 3x$ pasa por el centro de la elipse; reemplazando, $9x^2 + 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$. Corta en $B = (-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ y $A = (1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$. El semiplano $y \leq 3x$ contiene a $(1, 0)$ ($3 \cdot 1 - 0 = 3 \geq 0$), así que C es la media elipse que va de B a A pasando por $(1, 0)$.

Orientación elegida (gráfico): dibujá la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ y la recta $y = 3x$ por el origen, y quedate con la mitad que está a la derecha y abajo de la recta (la que contiene a $(1, 0)$). Marcá la flecha en sentido antihorario: sale de B, pasa por $(1, 0)$ y llega a A. Es el sentido de $\vec{g}$ (en $(1, 0)$, $\vec{g} = (0, 9)$ apunta para arriba). Parametrización con ese sentido: $\vec{X}(s) = (\cos s, 3 \operatorname{sen} s)$, $-3\pi/4 \leq s \leq \pi/4$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = 2 + xy^2$ y $Q = y + x^2y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $P'_y = 2xy = Q'_x$. $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, entonces $\vec{f}$ es de gradientes.

Potencial: $U'_x = 2 + xy^2 \Rightarrow U = 2x + \dfrac{x^2y^2}{2} + h(y)$. Derivando en y: $x^2y + h'(y) = y + x^2y \Rightarrow h' = y$, $h = y^2/2$.

Queda $U = 2x + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

Cuenta: en A, $x^2y^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{4}$ e $y^2 = \dfrac{9}{2}$, así que $U(A) = \sqrt{2} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{9}{4} = \sqrt{2} + \dfrac{27}{8}$. En B los cuadrados son los mismos y sólo cambia el signo de $2x$: $U(B) = -\sqrt{2} + \dfrac{27}{8}$.

Resultado: con la orientación antihoraria, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = \mathbf{2\sqrt{2}}$. Si se elige la horaria (de A a B por $(1, 0)$), da $-2\sqrt{2}$.

Trampa: el enunciado no fija el sentido, así que sin la orientación indicada (en el gráfico) la respuesta está incompleta: el signo depende de ella. Y C es un arco abierto, no la elipse entera: sobre la elipse cerrada la circulación daría 0.

Ejercicio 5. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y^2, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por
$x^2 + y^2 - 2y = 0$, $2y + z = 6$.
Indique la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con C recorrida en sentido antihorario vista desde arriba (normal del plano hacia arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 - y^2$, $Q = 3x^2y^2z^2 + y$, $R = 2x^2y^3z$: polinomios, así que $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. Parametrizar directo deja integrales trigonométricas larguísimas por el término $2xy^3z^2$; conviene el teorema del rotor.

La curva: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, un cilindro circular de radio 1 con eje paralelo a z por $(0, 1)$; $2y + z = 6$ es un plano. C es la elipse donde el plano corta al cilindro: cerrada y suave.

Rotor: $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = 6xy^2z^2 - (6xy^2z^2 - 2y) = 2y$. **$\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, 2y)$.** (Es lo mismo que ver $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y^2, y, 0)$: sólo circula la parte $(-y^2, y, 0)$.)

Superficie elegida: el trozo S del plano $z = 6 - 2y$ que queda dentro del cilindro, $(x, y) \in D$: $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Es un gráfico C^1 (suave, orientable, acotada) y su borde es C. Como $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor, y el trozo de plano es la superficie más cómoda con ese borde.

Orientación elegida: C recorrida en sentido **antihorario mirando desde arriba** (su proyección gira antihoraria alrededor de $(0, 1)$); por ejemplo, en $(0, 0, 6)$, que es el punto más bajo de la proyección, la tangente es $(1, 0, 0)$. Con $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $z = 4 - 2 \operatorname{sen} t$, t creciente. Regla de la mano derecha: dedos según el recorrido, pulgar hacia arriba, así que la normal compatible del trozo de plano es $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2, 1)$.

Cuenta: rot f · N = 0 · 0 + 0 · 2 + 2y · 1 = 2y. Entonces $\int_C f \cdot ds = \iint_D 2y\,dx\,dy$. Con $x = \rho\cos\theta$, $y = 1 + \rho\,\text{sen}\,\theta$, jacobiano ρ, $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 2(1 + \rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}[\rho^2 + (2/3)\rho^3\,\text{sen}\,\theta]_0^1\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1 + (2/3)\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta = 2\pi$. (Más rápido: $\iint_D y\,dA = \bar{y} \cdot \text{área}(D) = 1 \cdot \pi$.)
Resultado: con C antihoraria vista desde arriba, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 2\pi}$; con el sentido opuesto, -2π.
Trampa: el enunciado deja elegir el sentido, pero hay que decirlo y que la normal sea la compatible con él. Un 2π sin orientación declarada no está bien resuelto.

27/6/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint$ xz dxdydz.

> **Respuesta:** $\iiint_H xz\,dx\,dy\,dz = \frac{64}{15} \approx 4{,}27$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble de eje z a 45°; Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. "Limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2" es: por encima de la hoja de arriba del cono, $z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$, y por debajo de la esfera. Se cortan en $2z^2 = 8$: $z = 2$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Es el cucurucho de helado, y el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$; $z \geq 0$ ya vale adentro del cono) se queda con un cuarto.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Adentro del cono: $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/4]$. Esfera: $\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. Rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $xz \cdot |J| = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \cdot \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \cos\theta$.
> **Cuenta:** $\iiint_H xz\,dV = (\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi\,d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4\,d\rho)$. En ρ: primitiva $\frac{\rho^5}{5}$, da $\frac{(2\sqrt{2})^5}{5} = \frac{128\sqrt{2}}{5}$. En φ: primitiva $\frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}$ (sustitución $u = \operatorname{sen}\varphi$), entre 0 y π/4 da $\frac{(\sqrt{2}/2)^3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. En θ: primitiva sen θ, da $\operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen} 0 = 1$.
> **Resultado:** $\iiint_H xz\,dV = \frac{128\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1 = \frac{256}{60} = \frac{64}{15} \approx 4{,}27$.
> **Control en cilíndricas:** $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, 2]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$, integrando $r\cos\theta \cdot z \cdot r$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 r^2(4 - r^2)\,dr = \frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}$ entre 0 y 2 $= \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{64}{15}$. En θ: $\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = 1$. Total $\frac{64}{15}$ ✓.
> **Trampa:** en esféricas el integrando lleva ρ^4 (dos ρ del xz y ρ^2 del jacobiano) y $\operatorname{sen}^2\varphi$ (uno del x, otro del jacobiano). Y el primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$: el cos θ no se anula al integrar, a diferencia de la vuelta entera, donde daría 0.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - y, 3x + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la unión de los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con A = (0, 0), B = (2, 4) y C = (4, 0), recorrida en el sentido A → B → C.

> **Respuesta:** $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 32$.
>
> El exponente de e está borroso en la foto; se lee cos(y), como en el tema 2. El resultado no depende de esa lectura mientras el exponente sea una función sólo de y: no entra en Q'_x y en el segmento del eje x es dy = 0.
> **La curva:** la poligonal va de A = (0, 0) a B = (2, 4) y de ahí a C = (4, 0). No es cerrada: la cierro con C_1, el segmento de C a A sobre el eje x.
> **Orientación:** A → B → C → A sube, baja y vuelve hacia la izquierda por abajo: el triángulo T = ABC queda a la derecha, sentido **horario** (orientación negativa).
> **Hipótesis del teorema:** $P = x^3 - y$ y $Q = 3x + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; T es una región regular y su borde es

una poligonal cerrada y simple (suave a trozos). Por la orientación, $\oint = -\iint_T (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x - P'_y = 3 - (-1) = 4$ (la exponencial depende sólo de y).
Doble integral: el rotor es constante, así que $\iint_T$ = constante · área(T); área(T) = ½ · 4 · 4 = 8. $\iint = 4 \cdot 8 = 32$, y por el sentido horario $\oint_{AB \cup BC \cup CA} = -32$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 4 a 0; dy = 0 y $P(t, 0) = t^3$: $\int_4^0 t^3\, dt = [t^4/4]_4^0 = -64$.
Resultado: $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32 + 64 = \mathbf{32}$.
Trampa: $e^{\cos(y)}$ no tiene primitiva elemental, pero $e^{\cos(y)}\, dy$ es exacta: lo que aporta en AB (y de 0 a 4) se cancela con lo de BC (y de 4 a 0). No hace falta integrarla ni por Green (no entra en el rotor) ni directo. En el segmento del eje x, dy = 0 y sólo queda $\int x^3\, dx$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
$\Sigma: z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0,\ 1 \le z \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{15\sqrt{2}\,\pi}{4} \approx 16{,}66$.

Planteo: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$ es la hoja de arriba del cono con vértice en el origen. Σ es la parte entre las alturas z = 1 y z = 4 con x ≥ 0, y ≥ 0: un cuarto de tronco de cono. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$.
Dominio D: sobre el cono z = r, así que $1 \le z \le 4$ es $1 \le r \le 4$. x ≥ 0 e y ≥ 0 dan $0 \le \theta \le \pi/2$. $D = [1, 4] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\, r$, que no se anula en D (r ≥ 1, el vértice queda afuera): Σ es regular.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 1 y 4 da $\dfrac{\sqrt{2}\,(16 - 1)}{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt{2}$.
Integral en θ: multiplica por $\dfrac{\pi}{2}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \dfrac{\mathbf{15\sqrt{2}\,\pi}}{\mathbf{4}} \approx 16{,}66$.
Control: como gráfica, $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de corona $1 \le r \le 4$, de área $\dfrac{\pi(16 - 1)}{4}$; por √2 da lo mismo ✓. Y con la fórmula del tronco: $\pi\,(1 + 4)\, g$ con $g = \sqrt{((4 - 1)^2 + (4 - 1)^2)} = 3\sqrt{2}$ da $15\sqrt{2}\,\pi$, y la cuarta parte es $15\sqrt{2}\,\pi/4$ ✓.
Trampa: olvidarse del √2 y dar el área de la proyección, o integrar r desde 0 (eso agrega el pedacito de cono entre el vértice y z = 1, que no es parte de Σ).

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, \varphi(x), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
$\Sigma: z = 5 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 4$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con las normales hacia arriba (exteriores al sólido): Φ = 20π. Con la orientación opuesta: Φ = −20π.

Planteo: Σ: $z = 5 - x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 \le 4$ es un paraboloide hacia abajo, con vértice (0, 0, 5), recortado por el cilindro r = 2: su borde es la circunferencia r = 2 a altura z = 5 − 4 = 1. Con φ desconocida conviene Gauss: cerramos con la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 4$, y trabajamos en $H = \{1 \le z \le 5 - x^2 - y^2\}$.
Orientación elegida (gráfico): en Σ tomo la normal hacia arriba (tercera componente positiva), que es la exterior a H porque el sólido está debajo de la cúpula. En la tapa, la exterior es (0, 0, −1). En el dibujo: flechas saliendo de la cúpula hacia arriba y afuera.

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f} = (x, \varphi(x), z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x x + \partial_y \varphi(x) + \partial_z z = 1 + 0 + 1 = 2$.

Triple integral: en cilíndricas $H = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 1 \le z \le 5 - r^2\}$: $\iiint_H 2\, dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2 \cdot 2\pi[2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^2 = 4\pi \cdot 4 = 16\pi$.

Tapa: en $z = 1$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -z = -1$; $\Phi_T = -1 \cdot 4\pi = -4\pi$.

Gauss: $\Phi_\Sigma - 4\pi = 16\pi \Rightarrow \Phi_\Sigma = 20\pi$.

Resultado: $\Phi = 20\pi$ con las normales hacia arriba (-20π con las normales hacia abajo).

Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y\varphi(x) + 5 - x^2 - y^2$. El término $2y\varphi(x)$ es impar en y sobre el disco: integra 0. Queda $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (5 + r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = 20\pi + \int_0^{2\pi} 4\cos 2\theta\, d\theta = 20\pi$ ✓.

Trampa: cerrar con la tapa en $z = 0$ (no es el borde de Σ: el borde está en $z = 1$) o tomar la tapa con normal $(0, 0, 1)$: entonces $\Sigma \cup T$ no queda orientada hacia afuera y Gauss da cualquier cosa.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + y^2 = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por $(-1, 1)$. Calcule $\int_C x\, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos $(-1, 1)$ y $(0, b)$.

Respuesta: Γ: $y = x^2$; $b = 0$; $\int_C x\, ds = (1 - 5\sqrt{5})/12 \approx -0{,}848$.

Planteo: $\mathscr{F}$ son las curvas de nivel de $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$ (elipses centradas en el origen). La curva ortogonal Γ corta a cada elipse en ángulo recto, o sea su tangente es paralela a ∇F (que es normal a la elipse que pasa por ese punto).

EDO de la familia: derivando implícitamente respecto de x (con $y = y(x)$): $x + 2yy' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2y}$. La constante c desaparece al derivar, que es lo que se busca.

EDO de las ortogonales: se cambia y' por $-1/y'$: $y' = \frac{2y}{x}$. (Lo mismo sale de pedir tangente $(1, y')$ paralela a $\nabla F = (x, 2y)$.)

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + K_1 \Rightarrow |y| = e^{K_1} x^2 \Rightarrow y = Kx^2$. Por $(-1, 1)$: $1 = K(-1)^2$, $K = 1$. Γ: **$y = x^2$**. Control: $y' = 2x = 2x^2/x = 2y/x$ ✓. En $(-1, 1)$ la tangente de Γ es $(1, -2)$, paralela a $\nabla F(-1, 1) = (-1, 2)$ ✓.

El punto (0, b): tiene que estar sobre Γ, así que $b = 0^2 =$ **0**: el otro extremo es el origen. (La EDO es singular en $x = 0$, donde todas las elipses degeneran en el punto $(0, 0)$, pero $y = x^2$ es C^1 ahí y el arco C es el tramo de parábola entre $x = -1$ y $x = 0$.)

Parametrización de C: $\vec{X}(x) = (x, x^2)$, $x \in [-1, 0]$. $\vec{X}' = (1, 2x)$, $\|\vec{X}'\| = \sqrt{(1 + 4x^2)} \neq 0$: regular.

Cuenta: $\int_C x\, ds = \int_{-1}^0 x\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$. Con $u = 1 + 4x^2$, $du = 8x\, dx$, la primitiva es $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$. Entre -1 y 0: $\frac{1}{12}(1 - 5^{3/2}) = \frac{1 - 5\sqrt{5}}{12}$.

Resultado: $\int_C x\, ds =$ **$(1 - 5\sqrt{5})/12$** $\approx -0{,}848$. Da negativa porque $x \le 0$ en todo C. La integral respecto de ds no depende del sentido en que se recorra C.

Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ después de eliminar c; si resolvés $y' = -x/(2y)$ volvés a la familia de elipses. Y en $\int f\, ds$ el parámetro va siempre de menor a mayor ($ds > 0$): integrar al revés "porque el arco se recorre de $(-1, 1)$ a $(0, 0)$" cambia el signo y está mal.

27/6/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint yz\, dx dy dz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\, dx\, dy\, dz = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble de eje z a 45°; Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. "Limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2" es: por encima de la hoja de arriba del cono, $z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$, y por debajo de la esfera. Se cortan en $2z^2 = 8$: $z = 2$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Es el cucurucho de helado, y el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$; $z \geq 0$ ya vale adentro del cono) se queda con un cuarto.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Adentro del cono: $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/4]$. Esfera: $\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. Rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $yz \cdot |J| = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \cdot \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$.
> **Cuenta:** $\iiint_H yz\, dV = (\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4\, d\rho)$. En ρ: primitiva $\dfrac{\rho^5}{5}$, da $\dfrac{(2\sqrt{2})^5}{5} = \dfrac{128\sqrt{2}}{5}$. En φ: primitiva $\dfrac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}$ (sustitución $u = \operatorname{sen}\varphi$), entre 0 y $\pi/4$ da $\dfrac{(\sqrt{2}/2)^3}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$. En θ: primitiva $-\cos\theta$, da $-\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\, dV = \dfrac{128\sqrt{2}}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1 = \dfrac{256}{60} = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$. Tiene que dar lo mismo que $\iiint xz$ del tema 1: la región es simétrica respecto del plano $y = x$, que cambia x por y.
> **Control en cilíndricas:** $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, 2]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$, integrando $r \operatorname{sen}\theta \cdot z \cdot r$. En z: primitiva $\dfrac{z^2}{2}$, da $\dfrac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 r^2(4 - r^2)\, dr = \dfrac{4r^3}{3} - \dfrac{r^5}{5}$ entre 0 y 2 $= \dfrac{32}{3} - \dfrac{32}{5} = \dfrac{64}{15}$. En θ: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 1$. Total $\dfrac{64}{15}$ ✓.
> **Trampa:** en esféricas el integrando lleva ρ^4 (dos ρ del yz y ρ^2 del jacobiano) y $\operatorname{sen}^2\varphi$ (uno del y, otro del jacobiano). Y el primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$: el $\operatorname{sen}\theta$ no se anula al integrar, a diferencia de la vuelta entera, donde daría 0.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - 2y, e^{\cos(y)} + x)$ a lo largo de la unión de los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con A = (0, 0), B = (3, 6) y C = (6, 0), recorrida en el sentido A → B → C.

> **Respuesta:** $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 270$.
>
> **La curva:** la poligonal va de A = (0, 0) a B = (3, 6) y de ahí a C = (6, 0). No es cerrada: la cierro con C_1, el segmento de C a A sobre el eje x.
> **Orientación:** A → B → C → A sube, baja y vuelve hacia la izquierda por abajo: el triángulo T = ABC queda a la derecha, sentido **horario** (orientación negativa).
> **Hipótesis del teorema:** $P = x^3 - 2y$ y $Q = e^{\cos(y)} + x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; T es una región regular y su borde es una poligonal cerrada y simple (suave a trozos). Por la orientación, $\oint = -\iint_T (Q'_x - P'_y)\, dA$.
> **Rotor:** $Q'_x - P'_y = 1 - (-2) = 3$ (la exponencial depende sólo de y).

Doble integral: el rotor es constante, así que $\iint_T$ = constante · área(T); área(T) = ½ · 6 · 6 = 18. $\iint$ = 3 · 18 = 54, y por el sentido horario $\oint_{AB \cup BC \cup CA} = -54$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 6 a 0; dy = 0 y P(t, 0) = t^3: $\int_6^0 t^3\,dt = [t^4/4]_6^0 = -324$.
Resultado: $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -54 + 324 =$ **270**.
Trampa: $e^{\cos(y)}$ no tiene primitiva elemental, pero $e^{\cos(y)}$ dy es exacta: lo que aporta en AB (y de 0 a 6) se cancela con lo de BC (y de 6 a 0). No hace falta integrarla ni por Green (no entra en el rotor) ni directo. En el segmento del eje x, dy = 0 y sólo queda $\int x^3\,dx$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
Σ: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$, $1 \le z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Respuesta: A(Σ) = $2\sqrt{2}\,\pi \approx 8{,}89$.

Planteo: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$ es la hoja de arriba del cono con vértice en el origen. Σ es la parte entre las alturas z = 1 y z = 3 con x ≥ 0, y ≥ 0: un cuarto de tronco de cono. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\,dr\,d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r)$.
Dominio D: sobre el cono z = r, así que $1 \le z \le 3$ es $1 \le r \le 3$. x ≥ 0 e y ≥ 0 dan $0 \le \theta \le \pi/2$. D = [1, 3] × [0, π/2].
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\text{sen}\,\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\,r$, que no se anula en D (r ≥ 1, el vértice queda afuera): Σ es regular.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\,r^2}{2}$, entre 1 y 3 da $\frac{\sqrt{2}\,(9-1)}{2} = 4\sqrt{2}$.
Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{2}$.
Resultado: A(Σ) = $\mathbf{2\sqrt{2}\,\pi} \approx 8{,}89$.
Control: como gráfica, $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$, y la proyección es un cuarto de corona $1 \le r \le 3$, de área $\frac{\pi(9-1)}{4}$; por √2 da lo mismo ✓. Y con la fórmula del tronco: π (1 + 3) g con $g = \sqrt{((3-1)^2 + (3-1)^2)} = 2\sqrt{2}$ da $8\sqrt{2}\,\pi$, y la cuarta parte es $2\sqrt{2}\,\pi$ ✓.
Trampa: olvidarse del √2 y dar el área de la proyección, o integrar r desde 0 (eso agrega el pedacito de cono entre el vértice y z = 1, que no es parte de Σ).

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(y), y, z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
Σ: $z = 10 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 9$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con normal hacia arriba (saliente del sólido limitado por Σ y z = 1): Φ = 90π. Con la normal opuesta, −90π.

Planteo: Σ es el paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$, o sea entre z = 1 y z = 10. Es una superficie **abierta** (le falta el piso) y $\vec{f}$ tiene una φ desconocida, así que conviene cerrarla y usar Gauss.
Orientación elegida: normal de Σ hacia arriba (tercera componente positiva). En el gráfico: el paraboloide con flechas que salen hacia arriba y afuera, y la tapa z = 1 con flechas hacia abajo; las dos son salientes del sólido encerrado.
Cierre: $V = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 9,\ 1 \le z \le 10 - x^2 - y^2\}$ y la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 9$, con normal saliente (0, 0, −1).
Hipótesis de Gauss: V es acotado y su frontera Σ ∪ T es una superficie cerrada suave a trozos, orientada con la normal exterior; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ porque $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial\varphi(y)/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 0 + 1 + 1 = 2$.
Triple integral (cilíndricas): $\iiint_V 2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_1^{10 - r^2} 2r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^3 2r(9 - r^2)\, dr = 2\pi\,[9r^2 - r^4/2]_0^3 = 2\pi\,(81 - 81/2) = 81\pi$.
Flujo de la tapa: en T es $z = 1$ y $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -z = -1$, así que $\iint_T = -1 \cdot \text{área}(T) = -9\pi$.
Resultado: $\Phi_\Sigma = 81\pi - (-9\pi) =$ **90π** (con la normal hacia abajo sería -90π).
Control directo: con $\vec{r}(x, y) = (x, y, 10 - x^2 - y^2)$, $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ (hacia arriba) y $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x\varphi(y) + 2y^2 + 10 - x^2 - y^2$. El término $2x\varphi(y)$ es impar en x y el disco es simétrico respecto de $x = 0$: integra 0. También $\iint (y^2 - x^2)\, dA = 0$ por simetría. Queda $\iint 10\, dA = 10 \cdot 9\pi = 90\pi$ ✓.
Trampa: la tapa se resta con la normal saliente del sólido, que en $z = 1$ apunta hacia abajo. Si la tomás hacia arriba te queda $81\pi - 9\pi = 72\pi$, que está mal.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por (1, 1). Calcule $\int_C x\, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos (1, 1) y (0, b).

Respuesta: Γ: $y = x^2$; $b = 0$; $\int_C x\, ds = (5\sqrt{5} - 1)/12 \approx 0{,}848$.

Planteo: $\mathscr{F}$ son las curvas de nivel de $F(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ (elipses centradas en el origen). La curva ortogonal Γ corta a cada elipse en ángulo recto, o sea su tangente es paralela a ∇F (que es normal a la elipse que pasa por ese punto).

EDO de la familia: derivando implícitamente respecto de x (con $y = y(x)$): $\frac{x}{2} + yy' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2y}$. La constante c desaparece al derivar, que es lo que se busca.

EDO de las ortogonales: se cambia y' por $-1/y'$: $y' = \frac{2y}{x}$. (Lo mismo sale de pedir tangente $(1, y')$ paralela a $\nabla F = (x/2, y)$.)

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + K_1 \Rightarrow |y| = e^{K_1} x^2 \Rightarrow y = Kx^2$. Por (1, 1): $1 = K \cdot 1^2$, $K = 1$. Γ: **$y = x^2$**. Control: $y' = 2x = 2x^2/x = 2y/x$ ✓. En (1, 1) la tangente de Γ es (1, 2), paralela a $\nabla F(1, 1) = (1/2, 1)$ ✓.
El punto (0, b): tiene que estar sobre Γ, así que $b = 0^2 =$ **0**: el otro extremo es el origen. (La EDO es singular en $x = 0$, donde todas las elipses degeneran en el punto (0, 0), pero $y = x^2$ es C^1 ahí y el arco C es el tramo de parábola entre $x = 0$ y $x = 1$.)
Parametrización de C: $\vec{X}(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 1]$. $\vec{X}' = (1, 2x)$, $\|\vec{X}'\| = \sqrt{(1 + 4x^2)} \neq 0$: regular.
Cuenta: $\int_C x\, ds = \int_0^1 x\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$. Con $u = 1 + 4x^2$, $du = 8x\, dx$, la primitiva es $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$. Entre 0 y 1: $\frac{1}{12}(5^{3/2} - 1) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}$.
Resultado: $\int_C x\, ds =$ **$(5\sqrt{5} - 1)/12$** $\approx 0{,}848$. Da positiva porque $x \geq 0$ en todo C. La integral respecto de ds no depende del sentido en que se recorra C.
Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ después de eliminar c; si resolvés $y' = -x/(2y)$ volvés a la familia de elipses. Y en $\int f\, ds$ el parámetro va siempre de menor a mayor ($ds > 0$): integrar al revés "porque el arco se recorre de (1, 1) a (0, 0)" cambia el signo y está mal.

3/3/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ tal que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $C^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuaciones
$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \wedge z + y = 2$
sabiendo que $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x, x + z, y - 2)$. Indique claramente en un gráfico la orientación de C que eligió para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con C antihoraria vista desde arriba (normal (0, 1, 1)): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.
>
> **Planteo:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$.
>
> **La curva:** $x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$: un cilindro elíptico con centro (1, 0) y semiejes 2 (en x) y 1 (en y). Cortado con el plano $z = 2 - y$ da una elipse cerrada C; una parametrización es $\vec{X}(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
> **Parte de gradiente:** $\phi \in C^2$ y C es cerrada, así que $\oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \phi(\text{punto final}) - \phi(\text{punto inicial}) = \mathbf{0}$.
> **Superficie elegida:** Σ es el pedazo del plano $z = 2 - y$ que queda dentro del cilindro: $z = 2 - y$ con $(x, y) \in D = \{(x - 1)^2 + 4y^2 \le 4\}$. Su borde es exactamente C. Stokes vale para cualquier superficie regular con borde C; el plano es lo más cómodo (normal constante). Área de D: $\pi \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$.
> **Hipótesis de Stokes:** $\vec{g}$ tiene componentes C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es un trozo de plano, regular y orientable; C es una curva cerrada simple y suave.
> **Orientación elegida (el gráfico):** dibujá la elipse sobre el plano inclinado, más alta del lado $y < 0$ (pasa por (1, −1, 3)) y más baja del lado $y > 0$ (pasa por (1, 1, 1)), con flechas que giran en sentido antihorario mirando desde arriba (desde z positivo): de (3, 0, 2) a (1, 1, 1), a (−1, 0, 2), a (1, −1, 3). La parametrización de arriba la recorre así. Con la regla de la mano derecha, los dedos siguiendo ese giro dejan el pulgar hacia arriba: la normal compatible es $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 1, 1)$, que se integra en dx dy.
> **Flujo del rotor:** $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = (x, x + z, y - 2) \cdot (0, 1, 1) = x + z + y - 2$, y sobre Σ ($z = 2 - y$) queda $x + 2 - y + y - 2 = \mathbf{x}$. Con $x = 1 + 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ (jacobiano 2r), $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r\cos\theta)\,2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2 + \frac{4}{3} r^3\cos\theta]_0^1\,d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{4}{3}\cos\theta)\,d\theta = [\theta + \frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} =$ **2π**. (Atajo: es $\bar{x} \cdot$ área(D) $= 1 \cdot 2\pi$, porque el centro de la elipse tiene $x = 1$.)
> **Resultado:** con C antihoraria vista desde arriba, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + 2\pi = \mathbf{2\pi}$. Si la orientás al revés, da -2π.
> **Trampa:** el término z del rotor no es constante: hay que reemplazar $z = 2 - y$ antes de integrar, y recién ahí se simplifica todo a x. Detalle del enunciado: la divergencia de $(x, x + z, y - 2)$ es 1, y el rotor de un campo C^1 tiene divergencia nula, así que estrictamente ningún $\vec{g}$ tiene ese rotor y el resultado dependería de la superficie. Con la superficie natural, el trozo de plano, da 2π, que es lo que se espera.

Ejercicio 2. Calcule el volumen de la porción de la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio 2 que está contenida en el cilindro sólido definido por $x^2 + z^2 \le 1$.

> **Respuesta:** $V = 32\pi/3 - 4\sqrt{3}\,\pi = (4\pi/3)(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74$.
>
> **Planteo:** el sólido es $B \cap C$, con B: $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ (bola de radio 2) y C: $x^2 + z^2 \le 1$, un cilindro circular macizo de radio 1 **cuyo eje es el eje y** (la variable que falta en la ecuación es la del eje). $V = \iiint_{B\cap C} dV$.
> **Cómo es:** el cilindro atraviesa la bola a lo largo del eje y. La superficie cilíndrica corta a la esfera donde

$x^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o sea $y^2 = 3$: dos circunferencias de radio 1 en los planos $y = \pm\sqrt{3}$. Para $|y| \le \sqrt{3}$ el sólido es un tramo de cilindro; para $\sqrt{3} \le |y| \le 2$ son dos casquetes esféricos (ahí las tapas las pone la esfera). Es simétrico respecto del plano $y = 0$.

Coordenadas: cilíndricas con eje y: $x = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, $y = y$. Es el cambio cilíndrico de siempre con los papeles de las variables cambiados, así que $|\text{jacobiano}| = r$. Rangos: $x^2 + z^2 = r^2 \le 1$ da $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$; la bola da $r^2 + y^2 \le 4$, o sea $-\sqrt{(4 - r^2)} \le y \le \sqrt{(4 - r^2)}$ (con $r \le 1$ esa raíz vale al menos $\sqrt{3}$, siempre hay segmento).

Cuenta: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{(4-r^2)}}^{\sqrt{(4-r^2)}} r \, dy \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{(4 - r^2)} \, dr$. Primitiva de $2r\sqrt{(4 - r^2)}$: $-\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2}$, entre 0 y 1: $-\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 8) = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$. Entonces $V = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.

Resultado: $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74}$. Control de tamaño: el cilindro de radio 1 y largo 4 tiene $4\pi \approx 12{,}57$, y la bola le recorta las puntas: da un poco menos, razonable.

Control por rebanadas: cortando con planos $y = c$, la sección es el disco $x^2 + z^2 \le \text{mín}(1, 4 - c^2)$: área π si $|c| \le \sqrt{3}$, y $\pi(4 - c^2)$ si $\sqrt{3} \le |c| \le 2$. $V = 2[\int_0^{\sqrt{3}} \pi \, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \pi(4 - y^2) \, dy] = 2\pi[\sqrt{3} + (8 - \frac{8}{3}) - (4\sqrt{3} - \sqrt{3})] = 2\pi(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}) = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi$ ✓.

Trampa: usar cilíndricas de eje z ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$) cuando el cilindro tiene eje y; o poner y entre -2 y 2 para todo r, sin ver que la esfera recorta los extremos.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por

$z = x^2 \wedge x \ge 0 \wedge z \le 9 \wedge -1 \le y \le 1$.

Calcule la integral del campo escalar $h(x, y, z) = xy^2$ sobre Σ.

Respuesta: $\iint_\Sigma h \, dS = \frac{37\sqrt{37} - 1}{18} \approx 12{,}45$.

Planteo: $z = x^2$ es un cilindro parabólico (la parábola del plano xz trasladada paralela al eje y). $\iint_\Sigma h \, dS = \iint_D h(\vec{X}(x, y)) \, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| \, dx \, dy$.

Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, x^2)$.

Dominio D: $z \le 9$ es $x^2 \le 9$ y con $x \ge 0$ queda $0 \le x \le 3$; además $-1 \le y \le 1$. $D = [0, 3] \times [-1, 1]$.

Vector normal: $\vec{X}_x = (1, 0, 2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 0)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (-2x, 0, 1)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| = \sqrt{(1 + 4x^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Integrando: $h(\vec{X}(x, y)) = xy^2$, así que la integral es $\int_0^3 \int_{-1}^1 xy^2 \sqrt{(1 + 4x^2)} \, dy \, dx$, y como D es un rectángulo y el integrando es producto de una función de x por una de y, se separa.

Cuenta: integral en y: primitiva $\frac{y^3}{3}$, entre -1 y 1 da $\frac{2}{3}$. Integral en x: $\int_0^3 x\sqrt{(1 + 4x^2)} \, dx$, con $w = 1 + 4x^2$, $dw = 8x \, dx$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Producto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$.

Resultado: $\iint_\Sigma h \, dS = \mathbf{\frac{37\sqrt{37} - 1}{18}} \approx 12{,}45$.

Control (otra parametrización): con (z, y): $\vec{X}(z, y) = (\sqrt{z}, y, z)$, $0 \le z \le 9$, $-1 \le y \le 1$, norma $\sqrt{(1 + \frac{1}{4z})}$ y $h = \sqrt{z}\, y^2$; integrado numéricamente da 12,4479 ✓.

Trampa: y^2 es par, así que la integral en y no se anula por simetría (da 2/3). Y el cilindro no se proyecta sobre el plano xz: los parámetros son x e y.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(x)y^2, yx + \varphi(x)y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, un campo conservativo tal que $\vec{f}(0, 1) = (1, 1)$. Halle φ y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva Γ suave a trozos con punto inicial $(0, 1)$ y punto final $(0, 0)$.

> **Respuesta:** $\varphi(x) = (1 + e^{2x})/2$; $U = (y^2/4)(2x + e^{2x} + 1)$; circulación $= -1/2$.
>
> **Planteo:** "conservativo" quiere decir campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$. $\vec{f} = (P, Q)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $\varphi \in C^1$. Si $\vec{f}$ es de gradientes, $\vec{f} = \nabla U$ con U de clase C^2, y por Schwarz $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$: esa es la condición necesaria que da la ecuación para φ.
> **La EDO:** $P = \varphi(x)y^2$, $Q = yx + \varphi(x)y$. $P'_y = 2\varphi(x)y$; $Q'_x = y + \varphi'(x)y$. Igualando: $y(\varphi' + 1 - 2\varphi) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, $\boldsymbol{\varphi' = 2\varphi - 1}$.
> **Dato:** $\vec{f}(0, 1) = (\varphi(0)\cdot 1, 0 + \varphi(0)\cdot 1) = (\varphi(0), \varphi(0)) = (1, 1) \Rightarrow \varphi(0) = 1$.
> **EDO lineal:** $\varphi' - 2\varphi = -1$. Con factor integrante e^{-2x}: $(\varphi\, e^{-2x})' = -e^{-2x} \Rightarrow \varphi\, e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{2} + K \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2} + K\, e^{2x}$. Con $\varphi(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1 + e^{2x}}{2}}$.
> **Suficiencia:** con esa φ, $P'_y = Q'_x = y(1 + e^{2x})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (además lo confirma el potencial que sigue).
> **Potencial:** $U'_x = \frac{1 + e^{2x}}{2}y^2 \Rightarrow U = y^2\left(\frac{x}{2} + \frac{e^{2x}}{4}\right) + h(y)$. Derivando en y: $y\left(x + \frac{e^{2x}}{2}\right) + h'(y)$, que tiene que ser $Q = xy + \frac{y}{2} + \frac{y\, e^{2x}}{2} \Rightarrow h'(y) = \frac{y}{2}$, $h = \frac{y^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{y^2}{4}(2x + e^{2x} + 1) + K$.
> **Circulación:** como $\vec{f} = \nabla U$ en $\mathbb{R}^2$, la circulación sobre cualquier Γ suave a trozos de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ depende sólo de los extremos: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = U(0, 0) - U(0, 1) = 0 - \frac{1}{4}(0 + 1 + 1) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$.
>
> **Trampa:** no se conoce Γ y no hace falta: ese es el punto de que el campo sea de gradientes. El orden es U(final) − U(inicial); al revés da +1/2. Y ojo con P'_y: $\varphi(x)$ no depende de y, pero y^2 sí (sale $2\varphi y$).

Ejercicio 5. Sea Σ la frontera del cuerpo

$x^2 + y^2 \le z \le 4$

y sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1 del cual se sabe que $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z & 0 & x \\ -y^2 & -2x & 0 \\ 0 & 2 & 2z \end{pmatrix}$.

Calcule $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma$. Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con normal exterior (hacia afuera y abajo en el paraboloide, $(0, 0, 1)$ en la tapa $z = 4$): $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma = 64\pi$. Con la interior sería -64π.
>
> **Planteo:** el cuerpo es M: $x^2 + y^2 \le z \le 4$ (dentro del paraboloide, debajo del plano). $\Sigma = \partial M$ es cerrada y suave a trozos: el trozo de paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 4$ y la tapa $z = 4$, $x^2 + y^2 \le 4$.
> **Orientación (el gráfico):** elijo la normal **exterior**: en la tapa $\check{n} = (0, 0, 1)$, hacia arriba; en el paraboloide apunta hacia afuera del cuenco y hacia abajo, con la dirección de $(2x, 2y, -1)$.
> **Hipótesis de Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato), Σ es cerrada y orientada hacia afuera: $\oiint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.
> **Divergencia:** $\nabla\cdot\vec{f} = \partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y + \partial f_3/\partial z$, que son los elementos de la diagonal de $D\vec{f}$: $(2x + z) + (-2x) + 2z = \mathbf{3z}$.
> **Región:** en cilíndricas, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$ (el paraboloide llega a $z = 4$ en $r = 2$), $r^2 \le z \le 4$, jacobiano r.

Cuenta: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} 3z \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$. En z, primitiva $\frac{3}{2}z^2$: $\frac{3}{2}(16 - r^4)\, r$. En r: $\int_0^{2} (24r - \frac{3}{2}r^5)\, dr = [12r^2 - \frac{r^6}{4}]_0^{2} = 48 - 16 = 32$. En θ: $2\pi \cdot 32 = 64\pi$.

Resultado: con normal exterior, $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \check{n} \, d\sigma = 64\pi$ (con la interior, -64π).

Detalle: de $\vec{Df}$ sólo se usa la diagonal. (Si mirás las derivadas cruzadas de f_2, $\partial/\partial y(-y^2) = -2y$ no coincide con $\partial/\partial x(-2x) = -2$, así que la matriz no es exactamente la jacobiana de ningún campo; para este cálculo no importa.)

Trampa: la divergencia es la traza ($\partial f_i/\partial x_i$), no la suma de una fila ni de una columna. Y el gráfico con la orientación es parte de la respuesta: el signo depende de él.

24/2/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y \le z \le 9 + 2y - x^2 - y^2\}$.

> **Respuesta:** $V = 81\pi/2$ ($\approx 127{,}23$).
>
> **Planteo:** H está entre el plano $z = 2y$ (piso) y la superficie $z = 9 + 2y - x^2 - y^2$ (techo). $V = \iint_D$ (techo − piso) dxdy, con D la proyección en el plano xy.
> **Cómo es:** el techo es $z = 10 - x^2 - (y - 1)^2$, un paraboloide que abre hacia abajo con vértice en (0, 1, 10). Techo − piso $= 9 - x^2 - y^2$, que es ≥ 0 si y sólo si $x^2 + y^2 \le 9$. Así que se cortan sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (la curva intersección es una elipse en el plano $z = 2y$) y **D es el disco de centro el origen y radio 3**, aunque el vértice del paraboloide no esté sobre el eje z. Afuera del disco el plano queda por encima y no hay sólido.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$, $2r\operatorname{sen}\theta \le z \le 9 + 2r\operatorname{sen}\theta - r^2$; la integral en z da la altura $9 - r^2$ (los $2r\operatorname{sen}\theta$ se cancelan).
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva: $\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 3: $\frac{81}{4}$. Por 2π.
>
> **Resultado:** $\mathbf{V = \frac{81\pi}{2}} \approx 127{,}23$.
>
> **Control (cartesianas):** $V = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{(9 - x^2)}}^{\sqrt{(9 - x^2)}} (9 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$. Primero en y: $2(9 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2} = \frac{4}{3}(9 - x^2)^{3/2}$; con $x = 3\operatorname{sen} t$: $108 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = 108 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Trampa:** centrar el disco en (0, 1) porque ahí está el vértice del paraboloide: la proyección sale de techo − piso, no del techo solo.

Ejercicio 2. Sea Γ la porción de la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (0, 2) y está contenida en el semiplano $y \ge 0$; sea D la región limitada por Γ y el eje x.
Calcule $\iint_D y\, dxdy$.

> **Respuesta:** Γ: mitad superior de $4x^2 + y^2 = 4$. $D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\sqrt{(1 - x^2)}\}$. $\iint_D y\, dxdy = 8/3$.
>
> **Línea de campo (EDO):** $x' = y$, $y' = -4x$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{y}$. Separando: $y\, dy = -4x\, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -2x^2 + c \Rightarrow 4x^2 + y^2 = k$. Por (0, 2): $k = 4$. La línea es la elipse $\mathbf{4x^2 + y^2 = 4}$, o sea $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Control: $\frac{d}{dt}(4x^2 + y^2) = 8x \cdot y + 2y \cdot (-4x) = 0$ ✓.
> **La región:** Γ es la mitad de arriba de esa elipse parada (semieje 1 en x, 2 en y): un arco que sale de (−1, 0), sube hasta (0, 2) y baja a (1, 0). Con el segmento del eje x entre −1 y 1 encierra la media elipse **$D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\sqrt{(1 - x^2)}\}$** (el techo sale de despejar $y \ge 0$ en $4x^2 + y^2 = 4$).
> **Cuenta (dy dx):** $\iint_D y\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{(1 - x^2)}} dx = \int_{-1}^{1} 2(1 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$.
> **Resultado:** $\iint_D y\, dxdy = \mathbf{8/3}$.
> **Control con polares elípticas:** $x = r\cos\theta$, $y = 2r\operatorname{sen}\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$ ($y \ge 0$); jacobiano det

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$. $\int_0^{\pi}\int_0^{1} 2r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot 2r\,dr\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{4r^3}{3}\right]_0^{1} = 2\cdot\frac{4}{3} = 8/3$ ✓.

Trampa: el semieje de 2 está sobre el eje y (por eso pasa por (0, 2)), no sobre el x; cruzarlos da $4x^2 + y^2$ con los papeles cambiados y otro resultado. En polares, θ llega sólo hasta π.

Ejercicio 3. Considere la curva C: { $x + y + z^2 = 2$; $x - y + z^2 = 0$; $x \geq 0$ }.

1. Halle una parametrización de C.
2. Calcule la masa de un alambre con la forma de C sabiendo que la densidad de masa lineal es $\delta(x, y, z) = \sqrt{(4z^2 + 1)}$.

Respuesta: 1) $\vec{X}(t) = (1 - t^2, 1, t)$, $t \in [-1, 1]$. 2) M = 14/3.

1) Parametrización: sumando las dos ecuaciones, $2x + 2z^2 = 2$, o sea $x = 1 - z^2$. Restándolas, $2y = 2$, o sea $y = 1$. Al revés, si $x = 1 - z^2$ e $y = 1$, las dos ecuaciones se cumplen ($1 - z^2 + 1 + z^2 = 2$ y $1 - z^2 - 1 + z^2 = 0$): el sistema equivale a $\{x = 1 - z^2, y = 1\}$. Tomando $z = t$: $\vec{\mathbf{X}}\mathbf{(t) = (1 - t^2, 1, t)}$. La condición $x \geq 0$ es $1 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{t \in [-1, 1]}$. C es un arco de parábola en el plano $y = 1$, de (0, 1, −1) a (0, 1, 1) pasando por (1, 1, 0).

Regularidad: $\vec{X}$ es C^1, inyectiva ($z = t$) y $\vec{X}'(t) = (-2t, 0, 1)$ nunca se anula (tercera componente 1). $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4t^2 + 1)}$.

2) Planteo: $M = \int_C \delta\,ds = \int_{-1}^{1} \delta(\vec{X}(t))\,\|\vec{X}'(t)\|\,dt$. Sobre C es $z = t$, así que $\delta(\vec{X}(t)) = \sqrt{(4t^2 + 1)}$.

Cuenta: $\delta(\vec{X}(t))\,\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4t^2 + 1)}\cdot\sqrt{(4t^2 + 1)} = 4t^2 + 1$. Primitiva $\frac{4t^3}{3} + t$: $M = \left[\frac{4t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1} = (4/3 + 1) - (-4/3 - 1) = 14/3$.

Resultado: M = **14/3**.

Trampa: el parámetro natural es z, porque x e y quedan funciones de z. Si parametrizás con $x = t$ tenés que partir la curva en dos ($z = \pm\sqrt{(1 - t)}$) y la rapidez explota en $x = 1$. Y la densidad se evalúa en la curva: $\delta = \sqrt{(4z^2 + 1)}$ con $z = t$, que es exactamente $\|\vec{X}'\|$.

Ejercicio 4. Sea Γ el borde del triángulo de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 1). Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + y, xz - x, e^{z^2} + xy)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con Γ recorrida A → B → C → A (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = -1$. En el otro sentido, 1.

Rotor: $\vec{f} = (P, Q, R) = (yz + y, xz - x, e^{z^2} + xy)$, C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y e^{z^2}). $\mathrm{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, (z - 1) - (z + 1)) = \mathbf{(0, 0, -2)}$.

Superficie elegida: el propio triángulo T de vértices A, B, C, que está en el plano $x + y + z = 1$: $z = 1 - x - y$ con $(x, y) \in D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, área 1/2. Su borde es Γ; es la superficie más simple con ese borde.

Hipótesis de Stokes: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, T es un triángulo plano (regular, orientable) y Γ es una poligonal cerrada simple, suave a trozos.

Orientación elegida (el gráfico): A → B → C → A. Proyectado: (1, 0) → (0, 1) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Regla de la mano derecha: los dedos siguen ese giro y el pulgar apunta a z positivo, normal $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.

Flujo: $(\mathrm{rot}\,\vec{f})\cdot\vec{n} = 0 + 0 - 2 = -2$. $\iint_D (-2)\,dx\,dy = \int_0^{1}\int_0^{1-x} (-2)\,dy\,dx = \int_0^{1} -2(1 - x)\,dx = [-2x + x^2]_0^{1} = \mathbf{-1}$.

Resultado: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \mathbf{-1}$ recorriendo A → B → C → A; 1 en el sentido contrario.

> **Trampa:** e^{z^2} no tiene primitiva elemental, y eso asusta en la cuenta directa; con Stokes no molesta porque sólo depende de z y no entra en el rotor. Cuidado con el signo en $Q'_x - P'_y = (z - 1) - (z + 1)$.

Ejercicio 5. Calcule el flujo del campo $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a través de la porción de cilindro
Σ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $0 \le z \le 4$,
sabiendo que $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = z$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (x, y, 2)$ y $\vec{f}(x, y, 4) = (2x + y, 3x - y, 0)$. Indique en un gráfico la orientación de Σ considerada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con normal saliente (alejándose del eje $x = 0$, $y = 2$): $\Phi = 40\pi$. Con la entrante, -40π.
>
> **Planteo:** $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$: cilindro circular de radio 2 con eje la recta $x = 0$, $y = 2$, entre $z = 0$ y $z = 4$. Es abierto y de $\vec{f}$ sólo conocemos la divergencia y sus valores en los planos $z = 0$ y $z = 4$, justo donde van las tapas: cerramos y usamos Gauss.
> **Orientación elegida:** normal saliente del cilindro, $\hat{n} = (x, y - 2, 0)/2$. En el gráfico: flechas horizontales que se alejan del eje.
> **Cierre:** $V = \{x^2 + (y - 2)^2 \le 4,\ 0 \le z \le 4\}$, $\partial V = \Sigma \cup T_0 \cup T_4$, con T_0 el disco D en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$ y T_4 el disco en $z = 4$ con normal $(0, 0, 1)$ (las dos salientes).
> **Hipótesis:** $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ (dato); V acotado con frontera cerrada suave a trozos, normal exterior.
> **Triple integral:** $\iiint_V z\, dV = \iint_D \int_0^4 z\, dz\, dA = \text{área}(D) \cdot [z^2/2]_0^4 = 4\pi \cdot 8 = 32\pi$.
> **Tapas:** en T_4, $\vec{f} \cdot (0, 0, 1)$ es la tercera componente de $\vec{f}(x, y, 4) = (2x + y, 3x - y, 0)$, o sea 0: flujo 0. En T_0, $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -2$ (tercera componente de $(x, y, 2)$), flujo $-2 \cdot 4\pi = -8\pi$.
> **Resultado:** $\Phi_\Sigma = 32\pi - 0 - (-8\pi) =$ **40π** con normal saliente.
> **Trampa:** como las normales de las tapas son $\pm k$, de $\vec{f}$ ahí sólo importa la tercera componente: $(2x + y, 3x - y)$ y (x, y) no entran en la cuenta. Y la tapa de abajo va con normal $-k$, por eso su -2 termina sumando 8π.

10/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el valor de

$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, donde D: $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $y \ge |x|$.

> **Respuesta:** $\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \pi - 2 \approx 1{,}142$.
>
> **La región (dibujo):** $1 \le x^2+y^2 \le 9$ es la corona entre las circunferencias de radio 1 y 3 centradas en el origen. $y \ge |x|$ es lo que está por encima de las dos bisectrices $y = x$ e $y = -x$: una cuña de 90° abierta hacia arriba, con el eje y positivo en el medio. D es el pedazo de corona dentro de esa cuña (un cuarto de corona, el de arriba).
> **Cambio a polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J| = r$. La corona es $1 \le r \le 3$; $y \ge |x|$ es $\text{sen}\,\theta \ge |\cos\theta|$, que pasa para $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$. $D^* = [1,3] \times [\pi/4, 3\pi/4]$. El integrando queda $\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$; está bien definido y es continuo en D porque ahí $r \ge 1$ (el origen, donde no está definido, queda afuera).
> **Cuenta:** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^3 \cos^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_1^3 r\,dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta\right)$. En r: $\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9-1}{2} = 4$. En θ, con $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$: $\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
> **Resultado:** $4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\pi - 2} \approx 1{,}142$.
> **Control:** llamando I_x a esta integral e I_y a la de $\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $I_x + I_y$ = área de D = $\frac{1}{4}\pi(9-1) = 2\pi$, e $I_y - I_x = \int\int(-\cos 2\theta)\,r\,dr\,d\theta = 4\left[-\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 4$. Entonces $I_x = \frac{2\pi - 4}{2} = \pi - 2$ ✓. Tiene sentido que sea menos de la mitad del área: en esa cuña la región está cerca del eje y, donde x es chico.
> **Trampa:** el integrando se simplifica a $\cos^2\theta$, pero el jacobiano r sigue estando; sin él darías $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. Y ojo con $\text{sen}\,2\theta$ en $3\pi/4$: vale $\text{sen}(3\pi/2) = -1$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas planas de ecuación $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$. Sea Γ la curva de la familia ortogonal a $\mathcal{F}$ que pasa por el punto (0, 2). Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (x^4 - y,\ y^3 - 2x)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida.

> **Respuesta:** Γ: $x^2/16 + y^2/4 = 1$. Orientación elegida antihoraria: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = -8\pi$ (horaria: 8π).
>
> **EDO de la familia:** $y = Cx^4$; para $x \ne 0$, $C = \frac{y}{x^4}$ y $y' = 4Cx^3 = \boldsymbol{\frac{4y}{x}}$.
> **Familia ortogonal:** $y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow 4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \boldsymbol{x^2 + 4y^2 = K}$. Por (0, 2): K = 16, o sea Γ: $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1}$, elipse cerrada de semiejes 4 y 2. Control: la normal a la elipse, $(2x, 8y) \parallel (x, 4y)$, es paralela a la tangente de $y = Cx^4$, $(1, 4y/x) \parallel (x, 4y)$: son ortogonales ✓.
> **Orientación elegida (el gráfico): antihoraria**, por ejemplo $r(t) = (4\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$; en (0, 2) la flecha apunta hacia la izquierda.
> **Hipótesis de Green:** $P = x^4 - y$, $Q = y^3 - 2x$, C^1 en $\mathbb{R}^2$; D = $\{x^2/16 + y^2/4 \le 1\}$ es regular y Γ es su borde,

cerrado, simple, C^1, orientado positivamente. $Q'_x = -2$, $P'_y = -1$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -1}$. $\oint_\Gamma f \cdot ds = -\text{área}(D) = -\pi \cdot 4 \cdot 2 = -8\pi$.
Cara directa: $x^4\,dx$ e $y^3\,dy$ son exactas y no aportan en una curva cerrada. Queda $\oint -y\,dx - 2x\,dy = \int_0^{2\pi} [-2 \operatorname{sen} t\,(-4 \operatorname{sen} t) - 8 \cos t\,(2 \cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi} (8 \operatorname{sen}^2 t - 16 \cos^2 t)\,dt = 8\pi - 16\pi = -8\pi$ ✓.
Resultado: antihoraria, $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = \mathbf{-8\pi}$; si en el gráfico elegís horaria, **8π**.
Trampa: el enunciado no fija el sentido: el resultado sólo vale junto con la flecha dibujada.

Ejercicio 3. Calcule el área de la porción de superficie
Σ: $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 \le 2y$, $z \ge 0$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \sqrt{2}\,\pi \approx 4{,}44$.

Planteo: $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ con $z \ge 0$ es la hoja de arriba del cono, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. La condición $x^2 + y^2 \le 2y$ es $x^2 + (y - 1)^2 \le 1$: el disco de centro $(0, 1)$ y radio 1, que pasa por el origen. Σ es la parte del cono que está encima de ese disco. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\,dr\,d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$.
Dominio D: $x^2 + y^2 \le 2y$ en polares es $r^2 \le 2r \operatorname{sen}\theta$, o sea $r \le 2 \operatorname{sen}\theta$. Eso exige $\operatorname{sen}\theta \ge 0$, entonces $\theta \in [0, \pi]$. $D = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2 \operatorname{sen}\theta\}$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\,r$. Se anula sólo en el vértice ($r = 0$), que es un punto del borde: no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen}\theta} \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{2}$, entre 0 y $2\operatorname{sen}\theta$ da $2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\theta$.
Integral en θ: $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$, primitiva $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$, entre 0 y π da $\dfrac{\pi}{2}$. $A = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\sqrt{2}\,\pi} \approx 4{,}44$.
Control (como gráfica): $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ tiene $z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$, así que $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$ en todo punto (salvo el vértice). $A = \sqrt{2} \cdot$ área del disco $= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2$ ✓.
Trampa: el disco no está centrado en el origen. θ va de 0 a π (no de 0 a 2π) y r hasta $2\operatorname{sen}\theta$; con $\theta \in [0, 2\pi]$ la cuenta da $2\sqrt{2}\,\pi$, el doble.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva $\vec{X} = (4 - t^2, t^3 + 1, 1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, contenida en el primer octante. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y + 4x^3, x, 2z)$ a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [-1, 2]$, de $A = (3, 0, 2)$ a $B = (0, 9, 5)$. Con $U = xy + x^4 + z^2$, la circulación es $U(B) - U(A) = 25 - 85 = -60$.

El arco: primer octante es $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $x = 4 - t^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 2$; $y = t^3 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow t^3 \ge -1 \Leftrightarrow t \ge -1$; $z = 1 + t^2 > 0$ siempre. Las tres juntas: **$-1 \le t \le 2$**. Extremos: $\vec{X}(-1) = (3, 0, 2)$ y $\vec{X}(2) = (0, 9, 5)$. Según la parametrización, Γ va de $A = (3, 0, 2)$ a $B = (0, 9, 5)$.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (y + 4x^3, x, 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0$; $Q'_x - P'_y = 1 - 1 = 0$. $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
Potencial: $U'_x = y + 4x^3 \Rightarrow U = xy + x^4 + h(y, z)$. $U'_y = x + h'_y = x \Rightarrow h = k(z)$. $U'_z = k'(z) = 2z \Rightarrow k = z^2$. **$U = xy + x^4 + z^2$**.
Circulación: $U(B) = 0 + 0 + 25 = 25$; $U(A) = 0 + 81 + 4 = 85$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = 25 - 85 = \mathbf{-60}$.
Trampa: el recorte lo deciden dos condiciones distintas: $x \ge 0$ corta arriba ($t \le 2$) y $y \ge 0$ corta abajo ($t \ge -1$). Quedarse sólo con $|t| \le 2$ mete un pedazo con $y < 0$.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y\varphi(z), x\varphi(z), 1 + z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie

$\Sigma: z + x^2 + y^2 = 9, z \geq 0$

orientada de modo que las normales tengan tercera componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = 99\pi/2$ (normales con tercera componente positiva).
>
> **Planteo:** $\Sigma: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$, es el paraboloide sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 9$; es abierta. Con φ desconocida conviene cerrarla con la tapa $T: z = 0, x^2 + y^2 \leq 9$, y usar Gauss en $V = \{0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$.
> **Orientación:** las normales de Σ con tercera componente positiva apuntan hacia arriba, o sea son salientes de V. En T la saliente es $(0, 0, -1)$.
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$); V es acotado y $\partial V = \Sigma \cup T$ es cerrada y suave a trozos.
> **Divergencia:** $\partial(y\varphi(z))/\partial x + \partial(x\varphi(z))/\partial y + \partial(1 + z)/\partial z = 0 + 0 + 1 = 1$.
> **Triple:** $\text{vol}(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\, [9r^2/2 - r^4/4]_0^3 = 2\pi \cdot 81/4 = 81\pi/2$.
> **Tapa:** $\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = -(1 + 0) = -1$, flujo $-1 \cdot 9\pi = -9\pi$.
> **Resultado:** $\Phi_\Sigma = 81\pi/2 - (-9\pi) = \mathbf{99\pi/2}$.
> **Control directo:** $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ (hacia arriba), $\vec{f} \cdot \vec{N} = 4xy\,\varphi(9 - x^2 - y^2) + 10 - x^2 - y^2$. El primer término es impar en x y se anula en el disco; $\iint (10 - r^2)\, dA = 90\pi - 81\pi/2 = 99\pi/2$ ✓.
> **Trampa:** en la tapa φ no aparece (la normal es $\pm k$ y sólo cuenta la tercera componente, $1 + z$), así que no hace falta conocerla. Ojo con el signo: la tapa de abajo resta -9π, o sea suma 9π.

16/12/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa plana que ocupa la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al origen.

> **Respuesta:** $M = \dfrac{7\pi k}{3} \approx 7{,}33k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la densidad es proporcional a la distancia al origen: $\delta(x, y) = k\sqrt{(x^2 + y^2)}$, con $k > 0$. La masa es $M = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$.
> **La región (dibujo):** $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ es la corona entre las circunferencias de radio 1 y radio 2 centradas en el origen. La recta $y = x$ pasa por el origen y parte la corona en dos mitades iguales; $y \ge x$ es el semiplano que queda arriba y a la izquierda de esa recta. D es la media corona de ese lado: arranca en la semirrecta $y = x$ con $x > 0$ (dirección $\theta = \pi/4$), gira en sentido antihorario pasando por el eje y positivo y por el eje x negativo, y termina en la semirrecta $y = x$ con $x < 0$ ($\theta = 5\pi/4$). Control: $(0, 3/2)$ cumple $y \ge x$ y tiene $\theta = \pi/2$, que está en ese intervalo.
> **Cambio a polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $|J| = r$. La corona es $1 \le r \le 2$. La condición $y \ge x$ es $r(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \ge 0$, o sea $\operatorname{sen}\theta \ge \cos\theta$, que pasa para $\theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$. La región transformada es el rectángulo $D^* = [1, 2] \times [\pi/4, 5\pi/4]$ y la densidad queda $\delta = kr$.
> **Cuenta:** $M = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^2 kr \cdot r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{kr^3}{3}$, entre 1 y 2 da $\dfrac{k(8 - 1)}{3} = \dfrac{7k}{3}$.
> Integral en θ: primitiva $\dfrac{7k}{3}\theta$, entre $\pi/4$ y $5\pi/4$ da $\dfrac{7k}{3} \cdot \pi$.
> **Resultado:** $M = \boldsymbol{\dfrac{7\pi k}{3}} \approx 7{,}33k$.
> **Control:** la densidad sólo depende de r y D es exactamente media corona, así que M tiene que ser la mitad de la masa de la corona entera: $\dfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 kr^2\, dr\, d\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \dfrac{7k}{3} = \dfrac{7\pi k}{3}$ ✓.
> **Trampa:** el jacobiano r se suma a la densidad r, y el integrando queda kr^2; si te lo olvidás da $\dfrac{3\pi k}{2}$. Y $y \ge x$ no es el primer cuadrante: el ángulo recorre π, de $\pi/4$ a $5\pi/4$.

Ejercicio 2. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xy, -y^2 + z, z)$ a través de la frontera del cuerpo
$H: x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2 - x,\ y \ge 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 4\pi$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** la frontera de H es cerrada; con la normal exterior (la elijo así, ver gráfico) el flujo sale por Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (2xy, -y^2 + z, z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado, su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 0$, techo inclinado $z = 2 - x$, plano $y = 0$ y la pared cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ con $y \ge 0$. Orientación: normal exterior a H.
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(2xy) + \partial_y(-y^2 + z) + \partial_z(z) = 2y - 2y + 1 = 1$. El flujo saliente es el volumen de H.
> **La región:** la sombra es el semidisco $D = \{x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\} = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\}$; sobre él z va de 0 a $2 - x$, que es ≥ 0 porque $x \le 2$ en D (el plano toca el piso sólo en el punto $(2, 0, 0)$).

Cuenta: $\Phi = \iint_D (2 - x)\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^2 (2 - r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Interior: $\left[r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3}\cos\theta$.

Exterior: $\left[4\theta - \frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 4\pi}$ saliente (-4π si se orienta hacia adentro).

Gráfico: medio cilindro (del lado $y \geq 0$) apoyado en $z = 0$ y cortado por el plano inclinado $z = 2 - x$, que es alto ($z = 4$) en $x = -2$ y baja a 0 en $x = 2$; flechas saliendo: hacia $(0, 0, -1)$ en el piso, hacia $(0, -1, 0)$ en la cara $y = 0$, radiales hacia afuera en la pared y hacia $(1, 0, 1)$ en el techo.

Control por caras: piso (normal $(0, 0, -1)$): $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -z = 0$, flujo 0. Techo (normal $(1, 0, 1)$, sale de $x + z = 2$): $\vec{f}\cdot(1, 0, 1) = 2xy + 2 - x$; $2xy$ es impar en x sobre D, queda $\iint(2 - x) = 4\pi$. Cara $y = 0$ (normal $(0, -1, 0)$): $-(-y^2 + z) = -z$, flujo $-\int_{-2}^{2} \frac{(2 - x)^2}{2}\, dx = -\frac{32}{3}$. Pared cilíndrica: $\frac{32}{3}$. Suma: 4π ✓.

Trampa: para la cara $y = 0$ la normal exterior es $(0, -1, 0)$, no $(0, 1, 0)$; si se toma al revés, ese $-32/3$ cambia de signo y no cierra.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}\, ds$, donde C es la curva

C: $x^2 + y^2 = 4$, $2x - z = 0$, $y \geq 0$.

Respuesta: $\int_C ds/\sqrt{(4 + 4y^2)} = \pi$.

Planteo: es una integral de línea de campo escalar: $\int_C f\, ds = \int f(\vec{X}(t))\, \|\vec{X}'(t)\|\, dt$, con $\vec{X}$ una parametrización regular de C y $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}$.

Parametrización: C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2x$. Sobre el cilindro, $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$; el plano da $z = 2x = 4\cos t$. Queda $\vec{X}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4\cos t)$. La condición $y \geq 0$ es $\operatorname{sen} t \geq 0$, o sea $t \in [0, \pi]$: C es media elipse que va de $(2, 0, 4)$ a $(-2, 0, -4)$.

Rapidez: $\vec{X}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -4\operatorname{sen} t)$, $\|\vec{X}'(t)\|^2 = 4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 16\operatorname{sen}^2 t = 4 + 16\operatorname{sen}^2 t$. Como sobre la curva $y = 2\operatorname{sen} t$, resulta $4y^2 = 16\operatorname{sen}^2 t$ y entonces $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4 + 4y^2)}$. Además $\|\vec{X}'(t)\| \geq 2 > 0$: parametrización regular, inyectiva en $[0, \pi]$.

Integrando: f es continua sobre C ($4 + 4y^2 \geq 4 > 0$) y $f(\vec{X}(t)) = \frac{1}{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}}$, así que $f(\vec{X}(t))\, \|\vec{X}'(t)\| = \frac{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}}{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}} = 1$.

Cuenta: $\int_C f\, ds = \int_0^{\pi} 1\, dt = t\,\big|_0^{\pi} = \pi$.

Resultado: $\int_C \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}\, ds = \boldsymbol{\pi}$.

Trampa: ds no es dt: hay que multiplicar por $\|\vec{X}'(t)\|$, y ese factor es justamente el que cancela el denominador. Si te olvidás la componente z de $\vec{X}'$ (el $-4\operatorname{sen} t$ que viene de $z = 4\cos t$), no se cancela nada y la integral no sale con primitiva elemental.

Ejercicio 4. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con

Σ_1: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y Σ_2: $2x + z = 4$.

Calcule la circulación de $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ a lo largo de C, siendo ϕ un campo escalar de clase C^2 y $\vec{g}(x, y, z) = (x + y, y^2 - 2x, z + y)$. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo C en sentido antihorario visto desde arriba: circulación -4π. En sentido horario, 4π.

Planteo: $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es la intersección del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (completando cuadrados en $x^2 - 4x + y^2 = 0$) con el plano $z = 4 - 2x$: una elipse cerrada. Como ϕ no se conoce, teorema del rotor.
La parte $\nabla\phi$: $\phi \in C^2 \Rightarrow \text{rot}(\nabla\phi) = \vec{0}$ (Schwarz), así que $\text{rot}\,\vec{f} = \text{rot}\,\vec{g}$. (Equivalente: la circulación de un gradiente en una curva cerrada es 0.)
Superficie elegida: la porción de Σ_2 que encierra C: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 4 - 2x)$, $(x, y) \in D = \{(x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\phi \in C^2 \Rightarrow \nabla\phi \in C^1$; $\vec{g}$ polinómico); Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
Sentido elegido (lo que va en el gráfico): antihorario visto desde arriba: $x = 2 + 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 4 - 2x = -4\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. En el dibujo: el cilindro, el plano inclinado que baja hacia x positivo, la elipse con flechas antihorarias mirada desde arriba y la normal (2, 0, 1) hacia arriba.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (2, 0, 1)$.
Rotor: $\vec{g} = (x + y, y^2 - 2x, z + y)$: $\text{rot}\,\vec{g} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (1 - 0, 0 - 0, -2 - 1) = (1, 0, -3)$.
Flujo del rotor: $\iint_D (1, 0, -3) \cdot (2, 0, 1)\,dxdy = \iint_D (2 - 3)\,dxdy = -\text{Área}(D) = -4\pi$.
Resultado: circulación = **-4π** en sentido antihorario visto desde arriba (4π en el otro).
Control (circulación directa): $x\,dx$, y^2dy, $z\,dz$ son exactas; queda $\oint y\,dx - 2x\,dy + y\,dz$, y sobre C es $dz = -2dx$: $\oint -y\,dx - 2x\,dy = \int_0^{2\pi} [(-2\,\text{sen}\,t)(-2\,\text{sen}\,t) - 2(2 + 2\cos t)(2\cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi} (4\,\text{sen}^2 t - 8\cos t - 8\cos^2 t)\,dt = 4\pi - 8\pi = -4\pi$ ✓.
Trampa: olvidarse de la primera componente del rotor: con la normal (2, 0, 1) el 1 de $\text{rot}\,\vec{g}$ aporta 2, y si se mira sólo la tercera componente sale -12π.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \mu(x)(y^2 - 1, xy)$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\vec{f}(1, 1) = (0, 2)$.
a) Halle μ para que f sea un campo de gradientes.
b) Encuentre todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: a) $\mu(x) = 2x$. b) $\vec{f} = (2x(y^2 - 1), 2x^2y)$; potenciales $U(x, y) = x^2y^2 - x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$.
a) Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (\mu(x)(y^2 - 1), \mu(x)xy)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $\mu \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.
Condición necesaria: $P'_y = 2y\mu$; $Q'_x = y(\mu + x\mu')$ (regla del producto). Igualando: $y(x\mu' - \mu) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, **$x\,\mu'(x) = \mu(x)$**.
Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(\mu/x)' = \dfrac{x\mu' - \mu}{x^2} = 0$, así que μ/x es constante en cada semirrecta: $\mu(x) = c_1 x$ para $x > 0$ y $\mu(x) = c_2 x$ para $x < 0$ (y $\mu(0) = 0$ por continuidad). Como μ es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$\mu(x) = cx$** en todo $\mathbb{R}$.
Dato: $\vec{f}(1, 1) = \mu(1) \cdot (1 - 1, 1 \cdot 1) = (0, \mu(1)) = (0, 2) \Rightarrow \mu(1) = 2 \Rightarrow c = 2$. **$\mu(x) = 2x$**.
Suficiencia: $\vec{f} = (2x(y^2 - 1), 2x^2y)$ cumple $P'_y = 4xy = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo: $\vec{f}$ es de gradientes.
b) Potenciales: $U'_y = 2x^2y \Rightarrow U = x^2y^2 + k(x)$. Derivando en x: $2xy^2 + k'(x) = 2xy^2 - 2x \Rightarrow k' = -2x$, $k = -x^2 + K$. Resultado: **$U(x, y) = x^2y^2 - x^2 + K$**, $K \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ es conexo, así que todos los potenciales difieren en una constante).
Trampa: el dato en $x = 1$ sólo fija la constante para $x > 0$; que $\mu = 2x$ también para $x < 0$ sale de que μ es derivable en 0. Y en b) falta la K si no la ponés.

6/12/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 8 - x^2 - y^2,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = \mathbf{4\pi k} \approx 12{,}57k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xy es $|z|$, y en H vale $z \geq 0$, así que $\delta = kz$ con $k > 0$ y $M = \iiint_H kz\, dV$.
> **El sólido:** $z^2 \geq x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ es $z \geq r$ ($r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$): adentro del cono de 45° con eje z. $z^2 \leq 8 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$: adentro de la esfera de centro en el origen y radio $2\sqrt{2}$. Es un cucurucho de helado, y $y \geq 0$ se queda con la mitad (la que está del lado de y positivo del plano xz).
> **Dónde se cortan:** $r^2 = 8 - r^2 \iff r^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura $z = 2$. La sombra de H en el plano xy es el semidisco $x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0$.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta,\ z = z,\ |J| = r$. $y \geq 0$ es sen $\theta \geq 0$: $\theta \in [0, \pi]$. $r \in [0, 2]$. Para cada r, z va del cono r a la esfera $\sqrt{(8 - r^2)}$.
> **Cuenta:** $M = k \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_r^{\sqrt{(8 - r^2)}} z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{8 - r^2 - r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 (4r - r^3)\, dr$, primitiva $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. En θ: por π.
> **Resultado:** $M = \mathbf{4\pi k} \approx 12{,}57k$.
> **Control en esféricas** ($|J| = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$, integrando $kz|J| = k\rho^3\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi$): el cono es $\varphi = \pi/4$, la esfera $\rho \leq 2\sqrt{2}$ y $\theta \in [0, \pi]$. $k \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^4}{4} = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 4\pi k$ ✓.
> **Trampa:** el jacobiano r se suma a la densidad z, y la integral en z es de z (primitiva $z^2/2$), no de 1. Y $y \geq 0$ es medio cuerpo: $\theta \in [0, \pi]$; con θ hasta 2π te da $8\pi k$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + 8y^2 + z = 8,\ x^2 - z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y - 2e^{2x-z},\ x,\ e^{2x-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (2, 0, 4) a (0, 1, 0) (antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8$ (con la orientación opuesta, 8).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (y - 2e^{2x-z},\ x,\ e^{2x-z} + z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. rot $\vec{f} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (0 - 0,\ 2e^{2x-z} - 2e^{2x-z},\ 1 - 1) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_y = x$, $\phi = xy + h(x, z)$. $\phi'_x = y + h'_x = y - 2e^{2x-z} \Rightarrow h = -e^{2x-z} + k(z)$. $\phi'_z = e^{2x-z} + k'(z) = e^{2x-z} + z \Rightarrow k = z^2/2$. $\phi(x, y, z) = xy - e^{2x-z} + z^2/2$.
> **La curva:** reemplazando $z = x^2$ en la primera: $2x^2 + 8y^2 = 8 \iff x^2/4 + y^2 = 1$. Con $x, y \geq 0$ es un cuarto de elipse: $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t,\ \text{sen}\,t,\ 4\cos^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Extremos $A = \vec{\alpha}(0) = (2, 0, 4)$ y $B = \vec{\alpha}(\pi/2) = (0, 1, 0)$.
> **Orientación elegida:** t creciente, de A a B (antihoraria vista desde arriba).

Cuenta: en los dos extremos $2x - z = 0$, así que $e^{2x-z} = 1$. $\phi(B) = 0 - 1 + 0 = -1$ y $\phi(A) = 0 - 1 + 16/2 = 7$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = -8$ (8 si se recorre de B a A).
Trampa: el signo depende de la orientación que elijas, y por eso el enunciado pide indicarla: −8 y 8 son las dos respuestas correctas, cada una con su sentido. Y $e^0 = 1$, no 0.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva C: $x^2 + 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, recorrida de (−4, 0) a (0, 0).

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16/3$.

La curva: completando cuadrados, $x^2 + 4x + y^2 = 0$ es $(x + 2)^2 + y^2 = 4$: circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2. Con $y \geq 0$ es la semicircunferencia de arriba, recorrida de (−4, 0) a (0, 0): pasa por arriba de izquierda a derecha, o sea sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (0, 0) a (−4, 0) sobre el eje x. $C \cup C_1$ es el borde del semidisco D (la mitad superior del disco) en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = x^2 - y^2$ y $Q = xy + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región regular con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x = y$ ($e^{\cos(y)}$ no depende de x), $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
Doble integral: polares centradas en (−2, 0): $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3y\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta = 3 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} = 3 \cdot (8/3) \cdot 2 = 16$. Con la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1} = -16$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 0 a −4; dy = 0 y $P(t, 0) = t^2$: $\int_0^{-4} t^2\, dt = [t^3/3]_0^{-4} = -64/3$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -16 - (-64/3) =$ **16/3**.
Trampa: al parametrizar aparece $e^{\cos(2\,\mathrm{sen}\,\theta)} \cdot 2\cos\theta$, que no hay que integrar: es la diferencial de G(y) con $G' = e^{\cos y}$, y como el arco empieza y termina en y = 0 aporta 0. Green lo hace automático (no entra en el rotor y en el segmento dy = 0). Y ojo con el sentido: ir de (−4, 0) a (0, 0) por arriba es horario.

Ejercicio 4. Considere la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z = 4$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 4\pi$ (con $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (abre hacia abajo, vértice (0, 0, 4)) que está arriba del plano z = 0 y sobre la cuña $0 \leq y \leq x$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: $z \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$; $0 \leq y \leq x$ es la cuña entre el eje x y la recta y = x. En polares: **D = {0 ≤ r ≤ 2, 0 ≤ θ ≤ π/4}**, un octavo de disco.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$.
Orientación: la primera componente es 2x, y en D vale $x \geq y \geq 0$, así que $2x \geq 0$ en todo Σ (se anula sólo en el vértice x = y = 0): es la orientación pedida, no hay que cambiar el signo. (Es la normal "hacia afuera" del paraboloide, con $z > 0$.)
$\vec{f} \cdot \vec{N}$: $\vec{f}(X) = (x, y, 2(4 - x^2 - y^2))$, $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y^2 + 2(4 - x^2 - y^2) = 8$. Es constante, así que $\Phi = 8 \cdot$área(D).
Cuenta: pasando a polares ($dx\, dy = r\, dr\, d\theta$): $\Phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^2 8r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot [4r^2]_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 16 = 4\pi$.
Resultado: **$\Phi = 4\pi$**.

Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ y div $\vec{f} = 1 + 1 + 2 = 4$. Cerramos con el piso $z = 0$, la cara $y = 0$ y la cara $y = x$; queda el sólido $V = \{0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4 - r^2\}$ y en Σ su normal saliente es la que usamos. $\iiint_V 4\, dV = 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \pi \cdot [2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^2 = \pi(8 - 4) = 4\pi$. Las tres tapas no aportan: en $z = 0$, $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -2z = 0$; en $y = 0$, $\vec{f} \cdot (0, -1, 0) = -y = 0$; en $y = x$, la normal saliente es $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ y $\vec{f} \cdot \hat{n} = (y - x)/\sqrt{2} = 0$. Entonces $\Phi = 4\pi$ ✓.
Trampa: la cuña $0 \le y \le x$ es $\theta \in [0, \pi/4]$, no $[0, \pi/2]$. Y no olvidar el jacobiano r al pasar a polares.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (z + \varphi(x) + x, y\varphi(x), 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 5e^{-x} - 3$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
a) equivale a div $\vec{f} = 0$: todo cubo cerrado Q es un sólido acotado cuya frontera ∂Q es una superficie cerrada suave a trozos (seis caras), y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial Q} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{f}\, dV$. Si $\operatorname{div} \vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en todo cubo. Al revés, si $\operatorname{div} \vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como $\operatorname{div} \vec{f}$ es continua conserva el signo en un cubo chico centrado en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces a) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\operatorname{div} \vec{f} = \partial(z + \varphi(x) + x)/\partial x + \partial(y\varphi(x))/\partial y + \partial(2z)/\partial z = (\varphi'(x) + 1) + \varphi(x) + 2 = \varphi'(x) + \varphi(x) + 3$.
EDO: $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ es $\varphi' + \varphi = -3$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^x: $(\varphi e^x)' = \varphi' e^x + \varphi e^x = -3e^x$. Integrando: $\varphi e^x = -3e^x + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^{-x} - 3$.
b) Condición inicial: $\vec{f}(0, 0, 0) = (0 + \varphi(0) + 0, 0 \cdot \varphi(0), 2 \cdot 0) = (\varphi(0), 0, 0)$. Igualando a $(2, 0, 0)$: $\varphi(0) = 2$ (las otras dos componentes se cumplen solas). Entonces $K - 3 = 2$, $K = 5$.
Resultado: $\varphi(x) = \mathbf{5e^{-x} - 3}$, que es C^1. Control: $\varphi' + \varphi + 3 = -5e^{-x} + 5e^{-x} - 3 + 3 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$ ✓.
Trampa: $\partial(y\varphi(x))/\partial y = \varphi(x)$ (φ depende sólo de x, para y es una constante), no $\varphi'(x)$. Y la condición sobre los cubos se traduce en $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ en todo punto: no alcanza con mirar un cubo en particular.

6/12/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: 2x^2 + 2y^2 \le z^2 \le 12 - x^2 - y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = \mathbf{6\pi k} \approx 18{,}85k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xy es $|z|$, y en H vale $z \ge 0$, así que $\delta = kz$ con $k > 0$ y $M = \iiint_H kz\, dV$.
> **El sólido:** $z^2 \ge 2(x^2 + y^2)$ con $z \ge 0$ es $z \ge \sqrt{2} \cdot r$ ($r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$): adentro de un cono redondo de eje z, más cerrado que el de 45° ($\tan \varphi_0 = \frac{r}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$). $z^2 \le 12 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \le 12$: adentro de la esfera de centro en el origen y radio $2\sqrt{3}$. Es un cucurucho de helado, y $y \ge 0$ se queda con la mitad (la que está del lado de y positivo del plano xz).
> **Dónde se cortan:** $2r^2 = 12 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura $z = 2\sqrt{2}$. La sombra de H en el plano xy es el semidisco $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0$.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z,\ |J| = r$. $y \ge 0$ es $\mathrm{sen}\,\theta \ge 0$: $\theta \in [0, \pi]$. $r \in [0, 2]$. Para cada r, z va del cono $\sqrt{2}\, r$ a la esfera $\sqrt{(12 - r^2)}$.
> **Cuenta:** $M = k \int_0^{\pi} \int_0^{2} \int_{\sqrt{2}\, r}^{\sqrt{(12 - r^2)}} z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{12 - r^2 - 2r^2}{2} = \frac{12 - 3r^2}{2}$. En r: $\frac{1}{2} \int_0^{2} (12r - 3r^3)\, dr$, primitiva $\frac{1}{2}(6r^2 - \frac{3r^4}{4})$, entre 0 y 2 da $\frac{1}{2}(24 - 12) = 6$. En θ: por π.
> **Resultado:** $M = \mathbf{6\pi k} \approx 18{,}85k$.
>
> **Control en esféricas** ($|J| = \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi$, integrando $kz|J| = k\rho^3 \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi$): el cono es $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o sea $\cos\varphi_0 = \sqrt{(2/3)}$ y $\mathrm{sen}^2\varphi_0 = \frac{1}{3}$; la esfera es $\rho \le 2\sqrt{3}$; $\theta \in [0, \pi]$. $k \int_0^{\pi} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^3 \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = k \cdot \pi \cdot \frac{\mathrm{sen}^2\varphi_0}{2} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^4}{4} = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 36 = 6\pi k$ ✓.
> **Trampa:** el cono es $z = \sqrt{2}\, r$, no $z = r$: el ángulo φ_0 no es π/4 ($\tan\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$), por eso acá conviene más cilíndricas. Y $y \ge 0$ es medio cuerpo: $\theta \in [0, \pi]$; con θ hasta 2π te da $12\pi k$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$8x^2 + y^2 + z = 8,\ y^2 - z = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y,\ x - 2e^{2y-z},\ e^{2y-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (1, 0, 0) a (0, 2, 4) (antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 8$ (con la orientación opuesta, −8).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (y,\ x - 2e^{2y-z},\ e^{2y-z} + z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (2e^{2y-z} - 2e^{2y-z},\ 0 - 0,\ 1 - 1) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_x = y$, $\phi = xy + h(y, z)$. $\phi'_y = x + h'_y = x - 2e^{2y-z} \Rightarrow h = -e^{2y-z} + k(z)$. $\phi'_z = e^{2y-z} + k'(z) = e^{2y-z} + z \Rightarrow k = z^2/2$. $\phi(x, y, z) = xy - e^{2y-z} + z^2/2$.
> **La curva:** reemplazando $z = y^2$ en la primera: $8x^2 + 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2/4 = 1$. Con $x, y \ge 0$ es un cuarto

de elipse: $\alpha(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4 \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Extremos $A = \alpha(0) = (1, 0, 0)$ y $B = \alpha(\pi/2) = (0, 2, 4)$.
Orientación elegida: t creciente, de A a B (antihoraria vista desde arriba).
Cuenta: en los dos extremos $2y - z = 0$, así que $e^{2y-z} = 1$. $\phi(B) = 0 - 1 + 16/2 = 7$ y $\phi(A) = 0 - 1 + 0 = -1$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = 8$ (-8 si se recorre de B a A).
Trampa: $e^0 = 1$, no 0: el término exponencial vale -1 en los dos extremos y se cancela en la resta, pero si lo ponés en 0 en uno solo, el resultado sale mal.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva C: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16/3$.

La curva: completando cuadrados, $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x - 2)^2 + y^2 = 4$: circunferencia de centro (2, 0) y radio 2. Con $y \geq 0$ es la semicircunferencia de arriba, recorrida de (0, 0) a (4, 0): pasa por arriba de izquierda a derecha, o sea sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (4, 0) a (0, 0) sobre el eje x. $C \cup C_1$ es el borde del semidisco D (la mitad superior del disco) en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = x^2 - y^2$ y $Q = xy + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región regular con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x = y$ ($e^{\cos(y)}$ no depende de x), $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
Doble integral: polares centradas en (2, 0): $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3y\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 3 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} = 3 \cdot (8/3) \cdot 2 = 16$. Con la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1} = -16$.
Segmento: C_1: $\vec{}(t, 0)$, t de 4 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t^2$: $\int_4^0 t^2\, dt = [t^3/3]_4^0 = -64/3$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -16 - (-64/3) = \mathbf{16/3}$.
Trampa: al parametrizar aparece $e^{\cos(2 \operatorname{sen}\theta)} \cdot 2\cos\theta$, que no hay que integrar: es la diferencial de $G(y)$ con $G' = e^{\cos y}$, y como el arco empieza y termina en $y = 0$ aporta 0. Green lo hace automático (no entra en el rotor y en el segmento $dy = 0$). Y ojo con el sentido: ir de (0, 0) a (4, 0) por arriba es horario.

Ejercicio 4. Considere la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z = 9$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 81\pi/4$ (con $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ (abre hacia abajo, vértice (0, 0, 9)) que está arriba del plano $z = 0$ y sobre la cuña $0 \leq y \leq x$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: $z \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$; $0 \leq y \leq x$ es la cuña entre el eje x y la recta $y = x$. En polares: **$D = \{0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$**, un octavo de disco.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, **$\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$**.
Orientación: la primera componente es $2x$, y en D vale $x \geq y \geq 0$, así que $2x \geq 0$ en todo Σ (se anula sólo en el vértice $x = y = 0$): es la orientación pedida, no hay que cambiar el signo. (Es la normal "hacia afuera" del paraboloide, con $z > 0$.)
$\vec{f} \cdot \vec{N}$: $\vec{f}(X) = (x, y, 2(9 - x^2 - y^2))$, $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y^2 + 2(9 - x^2 - y^2) = 18$. Es constante, así que $\Phi = 18 \cdot$área(D).

Cuenta: pasando a polares ($dx\,dy = r\,dr\,d\theta$): $\Phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^3 18r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\cdot[9r^2]_0^3 = \frac{\pi}{4}\cdot 81 = \frac{81\pi}{4}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{81\pi}{4}}$.

Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\operatorname{div}\vec{f} = 1 + 1 + 2 = 4$. Cerramos con el piso $z = 0$, la cara $y = 0$ y la cara $y = x$; queda el sólido $V = \{0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le 9 - r^2\}$ y en Σ su normal saliente es la que usamos. $\iiint_V 4\,dV = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^3 (9 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \pi\cdot[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = \pi(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}) = \frac{81\pi}{4}$. Las tres tapas no aportan: en $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -2z = 0$; en $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -y = 0$; en $y = x$, la normal saliente es $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ y $\vec{f}\cdot\hat{n} = (y - x)/\sqrt{2} = 0$. Entonces $\Phi = \frac{81\pi}{4}$ ✓.

Trampa: la cuña $0 \le y \le x$ es $\theta \in [0, \pi/4]$, no $[0, \pi/2]$. Y no olvidar el jacobiano r al pasar a polares.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x) + x,\ y\varphi(x) + y,\ 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 7e^{-x} - 4$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
a) equivale a div $\vec{f} = 0$: todo cubo cerrado Q es un sólido acotado cuya frontera ∂Q es una superficie cerrada suave a trozos (seis caras), y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial Q}\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{f}\,dV$. Si $\operatorname{div}\vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en todo cubo. Al revés, si $\operatorname{div}\vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como div f es continua conserva el signo en un cubo chico centrado en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces a) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\operatorname{div}\vec{f} = \partial(\varphi(x) + x)/\partial x + \partial(y\varphi(x) + y)/\partial y + \partial(2z)/\partial z = (\varphi'(x) + 1) + (\varphi(x) + 1) + 2 = \varphi'(x) + \varphi(x) + 4$.
EDO: $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ es $\varphi' + \varphi = -4$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^x: $(\varphi e^x)' = \varphi' e^x + \varphi e^x = -4e^x$. Integrando: $\varphi e^x = -4e^x + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^{-x} - 4$.
b) Condición inicial: $\vec{f}(0, 0, 0) = (\varphi(0) + 0,\ 0 \cdot \varphi(0) + 0,\ 2 \cdot 0) = (\varphi(0), 0, 0)$. Igualando a $(3, 0, 0)$: $\varphi(0) = 3$ (las otras dos componentes se cumplen solas). Entonces $K - 4 = 3$, $K = 7$.
Resultado: $\varphi(x) = \boldsymbol{7e^{-x} - 4}$, que es C^1. Control: $\varphi' + \varphi + 4 = -7e^{-x} + 7e^{-x} - 4 + 4 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$ ✓.
Trampa: $\partial(y\varphi(x))/\partial y = \varphi(x)$ (φ depende sólo de x, para y es una constante), no $\varphi'(x)$. Y la condición sobre los cubos se traduce en $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ en todo punto: no alcanza con mirar un cubo en particular.

5/8/25 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule
$\iiint_D z\,dxdydz$,
donde
$D: x^2 + y^2 \le z^2 \le 2 - x^2 - y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

> **Respuesta:** $\iiint_D z\,dxdydz = \pi/4$.
>
> **Planteo:** hay que leer las dos desigualdades encadenadas como dos superficies.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 \le z^2$ con $z \ge 0$ equivale a $z \ge \sqrt{(x^2 + y^2)}$: la parte de arriba del cono circular de eje z y vértice en el origen (abre 45°). $z^2 \le 2 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$: el interior de la esfera de radio $\sqrt{2}$. Se cortan donde $2z^2 = 2$, o sea $z = 1$, en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano $z = 1$. D es el "cono de helado" (cono abajo, tapa esférica arriba) y la condición $y \ge 0$ se queda con la mitad.
> **Coordenadas:** esféricas $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, con jacobiano $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ ($dV = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$). La esfera es $\rho \le \sqrt{2}$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho\cos\varphi = \rho \operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$; adentro del cono ($z \ge \sqrt{(x^2 + y^2)}$) es $0 \le \varphi \le \pi/4$. Como $\operatorname{sen}\varphi \ge 0$, $y \ge 0$ equivale a $\operatorname{sen}\theta \ge 0$: $0 \le \theta \le \pi$.
> **Cuenta:** $\iiint_D z\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, y como los límites son constantes se separa en tres factores. En ρ: primitiva $\frac{\rho^4}{4}$, entre 0 y $\sqrt{2}$ da $\frac{4}{4} = 1$. En φ: primitiva $\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En θ: π.
> **Resultado:** $\iiint_D z\,dV = \frac{\pi}{4}$.
>
> **Control en cilíndricas:** $r \le z \le \sqrt{(2 - r^2)}$, con $0 \le r \le 1$ (donde se cortan) y $0 \le \theta \le \pi$. $\int_0^{\pi}\int_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_r^{\sqrt{(2 - r^2)}} dr\,d\theta = \pi\int_0^1 r\cdot\frac{2 - 2r^2}{2}\,dr = \pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ✓.
> **Trampa:** sin el $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le z^2$ incluye también el cono de abajo. φ llega a $\pi/4$ (el ángulo del cono), no a $\pi/2$, y θ sólo hasta π por el $y \ge 0$. Olvidarse del $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ es el error más caro.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y),\ h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 2 - x^2\}$
recorrida en sentido horario.

> **Respuesta:** $\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{ds} = 76/15$ (horario).
>
> **Planteo:** $P = y^2 + h(2x + 2y)$, $Q = h(2x + 2y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
> **La región:** $D = \{|x| \le y \le 2 - x^2\}$ es la región entre la "V" $y = |x|$ y la parábola $y = 2 - x^2$, que se cortan donde $|x| = 2 - x^2$, o sea $(|x| + 2)(|x| - 1) = 0$, $|x| = 1$: en $(\pm 1, 1)$. $D = \{-1 \le x \le 1,\ |x| \le y \le 2 - x^2\}$.
> **Hipótesis del teorema:** P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y un arco de parábola) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.
> **Rotor:** por la regla de la cadena, $Q'_x = 2h'(2x + 2y)$ y $P'_y = 2y + 2h'(2x + 2y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{-2y}$ (la h se cancela: $(h(2x + 2y), h(2x + 2y)) = \nabla(H(2x + 2y)/2)$ con $H' = h$).

Doble integral: $\iint_D (-2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{2-x^2} (-2y)\,dy\,dx = -\int_{-1}^{1} [y^2]_{|x|}^{2-x^2}\,dx = -\int_{-1}^{1} (4 - 5x^2 + x^4)\,dx = -2(4 - 5/3 + 1/5) = -76/15$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -(-76/15) =$ **76/15**.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2\,dx$. En sentido antihorario: por $y = -x$ de $(-1, 1)$ a $(0, 0)$: $\int_{-1}^{0} x^2\,dx = 1/3$; por $y = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$: $1/3$; por la parábola de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$: $\int_{1}^{-1} (2 - x^2)^2\,dx = -86/15$. Total $2/3 - 86/15 = -76/15$, y en horario $76/15$ ✓.
Trampa: el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + x, x^2 + y, x^2 + y^2 + z)$ a través de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente no negativa.
Puede utilizar que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Respuesta: $\Phi = 189\pi/2$ (normales con tercera componente no negativa, o sea exteriores).

Planteo: Σ es la semiesfera superior de radio 3, abierta abajo. La cerramos con el disco B: $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$, y usamos Gauss en la media bola H.
Orientación: en Σ, la normal con tercera componente ≥ 0 es la que apunta hacia afuera de la esfera (en el polo es $(0, 0, 1)$): es la exterior de H. En B, la exterior es $(0, 0, -1)$.
Hipótesis del teorema: $\vec{f} = (y^2 + x, x^2 + y, x^2 + y^2 + z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\Sigma \cup B$ es cerrada, suave a trozos, y acota H.
Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = 1 + 1 + 1 = 3$.
Triple integral: $\iiint_H 3\,dV = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 3\cdot 18\pi = 54\pi$.
Base: en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(x^2 + y^2 + 0) = -r^2$. $\Phi_B = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = -\frac{81\pi}{2}$.
Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = 54\pi \Rightarrow \Phi_\Sigma = 54\pi + \frac{81\pi}{2} = \frac{189\pi}{2}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{189\pi}{2}}$.
Control directo: en esféricas (radio 3) con la normal exterior, el flujo sobre Σ da $\frac{189\pi}{2}$ ✓.
Trampa: en la base el campo no es constante: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(x^2 + y^2)$, hay que integrarlo (no es "valor por área"). Y es negativo, así que se suma al despejar.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por las ecuaciones
$x^2 + y^2 - 4y = 0,\ 2y + z = 8$.
recorrida de modo que en el punto $(0, 0, 8)$ el versor tangente tenga primera componente positiva.

Respuesta: $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 4\pi$ (C antihoraria vista desde arriba, como pide el enunciado).

Planteo: C es la intersección del cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ (completando cuadrados en $x^2 + y^2 - 4y = 0$) con el plano $z = 8 - 2y$: una elipse cerrada. Teorema del rotor con la porción de plano que encierra.
Superficie elegida: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 8 - 2y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$. Su borde es C porque C está en

ese plano y se proyecta en el borde de D. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -2) = (0, 2, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es un trozo de plano regular y orientable; C es cerrada, simple y suave.
Sentido de C: (0, 0, 8) se proyecta en (0, 0), el punto más bajo de la circunferencia de centro (0, 2). Ahí el tangente es horizontal en la proyección (en 3D es paralelo a (1, 0, 0), porque $z = 8 - 2y$ no cambia al moverse en x), y con primera componente positiva se avanza hacia x creciente: C se recorre **antihoraria vista desde arriba**.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (0, 2, 1)$, la de la parametrización.
Rotor: $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, y, 0)$, y el gradiente de una función C^2 no tiene rotor, así que $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot}(-y, y, 0) = (0, 0, 0 - (-1)) = (0, 0, 1)$. (Con la fórmula $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P)$ directo sobre $\vec{f}$ da lo mismo: los términos con z^2 y y^3 se cancelan de a pares.)
Flujo del rotor: $\iint_{\vec{D}} (0, 0, 1) \cdot (0, 2, 1)\, dxdy = \text{Área}(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{4\pi}$.
Control (circulación directa): el gradiente no circula y y dy es exacta; queda $\oint -y\, dx$ con $x = 2 \cos t$, $y = 2 + 2 \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$ (antihoraria; en $t = 3\pi/2$ está en (0, 0, 8) con tangente (2, 0, 0)): $\int_0^{2\pi} -(2 + 2 \operatorname{sen} t)(-2 \operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{2\pi} (4 \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen}^2 t)\, dt = 0 + 4\pi$ ✓.
Trampa: calcular a mano la derivada de $2x^2y^3z$ respecto de y y la de $3x^2y^2z^2$ respecto de z tienta errores de factor; conviene ver primero que $\vec{f}$ es un gradiente más algo simple.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva, perteneciente a la familia de curvas ortogonales a la familia $\mathscr{F}$: $x^2 + 2y^2 = c$, que tiene por extremos los puntos (1, 1) y $(2, y_0)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y, x + y^3)$ a lo largo de Γ recorrida de $(2, y_0)$ a (1, 1).

Respuesta: La curva ortogonal por (1, 1) es $y = x^2$, así que $y_0 = 4$. Con $\varphi = xy + y^4/4$, la circulación de (2, 4) a (1, 1) es $\varphi(1, 1) - \varphi(2, 4) = 5/4 - 72 = -283/4$.

Pendiente de $\mathscr{F}$: derivando $x^2 + 2y^2 = c$ respecto de x (con c constante): $2x + 4yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/(2y)$.
EDO de la familia ortogonal: en cada punto la pendiente ortogonal es la recíproca cambiada de signo: $\mathbf{y' = 2y/x}$ (para $x \neq 0$, $y \neq 0$). Control: $(-x/(2y)) \cdot (2y/x) = -1$.
Resolución (variables separables): $dy/y = 2\, dx/x \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + k \Rightarrow |y| = e^k x^2 \Rightarrow y = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$ ($K = 0$ da $y = 0$, que también es solución). Control: $y' = 2Kx = 2(Kx^2)/x = 2y/x$.
La curva de Γ: pasa por (1, 1) $\Rightarrow K = 1$: $\mathbf{y = x^2}$. El otro extremo $(2, y_0)$ está en la misma curva: $\mathbf{y_0 = 4}$. Γ es el arco de parábola $y = x^2$, $1 \le x \le 2$, recorrido de (2, 4) a (1, 1).
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (y, x + y^3)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 1 = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = y \Rightarrow \varphi = xy + h(y)$; $\varphi'_y = x + h'(y) = x + y^3 \Rightarrow h = y^4/4$. $\boldsymbol{\varphi = xy + y^4/4}$.
Circulación: $\varphi(1, 1) - \varphi(2, 4) = (1 + 1/4) - (8 + 256/4) = 5/4 - 72 = \mathbf{-283/4}$.
Control directo: con x como parámetro, $y = x^2$, $dy = 2x\, dx$, x de 2 a 1: $\int_2^1 [x^2 + (x + x^6)2x]\, dx = \int_2^1 (3x^2 + 2x^7)\, dx = [x^3 + x^8/4]_2^1 = 5/4 - 72 = -283/4$. ✓
Trampa: la ortogonal usa $-1/m$, no $1/m$ (con $1/m$ sale $y' = -2y/x$, otra curva). Y el sentido es de $(2, y_0)$ a (1, 1): al revés da +283/4.

15/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la parte del primer octante limitada superiormente por el plano $x + y + z = 2$, suponiendo que la densidad de masa en el punto P es proporcional a su distancia al plano yz.

> **Respuesta:** $M = 2k/3$ ($k > 0$ la constante de proporcionalidad de la densidad $\delta = kx$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta(x, y, z)\, dxdydz$, así que hay que describir bien H y escribir la densidad.
> **El cuerpo:** primer octante es $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. El techo es el plano $x + y + z = 2$, que corta a los ejes en (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2). Los otros tres lados son los planos coordenados. H es el tetraedro con vértices en el origen y esos tres puntos. Su sombra sobre el plano xy (donde el techo toca el piso $z = 0$) es el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$.
> **Densidad:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano yz (de ecuación $x = 0$) es $|x|$, y en el primer octante $|x| = x$. Entonces $\delta(x, y, z) = kx$, con $k > 0$.
> **Límites:** para cada (x, y) de T, z va del piso al techo: $0 \leq z \leq 2 - x - y$. El triángulo T se recorre con $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} x\, dz\, dy\, dx$. En z: primitiva xz, entre 0 y $2 - x - y$ da $x(2 - x - y)$. En y: primitiva $x(2 - x)y - \frac{xy^2}{2}$, entre 0 y $2 - x$ da $x(2 - x)^2 - \frac{x(2-x)^2}{2} = \frac{x(2-x)^2}{2}$. En x: $\frac{1}{2}\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{2k}{3}}$.
> **Control:** integrando en el orden dx dy dz (x de 0 a $2 - y - z$, y de 0 a $2 - z$, z de 0 a 2) sale lo mismo por la simetría del tetraedro. Otra forma: $\iiint_H x\, dV = V\cdot\bar{x}$, con $V = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = \frac{4}{3}$ y el centroide de un tetraedro en el promedio de sus vértices, $\bar{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} : \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al plano yz es $|x|$. Usar z (que es la distancia al plano xy) acá da lo mismo sólo por la simetría del tetraedro; en otro cuerpo no. Y $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ es la distancia al eje x, otro problema.

Ejercicio 2. Calcule el área de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 1 \leq z \leq 2,$
mediante una integral de superficie.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = 3\sqrt{2}\,\pi \approx 13{,}33$.
>
> **Planteo:** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es un cono de dos hojas con vértice en el origen. Como $1 \leq z \leq 2$, sólo interesa la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, entre las alturas 1 y 2: un tronco de cono. Se pide $A(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r)$.
> **Dominio D:** sobre el cono $z = r$, así que $1 \leq z \leq 2$ es $1 \leq r \leq 2$; no hay restricción angular: $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $D = [1, 2] \times [0, 2\pi]$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\text{sen}\,\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\, r$, que no se anula en D porque $r \geq 1$: el vértice queda afuera y Σ es regular.

Cuenta: $A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 1 y 2 da $\frac{\sqrt{2}\,(4-1)}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Integral en θ: primitiva $\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\theta$, entre 0 y 2π da $3\sqrt{2}\,\pi$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{3\sqrt{2}\,\pi} \approx 13{,}33$.

Control geométrico: el área lateral de un tronco de cono es $\pi\,(R_1 + R_2)\,g$, con radios 1 y 2 y generatriz $g = \sqrt{((2-1)^2 + (2-1)^2)} = \sqrt{2}$: $\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$ ✓.

Trampa: responder 3π, que es el área de la corona $1 \le r \le 2$ (la proyección sobre el plano xy), sin el factor √2. Y no te preocupes por la hoja de abajo: $z \ge 1$ ya la descarta.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ con $\vec{f}(x, y) = (x^3 e^x + xy,\ x^2 + y^2)$ y
C: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x \ge 2$
recorrida de (2, 2) a (2, −2).

Respuesta: La curva va de (2, 2) a (2, −2) pasando por (4, 0) (sentido horario). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-4\pi - 80/3} \approx -39{,}23$.

La curva: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x-2)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro (2, 0) y radio 2; con $x \ge 2$ queda la mitad derecha. Va de (2, 2) a (2, −2) pasando por (4, 0): baja por la derecha, sentido **horario**. No es cerrada, así que Green no se aplica directo.

Cerrar la curva: agrego el segmento S de (2, −2) a (2, 2) sobre $x = 2$. $C \cup S$ es el borde del semidisco $D = \{(x-2)^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 2\}$, recorrido en sentido horario (arco hacia abajo por la derecha, segmento hacia arriba por la izquierda).

Hipótesis de Green: D es compacto con borde cerrado, simple y C^1 a trozos; $P = x^3 e^x + xy$ y $Q = x^2 + y^2$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Rotor: $Q'_x = 2x$, $P'_y = x$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = x}$.

Doble integral: polares centradas en (2, 0): $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 2$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, jacobiano r. $\iint_D x\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 (2 + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^2 + \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^2 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4 + \frac{8}{3}\cos\theta\right) d\theta = 4\pi + \frac{16}{3}$. Como el recorrido es horario: $\oint_{C \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi - \frac{16}{3}$.

El segmento: $\sigma(t) = (2, t)$, $-2 \le t \le 2$, $\sigma' = (0, 1)$. Sólo trabaja Q: $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^{2} (4 + t^2)\, dt = \left[4t + \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 16 + \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$.

Resultado: $\int_C = \oint_{C \cup S} - \int_S = -4\pi - \frac{16}{3} - \frac{64}{3} = \mathbf{-4\pi - 80/3} \approx -39{,}23$.

Trampa: el segmento tiene que recorrerse en el sentido que cierra la curva (de (2, −2) a (2, 2)), y después se **resta**. Si lo tomás al revés, o lo sumás, el resultado cambia en 128/3.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (3x, y)$ de extremos (1, 1) y $(8, y_1)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy)$ a lo largo de C. Indique el sentido de recorrido considerado.

Respuesta: C: $y = \sqrt[3]{x}$, de (1, 1) a (8, 2) ($y_1 = 2$). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 158$ (−158 de (8, 2) a (1, 1)).

Línea de campo: en la zona $x > 0$ la primera componente de $\vec{g} = (3x, y)$ no se anula, así que la línea de campo es un gráfico $y = y(x)$ con $y' = \frac{g_2}{g_1} = \frac{y}{3x}$.

Resolución de la EDO: es de variables separables. Cerca de (1, 1) es $y > 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{3x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3} \ln$

$x + c \Rightarrow y = K\,x^{1/3}$. Por (1, 1): K = 1, o sea $\mathbf{y = \sqrt[3]{x}}$. Control: $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{x^{1/3}}{3x} = \frac{y}{3x}$ ✓. En x = 8: $y_1 = \sqrt[3]{8} = 2$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? P = 2xy + y^2 y Q = x^2 + 2xy son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = 2x + 2y = Q'_x$. Potencial: $\phi = x^2y + xy^2 + h(y)$, $\phi'_y = x^2 + 2xy + h' \Rightarrow$ h constante. $\phi(x, y) = x^2y + xy^2$.

Sentido considerado: de (1, 1) a (8, 2), con x creciente (es el sentido del propio $\vec{g}$, que en esa zona tiene primera componente 3x > 0).

Cuenta: $\phi(8, 2) = 64 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 160$ y $\phi(1, 1) = 2$.

Resultado: $\mathbf{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 160 - 2 = 158}$ (–158 en el sentido contrario).

Trampa: y_1 no es dato: sale de evaluar la línea de campo en x = 8. Si integrás mal la EDO (por ejemplo y = x/3) el extremo cambia y todo el resultado también.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ que se encuentra arriba del plano z = 1.

Calcule el flujo del campo $\vec{f} = (y + z, xz, z^2)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con la normal exterior a la esfera (hacia afuera y arriba): flujo = 99π/2. Con la otra orientación, –99π/2.

Planteo: Σ es el casquete $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, z ≥ 1: **no es cerrada** (su borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en z = 1). La cierro con la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 9$. Σ ∪ T es la frontera del sólido M: $x^2 + y^2 + z^2 \le 10$, z ≥ 1.

Orientación (el gráfico): elijo en Σ la normal exterior a la esfera, $\check{n} = (x, y, z)/\sqrt{10}$ (hacia afuera y arriba). Es la exterior de M, y en la tapa la exterior de M es $\check{n} = (0, 0, -1)$.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (y + z, xz, z^2)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$; ∂M = Σ ∪ T es cerrada, suave a trozos, con normal exterior. $\iint_\Sigma + \iint_T = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.

Divergencia: 0 + 0 + 2z = **2z**.

Triple: en cilíndricas, $0 \le r \le 3$, $1 \le z \le \sqrt{(10 - r^2)}$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3 [z^2]_1^{\sqrt{(10 - r^2)}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr = 2\pi[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = 2\pi(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}) = \frac{81\pi}{2}$.

Tapa: en T, $\vec{f} \cdot \check{n} = -f_3 = -z^2 = -1$, así que $\iint_T$ = –área = –9π.

Resultado: $\mathbf{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = \frac{81\pi}{2} - (-9\pi) = \frac{99\pi}{2}}$ (con la orientación opuesta, –99π/2).

Control por definición: Σ es el gráfico $z = \sqrt{(10 - x^2 - y^2)}$ sobre el disco de radio 3, y la normal hacia arriba es (x/z, y/z, 1) dA. $\vec{f} \cdot (x/z, y/z, 1) = (xy + xz)/z + xy + z^2$. Los términos xy/z, x y xy son impares en x sobre un disco simétrico y se anulan; queda $\iint z^2\, dA = \iint (10 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[5r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^3 = 2\pi(45 - \frac{81}{4}) = \frac{99\pi}{2}$ ✓.

Trampa: el signo de la tapa: la normal exterior de M en z = 1 apunta para abajo, así que su flujo es –9π y se **suma** 9π al despejar.

8/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, y^2 + x, e^x y)$ a través de la frontera del cuerpo H: $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 5 - x^2 - y^2$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 416/15$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** la frontera de H es cerrada; elijo la normal exterior y uso Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (yz, y^2 + x, e^x y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (productos de polinomios y exponencial). H es acotado y su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 0$, techo paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, plano $y = 0$ y pared cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ ($y \ge 0$, $0 \le z \le 1$).
> **La región:** sobre el semidisco $D = \{x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\} = \{0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le 2\}$, z va de 0 a $5 - r^2$, que es $\ge 1 > 0$ en D (el techo nunca baja del piso).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(yz) + \partial_y(y^2 + x) + \partial_z(e^x y) = 0 + 2y + 0 = 2y$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{5-r^2} 2r \operatorname{sen}\theta \cdot r \, dz \, dr \, d\theta = (\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta)(\int_0^2 (5r^2 - r^4) \, dr) = [-2\cos\theta]_0^{\pi} \cdot [\frac{5r^3}{3} - \frac{r^5}{5}]_0^2 = 4 \cdot (\frac{40}{3} - \frac{32}{5}) = 4 \cdot \frac{104}{15} = \frac{416}{15}$.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\Phi = \frac{416}{15}}$ saliente.
> **Gráfico:** la mitad ($y \ge 0$) de una "cúpula" de paraboloide sobre el disco de radio 2, con pared cilíndrica de altura 1 y la cara plana $y = 0$; flechas saliendo (en la cara $y = 0$ apuntan hacia $(0, -1, 0)$, en el piso hacia $(0, 0, -1)$).
> **Control por caras:** plano $y = 0$: $\vec{f} \cdot (0, -1, 0) = -(0 + x)$, y x es impar sobre esa cara simétrica: 0. Pared: $\frac{32}{3}$. Piso (normal $(0, 0, -1)$): $-\iint_D e^{xy} \, dA \approx -8{,}7179$ (no tiene primitiva elemental, se calcula numéricamente). Techo (normal $(2x, 2y, 1)$), calculado directo: $\approx 25{,}7846$. Suman $\approx 27{,}7333 = \frac{416}{15}$ ✓.
> **Trampa:** la simetría que anula $\iiint 2y$ sobre un sólido completo no sirve acá: H sólo tiene $y \ge 0$, así que $2y$ no se cancela y la integral en θ va de 0 a π.

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le x$, $y \ge 0$.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = 1$.
>
> **Planteo:** Σ es un pedazo del cilindro circular de radio 1 y eje z, recortado abajo por el plano $z = 0$ y arriba por el plano $z = x$. $A(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_D \|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z\| \, d\theta \, dz$. Ojo: el cilindro no se puede proyectar sobre el plano xy (se ve como una circunferencia, área 0), así que se parametriza con el ángulo y la altura.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$.
> **Dominio D:** $y \ge 0$ da $\operatorname{sen}\theta \ge 0$, o sea $\theta \in [0, \pi]$. Además $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, es decir $\cos\theta \ge 0$; junto con lo anterior queda $\theta \in [0, \pi/2]$. Para cada θ, la altura va de 0 a $x = \cos\theta$. $D = \{(\theta, z): 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le z \le \cos\theta\}$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$. $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, con $\|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z\| = \sqrt{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = 1$. La parametrización es C^1, inyectiva en D y la normal nunca se anula: Σ es regular.

Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} 1 \, dz \, d\theta$. Integral en z: primitiva z, da cos θ. Integral en θ: primitiva sen θ, entre 0 y π/2 da 1 − 0.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{1}$.
Control (proyectando sobre el plano xz): con $y \geq 0$, Σ es la gráfica $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ sobre $R = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$. El factor de área es $\sqrt{(1 + y_x^2 + y_z^2)} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{1 - x^2})} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$. $A = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \, dz \, dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}} \, dx = [-\sqrt{(1 - x^2)}]_0^1 = 1$ ✓ (impropia en x = 1, pero converge).
Trampa: tomar $\theta \in [0, \pi]$ sólo por $y \geq 0$. Para $\theta > \pi/2$ es $x < 0$ y la franja $0 \leq z \leq x$ está vacía; si integrás cos θ entre 0 y π te da 0, que no puede ser un área.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (ye^{xy} - xy + e^x, xe^{xy} + x^2)$ a lo largo de la curva
Γ: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$
recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Respuesta: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = e^4 - 1 - 12\pi \approx 15{,}90$.

La curva: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro (2, 0) y radio 2. Con $y \geq 0$ es la mitad de arriba, de (0, 0) a (4, 0) pasando por (2, 2): sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (4, 0) a (0, 0) sobre el eje x. $\Gamma \cup C_1$ es el borde del semidisco $D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = ye^{xy} - xy + e^x$ y $Q = xe^{xy} + x^2$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es regular y su borde es cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: $P'_y = e^{xy} + xye^{xy} - x$, $Q'_x = e^{xy} + xye^{xy} + 2x$. $Q'_x - P'_y = 3x$.
Doble integral: polares centradas: $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3x \, dA = \int_0^\pi \int_0^2 3(2 + r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta = 3[\int_0^\pi \int_0^2 2r \, dr \, d\theta + \int_0^\pi \int_0^2 r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta] = 3[\pi \cdot 4 + (8/3) \cdot [\mathrm{sen}\,\theta]_0^\pi] = 3 \cdot 4\pi = 12\pi$. Con la orientación horaria, $\oint_{\Gamma \cup C_1} = -12\pi$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 4 a 0; dy = 0 y P(t, 0) = 0 − 0 + e^t: $\int_4^0 e^t \, dt = [e^t]_4^0 = 1 - e^4$.
Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -12\pi - (1 - e^4) = \mathbf{e^4 - 1 - 12\pi} \approx 15{,}90$.
Trampa: en polares centradas, x no es r cos θ sino 2 + r cos θ. Si te olvidás del 2, la integral de 3x da 0 y perdés el −12π.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), x + z, e^{z^2})$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices (2, 0, 2), (0, 2, 0), (−2, 0, 2). Indique en un gráfico el sentido de recorrido usado en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo A = (2, 0, 2) → B = (0, 2, 0) → C = (−2, 0, 2) → A (antihorario visto desde arriba): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. En el sentido contrario, −4.

Planteo: el borde del triángulo es una curva cerrada (poligonal, suave a trozos) y φ no se conoce, así que lo natural es el teorema del rotor tomando como superficie el triángulo mismo.
Plano del triángulo: A = (2, 0, 2), B = (0, 2, 0), C = (−2, 0, 2). B − A = (−2, 2, −2), C − A = (−4, 0, 0) y (B − A) × (C − A) = (0, 8, 8) ∥ (0, 1, 1). El plano es **y + z = 2** (los tres vértices lo cumplen: 0 + 2, 2 + 0, 0 + 2).
Superficie elegida: Σ = el triángulo plano, $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 2 - y)$ con (x, y) en el triángulo T de vértices (2, 0), (0, 2), (−2, 0) (la proyección sobre xy). Su borde es exactamente la curva del enunciado y la normal es constante: $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -1) = (0, 1, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es plana, regular y orientable; su borde es una

poligonal cerrada simple, suave a trozos.

Sentido elegido (lo que va en el gráfico): A → B → C → A. Proyectado: (2, 0) → (0, 2) → (–2, 0) → (2, 0), que es antihorario visto desde arriba (desde z positivo). En el dibujo: el triángulo inclinado, con flechas de A a B, de B a C y de C a A, y la normal (0, 1, 1) saliendo hacia arriba y hacia y positivo.

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con los dedos siguiendo A → B → C el pulgar da (B – A) × (C – A) = (0, 8, 8), hacia arriba: coincide con la normal de la parametrización.

Rotor: con P = φ(x), Q = x + z, R = e^{z^2}: $\operatorname{rot}\vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$. φ(x) depende sólo de x, así que no aporta nada.

Flujo del rotor: $\iint_T (-1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)\, dxdy = \iint_T 1\, dxdy = \text{Área}(T) = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

Resultado: $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s}$ = **4** recorriendo A → B → C → A (y –4 en el sentido opuesto).

Control (circulación directa): φ(x)dx y $e^{z^2}dz$ son exactas (dan 0 en una curva cerrada); queda $\oint (x + z)dy$. Tramo AB: (2 – 2t, 2t, 2 – 2t), t ∈ [0, 1], x + z = 4 – 4t, dy = 2dt: $\int_0^1 (8 - 8t)\, dt = [8t - 4t^2]_0^1 = 4$. Tramo BC: (–2t, 2 – 2t, 2t): x + z = 0. Tramo CA: y = 0, dy = 0. Total 4 ✓.

Trampa: sin el sentido declarado (y dibujado) el número no significa nada: el enunciado lo pide explícitamente.

Ejercicio 5. Sea $\vec{g}(x, y) = \mu(x)(xe^x, e^{2x+y})$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Halle μ para que $\vec{g}$ sea campo de gradientes y $\vec{g}(0, 0) = (0, 2)$.

b) Halle todas las funciones potenciales de $\vec{g}$ para la función μ hallada en a).

Respuesta: a) $\mu(x) = 2e^{-2x}$, y queda $\vec{g}(x, y) = (2xe^{-x}, 2e^y)$. b) Las funciones potenciales son $\varphi(x, y) = 2e^y - 2(x + 1)e^{-x} + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

a) Planteo: $\vec{g} = (P, Q)$ con $P = \mu(x)xe^x$ y $Q = \mu(x)e^{2x+y}$. Como $\mu \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo: $\vec{g}$ es campo de gradientes si y sólo si $Q'_x = P'_y$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Derivadas cruzadas: P no depende de y, así que $P'_y = 0$. $Q'_x = \mu'(x)e^{2x+y} + 2\mu(x)e^{2x+y} = (\mu' + 2\mu)e^{2x+y}$. Como $e^{2x+y} > 0$, la condición es **$\mu' + 2\mu = 0$**.

EDO: $\mu \equiv 0$ no sirve (daría $\vec{g}(0, 0) = \vec{0}$). Separando: $\mu'/\mu = -2 \Rightarrow \ln|\mu| = -2x + k \Rightarrow \mu(x) = Ce^{-2x}$.

Condición: $\vec{g}(0, 0) = \mu(0)(0 \cdot e^0, e^0) = (0, \mu(0)) = (0, 2) \Rightarrow C = 2$. **$\mu(x) = 2e^{-2x}$**. Reemplazando, como $e^{-2x}e^{2x+y} = e^y$: $\vec{g}(x, y) = (2xe^{-x}, 2e^y)$, y ahí se ve $Q'_x = 0 = P'_y$.

b) Integrando en x: $\varphi'_x = 2xe^{-x} \Rightarrow \varphi = \int 2xe^{-x}\, dx + h(y)$. Por partes (u = 2x, dv = $e^{-x}dx$): $\int 2xe^{-x}\, dx = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\, dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} = -2(x + 1)e^{-x}$.

Ajuste en y: $\varphi'_y = h'(y) = 2e^y \Rightarrow h(y) = 2e^y + K$.

Control: $\nabla\varphi = (-2e^{-x} + 2(x + 1)e^{-x}, 2e^y) = (2xe^{-x}, 2e^y) = \vec{g}$.

Resultado: $\varphi(x, y) = 2e^y - 2(x + 1)e^{-x} + K$, $K \in \mathbb{R}$. Son todas: si φ_1 y φ_2 son potenciales, $\nabla(\varphi_1 - \varphi_2) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^2$, que es conexo, así que difieren en una constante.

Trampa: piden "todas": sin el + K (y la razón de por qué no hay otras) la respuesta queda incompleta. Y la condición $\vec{g}(0, 0) = (0, 2)$ es sobre el campo, que en (0, 0) vale (0, μ(0)).

30/6/25 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^3 + y, y^3 - z, y)$ a través de la frontera del cuerpo definido por
$3x^2 + 3y^2 - 5 \le z \le x^2 + y^2 + 3$.
Indique en un gráfico la orientación considerada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 64\pi$ (normales hacia afuera del sólido).
>
> **Planteo:** el cuerpo $H = \{3x^2 + 3y^2 - 5 \le z \le x^2 + y^2 + 3\}$ está entre dos paraboloides que abren hacia arriba; su frontera es cerrada. Elijo la normal exterior y aplico Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (x^3 + y, y^3 - z, y)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado (ver región) y su frontera, unión de los dos casquetes de paraboloide, es cerrada y suave a trozos (la arista es la circunferencia de corte).
> **La región:** los paraboloides se cortan donde $3r^2 - 5 = r^2 + 3 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$, a altura $z = 7$. Para $r < 2$ el de abajo es $3r^2 - 5$ (por ejemplo en $r = 0$: $-5 \le 3$). En cilíndricas: $H = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 3r^2 - 5 \le z \le r^2 + 3\}$, de altura $(r^2 + 3) - (3r^2 - 5) = 8 - 2r^2$.
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(x^3 + y) + \partial_y(y^3 - z) + \partial_z(y) = 3x^2 + 3y^2 + 0 = 3r^2$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{3r^2-5}^{r^2+3} 3r^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi\int_0^2 3r^3(8 - 2r^2)\, dr = 2\pi\int_0^2 (24r^3 - 6r^5)\, dr = 2\pi[6r^4 - r^6]_0^2 = 2\pi(96 - 64) = 64\pi$.
> **Resultado: $\Phi = 64\pi$** saliente (-64π con la normal interior).
> **Gráfico:** una "lente" con fondo en el paraboloide angosto $z = 3r^2 - 5$ (vértice en $(0, 0, -5)$) y techo en el ancho $z = r^2 + 3$ (vértice en $(0, 0, 3)$), unidos en la circunferencia $r = 2$, $z = 7$. Flechas saliendo: en el techo con tercera componente positiva, en el fondo con tercera componente negativa.
> **Control por caras:** techo (normal $(-2x, -2y, 1)$) da -32π y fondo (normal $(6x, 6y, -1)$) da 96π: suman 64π ✓.
> **Trampa:** el elemento de volumen en cilíndricas lleva r: la integral es de $3r^2 \cdot r$, no de $3r^2$. Sin ese r da $2\pi\int(24r^2 - 6r^4) = 2\pi(64 - 38{,}4)$, que no es lo pedido.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 7/3$.
>
> **Planteo:** $P = \varphi(y) + y^2$, $Q = x\varphi'(y) + xy$. Como $\varphi \in C^2$, φ' es C^1 y P, Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (por eso piden C^2 y no C^1).
> **Rotor escalar:** $Q'_x = \varphi'(y) + y$, $P'_y = \varphi'(y) + 2y$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -y}$. No es de gradientes, pero φ' se cancela.
> **Cierre:** Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, el segmento de C a A sobre el eje x. $A \to B \to C \to A$ sube, baja y vuelve por abajo hacia la izquierda: es el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y\}$ en **sentido horario**.
> **Hipótesis de Green:** D es regular, su borde es cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D (-y)\, dA = \iint_D y \, dA$.
> **Doble integral:** $\iint_D y \, dA = \int_0^1 y\,[x]_y^{2-y}\, dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\, dy = [y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.
> **Segmento:** S: $(t, 0)$, t de 2 a 0, derivada $(1, 0)$; $P(t, 0) = \varphi(0) + 0 = 1$, así que $\int_S = \int_2^0 1 \, dt = -2$. Acá se

usa el dato $\varphi(0) = 1$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{3} - (-2) =$ **7/3**.

Control: $(\varphi(y), x\varphi'(y)) = \nabla(x\varphi(y))$, que de A a C aporta $2\varphi(0) - 0 = 2$. Lo que queda, $\int y^2\,dx + xy\,dy$: en AB ($x = y = t$) es $\int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}$; en BC ($x = 1 + t$, $y = 1 - t$) es $\int_0^1 (-2t + 2t^2)\,dt = -\frac{1}{3}$. Total $2 + \frac{1}{3} = 7/3$ ✓.

Trampa: A → B → C → A es horario. Y sobre el eje x no te olvides de $\varphi(0)$: el segmento no da 0.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Respuesta: Con normal hacia arriba ($\vec{N} = (2x, 2y, 1)$): $\Phi = 9\pi/4$. Con la opuesta, $-9\pi/4$.

Planteo: Σ: $z = 9 - x^2 - y^2$, paraboloide con vértice (0, 0, 9) que abre hacia abajo. En el primer octante: $x, y \geq 0$ y $z \geq 0$, o sea $x^2 + y^2 \leq 9$. Es un gráfico sobre D = cuarto de disco de radio 3 ($x, y \geq 0$). $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$.
Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$.
Orientación elegida: la de $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$: tercera componente $1 > 0$, normal hacia arriba, que en el paraboloide es hacia afuera del sólido que encierra con los planos coordenados. En el gráfico: el cuarto de paraboloide con flechitas que en el vértice (0, 0, 9) apuntan según $\vec{k}$ y en el borde, por ejemplo en (3, 0, 0), según (6, 0, 1) (casi horizontales, hacia afuera).
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2yz, -2xz, 1)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 4xyz - 4xyz + 1 = 1$. Las dos primeras componentes se cancelan solas.

Cuenta: $\Phi = \iint_D 1\,dx\,dy =$ área de D. En polares: $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9\pi}{4}$.

Resultado: con la normal hacia arriba, $\Phi =$ **9π/4** (con la orientación opuesta sería $-9\pi/4$).
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ ($\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$). Cierro con los tres planos coordenados, normales salientes $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$. En $x = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{i}) = -2yz$, $\int_0^3 \int_0^{9 - y^2} -2yz\,dz\,dy = -\int_0^3 y(9 - y^2)^2\,dy$ (primitiva de $y(9 - y^2)^2$: $-\frac{(9 - y^2)^3}{6}$) $= -\frac{729}{6} = -\frac{243}{2}$. En $y = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{j}) = 2xz$, por simetría $+\frac{243}{2}$. En $z = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = -1$, da $-9\pi/4$. Gauss: $\Phi - 9\pi/4 = 0$, así que $\Phi = 9\pi/4$ ✓.
Trampa: el enunciado no fija la orientación y por eso pide el gráfico: si no la indicás, el signo no está justificado.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (t \cos \frac{\pi t}{2}, t \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$
que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (e^x(y + z), e^x, e^x + 2z)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [-1, 0]$, de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1). Con $U = e^x(y + z) + z^2$, la circulación es $U(B) - U(A) = 2 - 1 = 1$.

El arco: $\|\vec{X}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t/2) + t^2\operatorname{sen}^2(\pi t/2) + (t + 1)^2 = 2t^2 + 2t + 1$. Estar en la bola cerrada de radio 1 es $2t^2 + 2t + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2t(t + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 0$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi/2), -\operatorname{sen}(-\pi/2), 0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{X}(0) = (0, 0, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1).
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (e^x(y + z), e^x, e^x + 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$;

$P'_z - R'_x = e^x - e^x = 0$; $Q'_x - P'_y = e^x - e^x = 0$. rot f = 0: es de gradientes.
Potencial: $U'_y = e^x \Rightarrow U = ye^x + h(x, z)$. $U'_x = ye^x + h'_x = ye^x + ze^x \Rightarrow h = ze^x + k(z)$. $U'_z = e^x + k'(z) = e^x + 2z \Rightarrow k = z^2$. **$U = e^x(y + z) + z^2$**.
Circulación: $U(B) = e^0(0 + 1) + 1 = 2$; $U(A) = e^0(1 + 0) + 0 = 1$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2 - 1 =$ **1**.
Trampa: el arco es $t \in [-1, 0]$, no $[0, 1]$; y la orientación "según la parametrización" es de $t = -1$ a $t = 0$, o sea de (0, 1, 0) a (0, 0, 1).

Ejercicio 5. Sean C la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto (0, 0) y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x\,dxdy$.

Respuesta: C: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2). $\iint_D x\,dxdy = -8\pi$.

Línea de campo (EDO): $x' = -y$, $y' = x + 2$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2}{-y}$. Separando: $y\,dy = -(x + 2)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{(x + 2)^2}{2} + c \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = k$. Por (0, 0): $k = 4$. **C: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$**. Control: $\frac{d}{dt}[(x + 2)^2 + y^2] = 2(x + 2)(-y) + 2y(x + 2) = 0$ ✓. (El campo se anula en (−2, 0), el centro: ahí no pasa ninguna línea de campo, pero no molesta porque lo que se integra es x sobre D, no el campo.)
La región: C es la circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2; está toda en el semiplano $x \le 0$ y toca al eje y sólo en el origen. D es el disco **$D = \{(x + 2)^2 + y^2 \le 4\}$**.
Cambio de variables: polares centradas en el centro, $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Es una traslación seguida de polares: jacobiano $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
Cuenta: $\iint_D x\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \int_0^2 r^2\,dr$.
Primero: $-2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 = -2 \cdot 2\pi \cdot 2 = -8\pi$. Segundo: $[\text{sen}\,\theta]_0^{2\pi} = 0$, se anula.
Resultado: $\iint_D x\,dxdy =$ **-8π**. Da negativo, y está bien: D está entero en $x \le 0$. (Es $\bar{x} \cdot \text{área} = (-2) \cdot 4\pi$.)
Control con polares en el origen: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = -4x$, o sea $r = -4\cos\theta$, que pide $\cos\theta \le 0$: $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{-4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta \cdot \frac{(-4\cos\theta)^3}{3}\,d\theta = -\frac{64}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = -8\pi$ ✓.
Trampa: con polares en el origen, θ no va de 0 a 2π ni r hasta 2: el disco no contiene al origen en su interior. Y no hay que tachar el signo: el resultado negativo es correcto.

28/6/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región contenida en el primer octante que se encuentra limitada inferiormente por el plano xy y superiormente por la superficie de ecuación $3x^2 + 3y^2 + z = 12$. Grafique H y calcule $\iiint_H y^2\,dxdydz$.

> **Respuesta:** H es el cuarto (primer octante) de la cúpula $0 \le z \le 12 - 3x^2 - 3y^2$; $\iiint_H y^2\,dx\,dy\,dz = \mathbf{4\pi} \approx 12{,}57$.
>
> **El sólido (gráfico):** $3x^2 + 3y^2 + z = 12$ es $z = 12 - 3(x^2 + y^2)$, un paraboloide de revolución alrededor del eje z, con vértice (0, 0, 12) y que abre hacia abajo. Corta al plano xy ($z = 0$) en $x^2 + y^2 = 4$, la circunferencia de radio 2. Entre el plano xy y el paraboloide queda una cúpula maciza; el primer octante ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$) se queda con un cuarto. Para dibujarlo: la base es el cuarto de círculo de radio 2 en el plano xy; las dos caras planas están en los planos $y = 0$ (encerrada por la parábola $z = 12 - 3x^2$, de (0, 0, 12) a (2, 0, 0)) y $x = 0$ (parábola $z = 12 - 3y^2$, de (0, 0, 12) a (0, 2, 0)); y el techo curvo es el trozo de paraboloide que une esas dos parábolas.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, con $|J| = r$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. La base: $r \in [0, 2]$. Altura: $z \in [0, 12 - 3r^2]$. El integrando y^2 pasa a $r^2\,\text{sen}^2\theta$.
> **Planteo:** $\iiint_H y^2\,dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{12 - 3r^2} r^2\,\text{sen}^2\theta \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$.
> **En z:** el integrando no depende de z; la primitiva es $r^3\,\text{sen}^2\theta \cdot z$ y da $r^3\,\text{sen}^2\theta\,(12 - 3r^2)$.
> **En r:** $\int_0^2 (12r^3 - 3r^5)\,dr$, primitiva $3r^4 - \frac{r^6}{2}$, entre 0 y 2 da $48 - 32 = 16$.
> **En θ:** $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\,d\theta$, con $\text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ la primitiva es $\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}$, que entre 0 y π/2 da $\frac{\pi}{4}$.
> **Resultado:** $\iiint_H y^2\,dV = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = \mathbf{4\pi} \approx 12{,}57$.
> **Control por simetría:** H es simétrica respecto del plano $y = x$, así que $\iiint y^2 = \iiint x^2 = \frac{1}{2} \iiint r^2\,dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 r^3(12 - 3r^2)\,dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 16 = 4\pi$ ✓ (y en cartesianas da lo mismo).
> **Trampa:** el integrando final es $r^3\,\text{sen}^2\theta$: r^2 viene de y^2 y el otro r del jacobiano. Y el ángulo va de 0 a π/2, no de 0 a 2π (eso sería toda la cúpula, 16π).

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $y^2 - z = 0$, $x \ge 0$.
Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f}(x, y, z) = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$. Indique en un gráfico la orientación de C empleada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (0, −2, 4) a (0, 2, 4) (y creciente, antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16$ (con la orientación opuesta, −16).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $\text{rot}\,\vec{f} = (e^x - e^x, ye^x - ye^x, ze^x - ze^x) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_x = yze^x$, $\phi = yze^x + h(y, z)$. $\phi'_y = ze^x + h'_y = y + ze^x \Rightarrow h = y^2/2 + k(z)$. $\phi'_z = ye^x + k' = ye^x \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = yze^x + y^2/2$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 4$ con $x \ge 0$ es la media circunferencia derecha y $z = y^2$. $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4\,\text{sen}^2\,t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Extremos A = (0, −2, 4) y B = (0, 2, 4).

Orientación elegida: t creciente, de A a B (y creciente; en el gráfico, antihoraria vista desde arriba, pasando por (2, 0, 0)).
Cuenta: $\phi(B) = 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 = 10$ y $\phi(A) = (-2) \cdot 4 \cdot 1 + 2 = -6$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = 16$ (−16 en el sentido contrario).
Trampa: los dos extremos tienen la misma x y la misma z, pero no da 0: el término yze^x cambia de signo con y.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y), h(3x + 3y) - e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices A = (0, 3), B = (3, 0) y C = (3, 6), recorrido en el sentido A → C → B → A.

Respuesta: La curva se recorre en sentido horario. $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = -\iint_T (-2y)\, dA = \mathbf{54}$.

Planteo: la curva es el borde del triángulo T de vértices A = (0, 3), B = (3, 0) y C = (3, 6), una poligonal cerrada y simple. Como h es una función cualquiera, conviene Green: la parte con h es un gradiente (sobre cada lado vale una diferencia de una primitiva de h y en el triángulo cerrado suma 0), y en el rotor desaparece sola.
Orientación: de A a C se sube por la recta y = 3 + x; de C a B se baja por el lado vertical x = 3; de B a A se vuelve por y = 3 − x. El lado vertical está a la derecha y se recorre hacia abajo, así que el sentido es **horario** (negativo). Control: (C − A) × (B − A) = (3, 3) × (3, −3) = 3·(−3) − 3·3 = −18 < 0. Entonces la circulación pedida es $-\iint_T (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Hipótesis de Green: T es compacta y elemental, con borde cerrado C^1 a trozos; $P = y^2 + h(3x + 3y)$ y $Q = h(3x + 3y) - e^y$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $(x, y) \mapsto 3x + 3y$ es un polinomio.
Rotor: por la regla de la cadena, $P'_y = 2y + 3h'(3x + 3y)$ y $Q'_x = 3h'(3x + 3y)$. Restando, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -2y}$: la h desaparece.
Región: $T = \{(x, y) : 0 \le x \le 3,\ 3 - x \le y \le 3 + x\}$ (las dos rectas por A y el lado x = 3).
Cuenta: $\oint_{\text{horario}} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -\iint_T (-2y)\, dA = \int_0^3 \int_{3-x}^{3+x} 2y\, dy\, dx = \int_0^3 [y^2]_{3-x}^{3+x}\, dx = \int_0^3 ((3 + x)^2 - (3 - x)^2)\, dx = \int_0^3 12x\, dx = [6x^2]_0^3 = 54$.
Otra forma de ver por qué no importa h: $h(3x + 3y)(1, 1) = \nabla(\frac{1}{3} H(3x + 3y))$ con $H' = h$, un gradiente C^1 en $\mathbb{R}^2$, y su circulación sobre una curva cerrada es 0. Lo que queda es $(y^2, -e^y)$, con rotor −2y.
Resultado: $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = \mathbf{54}$.
Trampa: aplicar Green "en automático" con el signo más da −54. El sentido lo fija el orden de los vértices: A → C → B → A es horario y lleva el signo menos.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma: z + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 2y \le 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 1, 1 - 2y)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = -\pi$ (con $\vec{N} = (0, -2y, -1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ que queda sobre la región D: $x^2 + y^2 - 2y \le 0$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: completando cuadrados, $x^2 + y^2 - 2y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \le 1$: **el disco de centro (0, 1) y radio 1**. En polares: $r^2 \le 2r \operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow 0 \le r \le 2 \operatorname{sen}\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 4 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (0, 2y, 1)$.

Orientación: la tercera componente es $1 > 0$, al revés de lo pedido. Cambiamos el signo: $\vec{N} = (0, -2y, -1)$, tercera componente $-1 < 0$ ✓.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(X) = (xy(4 - y^2), 1, 1 - 2y)$. La primera componente (la fea) se multiplica por 0. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 0 + 1\cdot(-2y) + (1 - 2y)(-1) = -2y - 1 + 2y = -1$. Constante.
Cuenta: $\Phi = \iint_D (-1)\, dx\, dy = -\text{área}(D)$. Explícito en polares: $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} (-r)\, dr\, d\theta = -\int_0^{\pi} 2\,\text{sen}^2\theta\, d\theta = -[\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}]_0^{\pi} = -\pi$.
Resultado: $\Phi = -\pi$.
Trampa: el disco tiene radio 1 y centro (0, 1), no radio 2 ni centro en el origen. Y acá no conviene Gauss: $\text{div}\,\vec{f} = yz \neq 0$ y habría que cerrar con tres superficies; el cálculo directo es de una línea.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (y + \varphi(x), x - y, x - z\varphi(x))$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$;
b) el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier bola cerrada sea nulo.

Respuesta: $\varphi(x) = 2e^x - 1$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
b) equivale a $\text{div}\,\vec{f} = 0$: toda bola cerrada B es un sólido acotado cuya frontera ∂B (una esfera) es una superficie cerrada suave, y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial B} \vec{f}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B \text{div}\,\vec{f}\, dV$. Si $\text{div}\,\vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en toda bola. Al revés, si $\text{div}\,\vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como $\text{div}\,\vec{f}$ es continua conserva el signo en una bola chica centrada en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces b) $\Leftrightarrow \text{div}\,\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\text{div}\,\vec{f} = \partial(y + \varphi(x))/\partial x + \partial(x - y)/\partial y + \partial(x - z\varphi(x))/\partial z = \varphi'(x) - 1 - \varphi(x)$.
EDO: $\text{div}\,\vec{f} = 0$ es $\varphi' - \varphi = 1$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^{-x}: $(\varphi e^{-x})' = \varphi' e^{-x} - \varphi e^{-x} = e^{-x}$. Integrando: $\varphi e^{-x} = -e^{-x} + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^x - 1$.
a) Condición inicial: $\vec{f}(0, 1, 1) = (1 + \varphi(0), 0 - 1, 0 - 1\cdot\varphi(0)) = (1 + \varphi(0), -1, -\varphi(0))$. Igualando a $(2, -1, -1)$: $1 + \varphi(0) = 2$ y $-\varphi(0) = -1$, las dos dan $\varphi(0) = 1$ (la segunda componente se cumple sola, así que las condiciones son compatibles). Entonces $K - 1 = 1$, $K = 2$.
Resultado: $\varphi(x) = \mathbf{2e^x - 1}$, que es C^1. Control: $\varphi' - \varphi - 1 = 2e^x - (2e^x - 1) - 1 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$ ✓.
Trampa: cada componente se deriva respecto de su variable: $\partial(x - z\varphi(x))/\partial z = -\varphi(x)$, no $-z\varphi'(x)$. Y la equivalencia flujo nulo en toda bola $\Leftrightarrow \text{div}\,\vec{f} = 0$ tiene dos direcciones: Gauss da una y la continuidad de la divergencia la otra.

25/2/25, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, z, z^2)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12, \sqrt{(2x^2 + y^2)} \leq z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 24\pi$ con normal saliente de H.
>
> **Planteo:** H está dentro de $x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12$ y por encima del cono elíptico $z = \sqrt{(2x^2 + y^2)}$. Su frontera es cerrada (casquete del elipsoide arriba, cono abajo), así que va Gauss.
> **Orientación:** normal saliente de H. En el gráfico: en el casquete superior las flechas apuntan hacia arriba y afuera; en el cono, hacia abajo y afuera.
> **Hipótesis:** $\vec{f} = (-y, z, z^2)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; H es acotado y ∂H es cerrada y suave a trozos (el vértice del cono y la curva donde se cortan las dos superficies no molestan).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial(-y)/\partial x + \partial z/\partial y + \partial(z^2)/\partial z = 0 + 0 + 2z$.
> **Proyección:** hay puntos de H sobre (x, y) si $\sqrt{(2x^2 + y^2)} \leq \sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)} \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 \leq 12 - x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 \leq 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$. Aunque las dos superficies son elípticas, la proyección es el disco D de radio 2.
> **Triple integral:** $\iiint_H 2z\, dV = \iint_D \int_{\sqrt{(2x^2 + y^2)}}^{\sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}} 2z\, dz\, dA$. Primitiva z^2: $[z^2]$ entre los límites $= (12 - x^2 - 2y^2) - (2x^2 + y^2) = 12 - 3(x^2 + y^2)$. En polares: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\, [6r^2 - 3r^4/4]_0^2 = 2\pi\, (24 - 12) = 24\pi$.
> **Resultado:** $\Phi = \mathbf{24\pi}$ con normal exterior.
> **Control directo:** casquete $z = \sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}$ con $\vec{N} = (x/z, 2y/z, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -xy/z + 2y + z^2$, que integra $0 + 0 + \iint (12 - x^2 - 2y^2)\, dA = 48\pi - 4\pi - 8\pi = 36\pi$. Cono con $\vec{N} = (2x/z, y/z, -1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2xy/z + y - (2x^2 + y^2)$, que integra $-8\pi - 4\pi = -12\pi$. Total 24π ✓.
> **Trampa:** ninguna de las dos superficies es de revolución, así que no pases a cilíndricas de entrada. Integrá primero en z (la primitiva z^2 elimina las raíces) y recién con $12 - 3(x^2 + y^2)$ pasá a polares.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2x + yz, 4y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x \geq 0$,
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** C va de (0, 0, 0) a (0, 2, 4). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8$.
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (2x + yz, 4y + xz, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, y $\text{rot}\, \vec{f} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$, así que es un campo de gradientes. Potencial: de $\phi'_x = 2x + yz$, $\phi = x^2 + xyz + h(y, z)$; $\phi'_y = xz + h'_y = 4y + xz \Rightarrow h = 2y^2 + k(z)$; $\phi'_z = xy + k'(z) = xy \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xyz$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 2y$ es la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro (0, 1) y radio 1, y como $x^2 + y^2 = 2y$, la segunda ecuación da $z = x^2 + y^2 = 2y$. Con $x \geq 0$ es la media circunferencia derecha, de extremos (0, 0) y (0, 2) en el plano xy. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (\text{sen}\, t, 1 - \cos t, 2 - 2\cos t)$, $t \in [0, \pi]$ ($x = \text{sen}\, t \geq 0$ ✓).
> **Orientación:** $y(t) = 1 - \cos t$ es creciente en $[0, \pi]$ ($y' = \text{sen}\, t \geq 0$), así que se recorre con t creciente. Entonces se va de A = (0, 0, 0) a B = (0, 2, 4).
> **Cuenta:** $\phi(B) = 0 + 2 \cdot 4 + 0 = 8$ y $\phi(A) = 0$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = 8$.
Trampa: z no es cero en los extremos: en B, z = 2y = 4. Acá el término xyz se anula porque x = 0 en los dos extremos, pero no lo des por hecho sin mirarlo.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación x + y + z = 2 contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Respuesta: $\Phi = 4$ con la normal que se aleja del origen, $\vec{N} = (1, 1, 1)$; con la opuesta, $\Phi = -4$.

Planteo: Σ es el triángulo de vértices (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2). El enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y mostrarla en el dibujo.
Gráfico y orientación elegida: dibujá los tres ejes, marcá los tres vértices sobre ellos y uní con el triángulo. Elegimos la normal que **se aleja del origen** (flecha que sale del triángulo hacia el lado opuesto al origen, o sea hacia afuera del tetraedro que forma con los planos coordenados).
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x\}$ ($z \ge 0$ equivale a $x + y \le 2$). $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)}$.
Orientación: las tres componentes de N son positivas, así que apunta hacia el lado que no contiene al origen: coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 2 - x - y)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = x + y + 2 - x - y = 2$, constante. Entonces $\Phi = 2 \cdot$ área(D), con área(D) = 2.
Cuenta: $\Phi = \int_0^2 \int_0^{2-x} 2 \, dy \, dx = \int_0^2 2(2 - x) \, dx = [4x - x^2]_0^2 = 4$.
Resultado: $\mathbf{\Phi = 4}$ con la normal que se aleja del origen (con la opuesta, $\Phi = -4$).
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1; cerramos con las caras del tetraedro V del primer octante (volumen $2^3/6$). $\operatorname{div} \vec{f} = 3$, $\iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{8}{6} = 4$. En las caras coordenadas el flujo es 0: en x = 0, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -x = 0$, y lo mismo en y = 0 y en z = 0. Así que todo el flujo saliente pasa por Σ: $\Phi = 4$ ✓.
Trampa: el enunciado pide el gráfico con la orientación; sin eso el signo no tiene sentido y el ejercicio queda incompleto.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y),\ h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 3\}$
recorrida en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 36$ (horario).

Planteo: $P = y^2 + h(2x + 2y)$, $Q = h(2x + 2y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
La región: $D = \{|x| \le y \le 3\}$ es el triángulo de vértices (0, 0), (3, 3) y (−3, 3), entre la "V" $y = |x|$ y la recta $y = 3$. Escrita en franjas horizontales: $D = \{0 \le y \le 3,\ -y \le x \le y\}$.
Hipótesis del teorema: P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ ($h \in C^1$ compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y el segmento horizontal) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: por la regla de la cadena, $Q'_x = 2h'(2x + 2y)$ y $P'_y = 2y + 2h'(2x + 2y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{-2y}$ (la h se cancela: $(h(2x + 2y), h(2x + 2y)) = \nabla(H(2x + 2y)/2)$ con $H' = h$).
Doble integral: $\iint_D (-2y) \, dA = \int_0^3 \int_{-y}^{y} (-2y) \, dx \, dy = \int_0^3 -4y^2 \, dy = [-4y^3/3]_0^3 = -36$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(-36) = \mathbf{36}$.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2 \, dx$. En sentido antihorario: por $y = x$ de (0, 0) a (3, 3): $\int_0^3 x^2 \, dx = 9$; por $y = 3$ de (3, 3) a (−3, 3): $\int_3^{-3} 9 \, dx = -54$; por $y = -x$ de (−3, 3) a (0, 0): $\int_{-3}^0 x^2 \, dx = 9$. Total −36, y en horario 36 ✓.

> **Trampa:** el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 3)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por (0, 0). Calcule $\iint_D x \, dxdy$.

> **Respuesta:** Γ: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ (centro (3, 0), radio 3). $\iint_D x \, dxdy = 27\pi$.
>
> **EDO de $\mathscr{F}$:** las curvas $y = k(x - 3)$ son las rectas que pasan por (3, 0). Despejando $k = \dfrac{y}{x - 3}$ y derivando $y = k(x - 3)$: $y' = k = \dfrac{y}{x - 3}$.
>
> **Familia ortogonal $\mathcal{G}$:** $y' = -\dfrac{x - 3}{y}$. Separando: $y \, dy = -(x - 3) \, dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{(x - 3)^2}{2} + k \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = C$. Son las circunferencias centradas en (3, 0), como era de esperar: lo ortogonal a todas las rectas por un punto son las circunferencias con centro en ese punto (el radio es perpendicular a la tangente). Por (0, 0): $C = 9$. **Γ: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$**.
>
> **La región:** D es el disco de centro (3, 0) y radio 3; está todo en $x \geq 0$ y toca al eje y sólo en el origen. $D = \{(x - 3)^2 + y^2 \leq 9\}$.
>
> **Cambio de variables:** $x = 3 + r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, con $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Traslación más polares: jacobiano $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
>
> **Cuenta:** $\iint_D x \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3 + r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \left[\dfrac{r^2}{2}\right]_0^3 + [\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\dfrac{r^3}{3}\right]_0^3 = 3 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{9}{2} + 0$.
>
> **Resultado:** $\iint_D x \, dxdy =$ **27π** (es $\bar{x} \cdot$ área $= 3 \cdot 9\pi$).
>
> **Control con polares en el origen:** $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ es $x^2 + y^2 = 6x$, o sea $r = 6\cos\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{6\cos\theta} r\cos\theta \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{216\cos^4\theta}{3} \, d\theta = \dfrac{216}{3} \cdot \dfrac{3\pi}{8} = 27\pi$ ✓.
>
> **Trampa:** en polares con centro en el origen, el borde es $r = 6\cos\theta$ y no $r = 3$; con $r \leq 3$ y θ de 0 a 2π integrarías sobre un disco centrado en el origen y daría 0. Es el mismo ejercicio que el tema 2, con centro (2, 0).

25/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (z, -x, z^2)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \leq z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 24\pi$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** H está entre el cono elíptico $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ (abajo) y el elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (arriba); su frontera es cerrada. Con la normal exterior, Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (z, -x, z^2)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado (está dentro del elipsoide) y su frontera es cerrada y suave a trozos: el casquete del elipsoide y el pedazo de cono (el vértice en el origen es un punto, no molesta).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x z + \partial_y(-x) + \partial_z(z^2) = 0 + 0 + 2z = 2z$.
> **La región (el paso clave):** en H, $z \geq \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \geq 0$, así que $z^2 \geq x^2 + 2y^2$. Entonces $12 \geq 2x^2 + y^2 + z^2 \geq 2x^2 + y^2 + x^2 + 2y^2 = 3(x^2 + y^2)$, o sea $x^2 + y^2 \leq 4$. Al revés, si $x^2 + y^2 \leq 4$, el intervalo $\sqrt{(x^2 + 2y^2)} \leq z \leq \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$ no es vacío (el radicando de arriba es $\geq 12 - 2 \cdot 4 = 4 > 0$). Las superficies se cortan justo sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Así: $H = \{x^2 + y^2 \leq 4, \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \leq z \leq \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}\}$.
> **Cuenta:** integrando primero en z, la primitiva de $2z$ es z^2: $\int 2z\, dz$ entre el cono y el elipsoide $= (12 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2) = 12 - 3(x^2 + y^2)$. Las raíces desaparecen. Luego, en polares: $\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[6r^2 - \frac{3r^4}{4}]_0^2 = 2\pi(24 - 12) = 24\pi$.
> **Resultado: $\Phi = 24\pi$** saliente.
> **Gráfico:** un "cucurucho": el cono elíptico con vértice en el origen, tapado arriba por el casquete del elipsoide, que se pegan sobre $x^2 + y^2 = 4$. Flechas saliendo: hacia arriba en el casquete y hacia abajo y afuera en el cono.
> **Control por caras:** el casquete del elipsoide aporta 36π y el cono -12π (normal exterior en cada uno): 24π ✓.
> **Trampa:** pasar a esféricas o cilíndricas de entrada: ni el cono ni el elipsoide son de revolución y los límites quedan horribles. Integrar primero en z con primitiva z^2 es lo que simplifica todo; y la proyección sale de eliminar z entre las dos superficies.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (4x + yz, 2y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x \geq 0$,
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** C va de (0, 0, 0) a (0, 4, 16). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16$.
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (4x + yz, 2y + xz, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, y $\text{rot}\, \vec{f} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$. Potencial: de $\phi'_x = 4x + yz$, $\phi = 2x^2 + xyz + h(y, z)$; $\phi'_y = xz + h'_y = 2y + xz \Rightarrow h = y^2 + k(z)$; $\phi'_z = xy + k' = xy \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xyz$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 4y$ es la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, de centro (0, 2) y radio 2, y la segunda ecuación da $z = x^2 + y^2 = 4y$. Con $x \geq 0$ es la media circunferencia derecha, de extremos (0, 0) y (0, 4) en el plano xy. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t, 8 - 8 \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ ($x \geq 0$ ✓).

Orientación: $y(t) = 2 - 2\cos t$ es creciente en $[0, \pi]$, así que se recorre con t creciente: de A = (0, 0, 0) a B = (0, 4, 16).
Cuenta: $\phi(B) = 0 + 16 + 0 = 16$ y $\phi(A) = 0$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16$.
Trampa: el extremo de arriba no es (0, 2): la circunferencia $x^2 + y^2 = 4y$ tiene diámetro 4, así que llega a $y = 4$, y ahí $z = 4y = 16$.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 3$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Respuesta: $\Phi = 27/2$ con la normal que se aleja del origen, $\vec{N} = (1, 1, 1)$; con la opuesta, $\Phi = -27/2$.

Planteo: Σ es el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). El enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y mostrarla en el dibujo.
Gráfico y orientación elegida: dibujá los tres ejes, marcá los tres vértices sobre ellos y uní con el triángulo. Elegimos la normal que **se aleja del origen** (flecha que sale del triángulo hacia el lado opuesto al origen, o sea hacia afuera del tetraedro que forma con los planos coordenados).
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x\}$ ($z \ge 0$ equivale a $x + y \le 3$). $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)$.
Orientación: las tres componentes de N son positivas, así que apunta hacia el lado que no contiene al origen: coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 3 - x - y)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = x + y + 3 - x - y = 3$, constante. Entonces $\Phi = 3 \cdot$ área(D), con área(D) = $\frac{9}{2}$.
Cuenta: $\Phi = \int_0^3 \int_0^{3-x} 3 \, dy \, dx = \int_0^3 3(3 - x) \, dx = \left[9x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = 27 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{27}{2}}$ con la normal que se aleja del origen (con la opuesta, $\Phi = -\frac{27}{2}$).
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1; cerramos con las caras del tetraedro V del primer octante (volumen $3^3/6$). $\operatorname{div} \vec{f} = 3$, $\iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{27}{6} = \frac{27}{2}$. En las caras coordenadas el flujo es 0: en $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -x = 0$, y lo mismo en $y = 0$ y en $z = 0$. Así que todo el flujo saliente pasa por Σ: $\Phi = \frac{27}{2}$ ✓.
Trampa: el enunciado pide el gráfico con la orientación; sin eso el signo no tiene sentido y el ejercicio queda incompleto.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y),\ h(3x + 3y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 2\}$
recorrida en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 32/3$ (horario).

Planteo: $P = y^2 + h(3x + 3y)$, $Q = h(3x + 3y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
La región: $D = \{|x| \le y \le 2\}$ es el triángulo de vértices (0, 0), (2, 2) y (−2, 2). En franjas horizontales: $D = \{0 \le y \le 2,\ -y \le x \le y\}$.
Hipótesis del teorema: P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y el segmento horizontal) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.

Rotor: por la regla de la cadena, $Q'_x = 3h'(3x + 3y)$ y $P'_y = 2y + 3h'(3x + 3y)$. $Q'_x - P'_y =$ **$-2y$** (la h se cancela: $(h(3x + 3y), h(3x + 3y)) = \nabla(H(3x + 3y)/3)$ con $H' = h$).
Doble integral: $\iint_D (-2y)\, dA = \int_0^2 \int_{-y}^{y} (-2y)\, dx\, dy = \int_0^2 -4y^2\, dy = [-4y^3/3]_0^2 = -32/3$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(-32/3) =$ **$32/3$**.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2\, dx$. En sentido antihorario: por $y = x$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$: $8/3$; por $y = 2$ de $(2, 2)$ a $(-2, 2)$: $\int_2^{-2} 4\, dx = -16$; por $y = -x$ de $(-2, 2)$ a $(0, 0)$: $8/3$. Total $-32/3$, y en horario $32/3$ ✓.
Trampa: el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 2)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por $(0, 0)$. Calcule $\iint_D x\, dxdy$.

Respuesta: Γ: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ (centro $(2, 0)$, radio 2). $\iint_D x\, dxdy = 8\pi$.

EDO de $\mathscr{F}$: las curvas $y = k(x - 2)$ son las rectas que pasan por $(2, 0)$. Despejando $k = \dfrac{y}{x - 2}$ y derivando $y = k(x - 2)$: $y' = k = \dfrac{y}{x - 2}$.
Familia ortogonal $\mathcal{G}$: $y' = -\dfrac{x - 2}{y}$. Separando: $y\, dy = -(x - 2)\, dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{(x - 2)^2}{2} + k \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = C$. Son las circunferencias centradas en $(2, 0)$, como era de esperar: lo ortogonal a todas las rectas por un punto son las circunferencias con centro en ese punto (el radio es perpendicular a la tangente). Por $(0, 0)$: $C = 4$. **Γ: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$**.
La región: D es el disco de centro $(2, 0)$ y radio 2; está todo en $x \geq 0$ y toca al eje y sólo en el origen. $D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$.
Cambio de variables: $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Traslación más polares: jacobiano $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
Cuenta: $\iint_D x\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2 + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = 2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 + [\mathrm{sen}\,\theta]_0^{2\pi} \cdot [\frac{r^3}{3}]_0^2 = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{2} + 0$.
Resultado: $\iint_D x\, dxdy =$ **8π** (es $\bar{x} \cdot$ área $= 2 \cdot 4\pi$).
Control con polares en el origen: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = 4x$, o sea $r = 4\cos\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{64\cos^4\theta}{3}\, d\theta = \frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = 8\pi$ ✓.
Trampa: en polares con centro en el origen, el borde es $r = 4\cos\theta$ y no $r = 2$; con $r \leq 2$ y θ de 0 a 2π integrarías sobre un disco centrado en el origen y daría 0. Es el mismo ejercicio que el tema 1, con centro $(3, 0)$.

18/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región triangular de vértices (–2, 4), (0, 0) y (2, 4), suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y): 0 \le y \le 4, -y/2 \le x \le y/2\}$. $M = \frac{208k}{3} \approx 69{,}33k$.
>
> **La región (dibujo):** el triángulo tiene un vértice en el origen y los otros dos a la misma altura, (–2, 4) y (2, 4): es un triángulo isósceles con la punta abajo, simétrico respecto del eje y. Lados: de (0, 0) a (2, 4) la recta $y = 2x$; de (0, 0) a (–2, 4) la recta $y = -2x$; arriba el segmento $y = 4$. Entonces $D = \{2|x| \le y \le 4\}$.
> **Densidad:** el cuadrado de la distancia al origen es $x^2 + y^2$, así que $\delta = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$.
> **Límites (tipo II, conviene):** para cada altura $y \in [0, 4]$, x va del lado izquierdo al derecho: $y = -2x$ da $x = -\frac{y}{2}$ e $y = 2x$ da $x = \frac{y}{2}$. Así sale en un solo tramo: $D = \{0 \le y \le 4, -\frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2}\}$.
> **Integral en x:** primitiva $\frac{x^3}{3} + y^2x$, entre $-\frac{y}{2}$ y $\frac{y}{2}$: $2(\frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{2}) = \frac{y^3}{12} + y^3 = \frac{13y^3}{12}$.
> **Integral en y:** $\int_0^4 \frac{13y^3}{12}\,dy$, primitiva $\frac{13y^4}{48}$, entre 0 y 4: $\frac{13 \cdot 256}{48} = \frac{208}{3}$.
> **Resultado:** $M = \mathbf{\frac{208k}{3}} \approx 69{,}33k$.
> **Control en el otro orden (dy dx):** ahora hay dos tramos, porque el piso es $y = -2x$ para $x \in [-2, 0]$ e $y = 2x$ para $x \in [0, 2]$; el techo es $y = 4$. Por la simetría (D y δ son pares en x) alcanza con duplicar el tramo derecho: $\int_{2x}^4 (x^2 + y^2)\,dy = [x^2y + \frac{y^3}{3}]_{2x}^4 = 4x^2 + \frac{64}{3} - \frac{14x^3}{3}$, y $2\int_0^2 (4x^2 + \frac{64}{3} - \frac{14x^3}{3})\,dx = 2(\frac{32}{3} + \frac{128}{3} - \frac{56}{3}) = \frac{208}{3}$ ✓.
> **Trampa:** en polares el lado $y = 4$ queda $r = \frac{4}{\operatorname{sen}\theta}$ y se complica sin necesidad; el orden dx dy es el natural. Y si integrás primero en y tenés que partir en $x = 0$ (o usar la simetría con criterio, diciendo que D y δ son simétricos).

Ejercicio 2. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2x - \cos(z), y + e^{x^2+z^2}, z)$ sobre la porción de paraboloide $\Sigma : z = 4x^2 + y^2,\ z \le 4$,
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = -8\pi$ (normales con tercera componente positiva).
>
> **Planteo:** Σ: $z = 4x^2 + y^2$, $z \le 4$, es un paraboloide elíptico abierto por arriba; su borde es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ (semiejes 1 en x y 2 en y) a altura 4. El campo trae $e^{x^2+z^2}$, que no tiene primitiva elemental: hacerlo directo es un problema. Cerramos con la tapa T: $z = 4$, $4x^2 + y^2 \le 4$, y usamos Gauss en $H = \{4x^2 + y^2 \le z \le 4\}$.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (2x - \cos z, y + e^{x^2+z^2}, z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (composición de funciones C^∞). $\Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, y acota H. Gauss da el flujo saliente.
> **Orientación:** en Σ la normal con tercera componente positiva apunta hacia adentro de H (el sólido está arriba del paraboloide), así que $\Phi_{\Sigma,\,\text{pedido}} = -\Phi_{\Sigma,\,\text{ext}}$. En T la exterior es (0, 0, 1).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(2x - \cos z) + \partial_y(y + e^{x^2+z^2}) + \partial_z(z) = 2 + 1 + 1 = 4$ (la exponencial no depende de y,

se va).

Volumen: a altura z el corte es $4x^2 + y^2 \le z$, una elipse de semiejes $\frac{\sqrt{z}}{2}$ y $\sqrt{z}$, de área $\pi \cdot \frac{\sqrt{z}}{2} \cdot \sqrt{z} = \frac{\pi z}{2}$. $\text{Vol}(H) = \int_0^4 \frac{\pi z}{2}\, dz = [\frac{\pi z^2}{4}]_0^4 = 4\pi$. Entonces $\iiint_H 4\, dV = 16\pi$.

Tapa: en $z = 4$, $\vec{f} \cdot (0, 0, 1) = z = 4$; el área de $4x^2 + y^2 \le 4$ es $\pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$. $\Phi_T = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$.

Gauss: $\Phi_{\Sigma,\, ext} = 16\pi - 8\pi = 8\pi$.

Resultado: con las normales hacia z^+, $\boldsymbol{\Phi = -8\pi}$.

Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (-8x, -2y, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -16x^2 + 8x \cos z - 2y^2 - 2y\, e^{x^2+z^2} + z$, con $z = 4x^2 + y^2$. Los términos $8x \cos z$ y $-2y\, e^{x^2+z^2}$ son impares en x y en y respectivamente sobre una elipse simétrica: integran 0 (así se esquiva la exponencial). Queda $\iint (-12x^2 - y^2)\, dA$; con $x = \frac{r}{2}\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ ($dA = \frac{r}{2}\, dr\, d\theta$, $r \le 2$): $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (-3r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) \frac{r}{2}\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-3\pi - \pi) = -8\pi$ ✓.

Trampa: quedarse con el $+8\pi$ de Gauss sin dar vuelta el signo: el pedido es con la normal hacia arriba, que en Σ es la interior.

Ejercicio 3. Considere la superficie
$\Sigma : y + x^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le x^2$.
Halle una parametrización de Σ y calcule la integral del campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{(1 + 4x^2)}$ en Σ.

Respuesta: Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le x^2$. $\iint_\Sigma f\, dS = \frac{424}{15} \approx 28{,}27$.

Planteo: $y + x^2 = 4$ es un cilindro parabólico: la parábola $y = 4 - x^2$ del plano xy, trasladada paralela al eje z. Σ es el trozo con $x \ge 0$, $y \ge 0$, entre el plano $z = 0$ y la superficie $z = x^2$. $\iint_\Sigma f\, dS = \iint_D f(\vec{X}(x, z))\, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\|\, dx\, dz$.

Parametrización: como las generatrices son paralelas al eje z, se usan x y z como parámetros: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$.

Dominio D: $x \ge 0$, e $y = 4 - x^2 \ge 0$ da $x \le 2$: $0 \le x \le 2$. Para cada x, $0 \le z \le x^2$. $D = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le x^2\}$.

Vector normal: $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\| = \sqrt{(4x^2 + 1)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Integrando: $f(\vec{X}(x, z)) = \sqrt{(1 + 4x^2)}$, así que $f \cdot \|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\| = 1 + 4x^2$ (la raíz se va).

Cuenta: $\iint = \int_0^2 \int_0^{x^2} (1 + 4x^2)\, dz\, dx$. Integral en z: primitiva $(1 + 4x^2)\, z$, entre 0 y x^2 da $x^2 + 4x^4$. Integral en x: primitiva $\frac{x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}$, entre 0 y 2 da $\frac{8}{3} + \frac{128}{5} = \frac{40 + 384}{15}$.

Resultado: $\iint_\Sigma f\, dS = \boldsymbol{\frac{424}{15}} \approx 28{,}27$.

Control (otra parametrización): con (y, z) como parámetros, $\vec{X}(y, z) = (\sqrt{(4 - y)}, y, z)$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 4 - y$. Ahí la norma es $\sqrt{(1 + \frac{1}{4(4 - y)})}$ y $f = \sqrt{(17 - 4y)}$; integrado numéricamente da 28,2667 ✓.

Trampa: no se puede proyectar sobre el plano xy (el cilindro se ve como la parábola, área 0). Y la cota de z depende de x: el techo es $z = x^2$, no un número.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ con $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y
$\vec{g}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + y,\ 2x^3yz^2,\ 2x^3y^2z)$
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), 6 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

Respuesta: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi$.

El enunciado dice $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ aunque el campo vive en $\mathbb{R}^3$; lo leemos como $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si φ dependiera sólo de (x, y), $\nabla\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, 0)$ sigue siendo un gradiente y el resultado no cambia. **Planteo:** φ es desconocida, así que hay que aprovechar que su gradiente circula 0 en curvas cerradas, y separar lo que es gradiente dentro de $\vec{g}$.
Descomposición: $\nabla(x^3y^2z^2) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2, 2x^3y^2z)$, así que $\vec{g} = \nabla(x^3y^2z^2) + (y, 0, 0)$ y $\vec{f} = \nabla(\varphi + x^3y^2z^2) + (y, 0, 0)$, con $\varphi + x^3y^2z^2$ de clase C^2.
La parte de gradientes: $\vec{\alpha}(0) = (3, 0, 0) = \vec{\alpha}(2\pi)$ y $\vec{\alpha}$ es C^1: la curva es cerrada y $\oint_C \nabla(\varphi + x^3y^2z^2) \cdot d\vec{s} = 0$.
El resto: $\oint_C (y, 0, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen} t)(-3 \operatorname{sen} t)\, dt = -9 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -9\pi$.
Control con el teorema del rotor: $\operatorname{rot}(y, 0, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 6 - 2x$ ($z = 6 - 6\cos t = 6 - 2x$) sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$, recorrida en sentido antihorario visto desde arriba, compatible con la normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -9\pi$ ✓.
Resultado: $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi}$.
Trampa: $\vec{g}$ no es de gradientes (su rotor es $(0, 0, -1)$), así que la circulación no es 0 por ser curva cerrada. El "+ y" de la primera componente es justamente lo que hay que detectar.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva $y = \alpha(x)$ que tiene por extremos los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2, y_1)$, siendo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que cumple la ecuación diferencial $y' + 2xy = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2x + y, x)$ a lo largo de Γ recorrida de A a B.

Respuesta: $\alpha(x) = 1 - e^{-x^2}$, así que $y_1 = 1 - e^{-4}$. Con $\varphi = x^2 + xy$, la circulación de A a B es $\varphi(B) - \varphi(A) = 6 - 2e^{-4} \approx 5{,}963$.

EDO lineal: $y' + 2xy = 2x$ tiene factor integrante $e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2}$. Multiplicando: $(ye^{x^2})' = 2xe^{x^2} \Rightarrow ye^{x^2} = e^{x^2} + C \Rightarrow \mathbf{y = 1 + Ce^{-x^2}}$. (También sale separando: $y' = 2x(1 - y)$.)
Cuál es α: Γ es parte del gráfico de α y tiene extremo $A = (0, 0)$, así que $\alpha(0) = 0$: $1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$. $\boldsymbol{\alpha(x) = 1 - e^{-x^2}}$. Control: $\alpha' = 2xe^{-x^2}$ y $\alpha' + 2x\alpha = 2xe^{-x^2} + 2x - 2xe^{-x^2} = 2x$.
El otro extremo: $B = (2, \alpha(2))$: $\boldsymbol{y_1 = 1 - e^{-4}}$.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (2x + y, x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 1 = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = 2x + y \Rightarrow \varphi = x^2 + xy + h(y)$; $\varphi'_y = x + h' = x \Rightarrow h$ constante. $\boldsymbol{\varphi = x^2 + xy}$.
Circulación: $\varphi(B) - \varphi(A) = 4 + 2(1 - e^{-4}) - 0 = \mathbf{6 - 2e^{-4}} \approx 5{,}963$.
Trampa: la condición inicial no está dicha como "$\alpha(0) = 0$": sale de que $A = (0, 0)$ es extremo de Γ, que está sobre $y = \alpha(x)$. Sin eso, y_1 queda con una constante suelta.

11/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región del plano limitada por las curvas de nivel 4 y 9 de la función $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$, suponiendo que la densidad de masa en cada punto P es proporcional al cuadrado de la distancia entre P y (1, 0).

Respuesta: D: $4 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9$ (corona de centro (1, 0), radios 2 y 3). $M = \dfrac{65\pi k}{2} \approx 102{,}1k$.

Las curvas de nivel: $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$. La curva de nivel 4 es $(x-1)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (1, 0) y radio 2) y la de nivel 9 es $(x-1)^2 + y^2 = 9$ (mismo centro, radio 3).
La región (dibujo): la chapa limitada por las dos es la corona $D = \{4 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9\}$: el anillo entre dos circunferencias concéntricas con centro en (1, 0), no en el origen.
Densidad: el cuadrado de la distancia de $P = (x, y)$ a (1, 0) es $(x-1)^2 + y^2$, así que $\delta(x, y) = k[(x-1)^2 + y^2]$, $k > 0$.
Polares desplazadas: como todo está centrado en (1, 0), uso $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$. Entonces $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, la corona es $2 \le r \le 3$ con $0 \le \theta \le 2\pi$ (rectángulo) y $\delta = kr^2$.
Cuenta: $M = \int_0^{2\pi} \int_2^3 kr^2 \cdot r \, dr \, d\theta$. En r: primitiva $\dfrac{kr^4}{4}$, entre 2 y 3 da $\dfrac{k(81 - 16)}{4} = \dfrac{65k}{4}$. En θ: $\dfrac{65k}{4}$ θ entre 0 y 2π da $\dfrac{65k}{4} \cdot 2\pi$.
Resultado: $M = \boldsymbol{\dfrac{65\pi k}{2}} \approx 102{,}1k$.
Control: masa del disco de radio 3 menos la del de radio 2 (misma densidad): $2\pi k \cdot \dfrac{3^4}{4} - 2\pi k \cdot \dfrac{2^4}{4} = \dfrac{81\pi k}{2} - 8\pi k = \dfrac{65\pi k}{2}$ ✓.
Trampa: las polares comunes (centradas en el origen) no describen esta corona con límites constantes; hay que centrarlas en (1, 0). Y la densidad es la distancia *al cuadrado*: $\delta = kr^2$, que con el jacobiano da kr^3 (no kr^2).

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie Σ de ecuación $z + x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra contenida en el primer octante.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{24} \approx 29{,}33$.

Planteo: Σ es el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ (vértice en (0, 0, 9), abre hacia abajo) restringido a $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| \, dr \, d\theta$.
Parametrización: $X(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 9 - r^2)$.
Dominio D: $z \ge 0$ es $9 - r^2 \ge 0$, o sea $0 \le r \le 3$ (la curva borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano $z = 0$). $x \ge 0$ e $y \ge 0$ dan $0 \le \theta \le \pi/2$. $D = [0, 3] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ ($r \ge 0$). Se anula sólo en $r = 0$, un único punto, que no cambia el área.

Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r\sqrt{(1 + 4r^2)}\, dr\, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\, dr$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37^{3/2} - 1}{12} = \frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Integral en θ: primitiva $\frac{37\sqrt{37} - 1}{12}\,\theta$, entre 0 y π/2 multiplica por $\frac{\pi}{2}$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\frac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{24}} \approx 29{,}33$.

Control (cartesianas): como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\, dx\, dy$ sobre el cuarto de disco $x^2 + y^2 \le 9$, $x, y \ge 0$; integrado numéricamente da 29,3297 ✓.

Trampa: el primer octante también pide $z \ge 0$, y esa es la condición que corta el paraboloide en $r = 3$. Y no te olvides del factor r del módulo: sin él la integral en r ya no tiene primitiva inmediata, señal de que falta algo.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \text{sen}(y^2 z), y + e^{z^2}, 2z)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - y^2, |x| \le 2\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

Respuesta: $\Phi = 512/3$ (normales hacia afuera de H).

Planteo: la frontera de H es cerrada; con la normal exterior, Gauss: $\Phi = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\, dV$. Directo sería inviable por e^{z^2} y $\text{sen}(y^2 z)$.

Hipótesis del teorema: $\vec{f} = (x + \text{sen}(y^2 z), y + e^{z^2}, 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (C^∞). H es acotado: $1 \le 5 - y^2$ obliga a $y^2 \le 4$, o sea $|y| \le 2$, y $|x| \le 2$. Su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 1$, techo $z = 5 - y^2$, y los planos $x = 2$ y $x = -2$. Orientación: normal exterior.

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x(x + \text{sen}(y^2 z)) + \partial_y(y + e^{z^2}) + \partial_z(2z) = 1 + 1 + 2 = 4$.

Cuenta: $\Phi = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{1}^{5-y^2} 4\, dz\, dy\, dx = 4\cdot 4\cdot\int_{-2}^{2}(4 - y^2)\, dy = 16[4y - \frac{y^3}{3}]_{-2}^{2} = 16(16 - \frac{16}{3}) = 16\cdot\frac{32}{3} = \frac{512}{3}$.

Resultado: $\mathbf{\Phi = \frac{512}{3}}$.

Gráfico: un "túnel" de techo parabólico ($z = 5 - y^2$, máximo 5 en $y = 0$) apoyado en el plano $z = 1$, cortado por las paredes $x = \pm 2$; las flechas salen: hacia $(0, 0, -1)$ en el piso, hacia $(\pm 1, 0, 0)$ en las paredes, hacia arriba en el techo.

Control por caras: paredes $x = \pm 2$ (normales $(\pm 1, 0, 0)$): $\vec{f}\cdot(1, 0, 0)$ en $x = 2$ es $2 + \text{sen}(y^2 z)$ y $-\vec{f}\cdot(1, 0, 0)$ en $x = -2$ es $2 - \text{sen}(y^2 z)$; sumadas dan 4 sobre la sección de área $\int_{-2}^{2}(4 - y^2)dy = \frac{32}{3}$: $\frac{128}{3}$. Piso $z = 1$ (normal $(0, 0, -1)$): $-2z = -2$ sobre el cuadrado de área 16: -32. Techo (normal $(0, 2y, 1)$): $2y^2 + 2y\, e^{z^2} + 2(5 - y^2)$; el término con e^{z^2} es impar en y y se anula, queda $10\cdot 16 = 160$. Total $\frac{128}{3} - 32 + 160 = \frac{512}{3}$ ✓.

Trampa: olvidarse de que el piso es $z = 1$ (no $z = 0$): la altura es $5 - y^2 - 1 = 4 - y^2$ y los límites en y son ± 2, no $\pm\sqrt{5}$.

Ejercicio 4. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva
$\Gamma : x^2 + y^2 = 4,\ x - y \ge 0,\ x \le 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para Γ.

Respuesta: $\alpha(y) = 3y$, $\vec{f} = \nabla(3xy^2)$. Con Γ antihoraria, de $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(0, -2)$: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 6\sqrt{2}$ (con la orientación opuesta, $-6\sqrt{2}$).

Condición de gradientes: $P = y\alpha(y)$ y $Q = 2x\alpha(y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{f} = \nabla\phi$ (con $\phi \in C^2$, porque $\vec{f}$ es C^1), por Schwarz $P'_y = Q'_x$: $\alpha(y) + y\alpha'(y) = 2\alpha(y) \Leftrightarrow y\alpha'(y) = \alpha(y)$ para todo y.

La EDO: para $y \neq 0$, $(\alpha/y)' = \dfrac{y\alpha' - \alpha}{y^2} = 0$, así que $\alpha = K_1 y$ en $y > 0$ y $\alpha = K_2 y$ en $y < 0$. Como $\alpha \in C^1$, α' es continua en 0: $\alpha'(0) = K_1$ por derecha y K_2 por izquierda, entonces $K_1 = K_2 = K$ (y $\alpha(0) = 0$ sale de la ecuación en $y = 0$). Queda $\alpha(y) = Ky$. Control: $y \cdot K = Ky$ ✓.

Constante: $\vec{f}(1, 1) = (\alpha(1), 2\alpha(1)) = (K, 2K) = (3, 6) \Rightarrow K = 3$ (las dos componentes dan lo mismo, así que el dato es consistente). $\alpha(y) = 3y$ y $\vec{f} = (3y^2, 6xy)$. Con esto, $P'_y = 6y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes, con potencial $\phi(x, y) = 3xy^2$ ($\phi'_x = 3y^2$, $\phi'_y = 6xy$ ✓).

La curva: circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2 con $y \leq x$ y $x \leq 0$: es el arco del tercer cuadrante entre la recta $y = x$ y el eje y negativo. Extremos: con $y = x$, $2x^2 = 4$ y $x \leq 0$ da $Q_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; con $x = 0$, $y = -2$ (cumple $y \leq x$) da $Q_2 = (0, -2)$. En ángulos, $\theta \in [5\pi/4, 3\pi/2]$.

Orientación elegida: antihoraria, de Q_1 a Q_2 (en el gráfico, la flecha baja desde $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ hasta $(0, -2)$).

Cuenta: $\phi(Q_2) = 3 \cdot 0 \cdot 4 = 0$ y $\phi(Q_1) = 3(-\sqrt{2})(2) = -6\sqrt{2}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(Q_2) - \phi(Q_1) =$ **$6\sqrt{2}$** con Γ antihoraria ($-6\sqrt{2}$ si se la recorre al revés).

Trampa: $x - y \geq 0$ es $y \leq x$ (debajo de la recta), no arriba. Con $x \leq 0$ eso deja un arco chico de 45°, no un cuarto de circunferencia. Y como el enunciado pide indicar la orientación, sin ella el signo no vale.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las condiciones
$x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z - y = 0$, $x \geq 0$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), z, y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ. Indique el sentido de recorrido de la curva utilizado.

Respuesta: Recorriendo Γ de $(0, 0, 0)$ a $(0, 2, 2)$ (pasando por $(1, 1, 1)$), la circulación es 4. En el sentido opuesto es -4.

La curva: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, el cilindro circular de radio 1 y eje $\{x = 0, y = 1\}$; cortado con el plano $z = y$ da una elipse. La condición $x \geq 0$ se queda con la mitad: Γ es un **arco abierto**, cuyos extremos tienen $x = 0$, o sea $(y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0$ o $y = 2$: $A = (0, 0, 0)$ y $B = (0, 2, 2)$. Parametrización: $\vec{X}(t) = (\operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ (ahí $x = \operatorname{sen} t \geq 0$).

Sentido elegido: el de t creciente, de $A = (0, 0, 0)$ a $B = (0, 2, 2)$, pasando por $(1, 1, 1)$.

¿Es de gradientes? $\vec{f} = (\varphi(x), z, y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$) y $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 1, 0 - 0, 0 - 0) = \vec{0}$; como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, $\vec{f}$ es de gradientes. Más directo: si $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s)\,ds$ (existe porque φ es continua), $U(x, y, z) = \Phi(x) + yz$ cumple $\nabla U = (\varphi(x), z, y) = \vec{f}$.

Circulación: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A) = (\Phi(0) + 2 \cdot 2) - (\Phi(0) + 0 \cdot 0) =$ **4**. El $\Phi(0)$ se cancela porque los dos extremos tienen $x = 0$: por eso no hace falta conocer φ.

Control directo: $\vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) = \varphi(\operatorname{sen} t)\cos t + 2(1 - \cos t)\operatorname{sen} t$. La primera parte es $(\Phi(\operatorname{sen} t))'$ y suma $\Phi(\operatorname{sen} \pi) - \Phi(\operatorname{sen} 0) = 0$; la segunda es $((1 - \cos t)^2)'$ y da $(1 - \cos \pi)^2 - 0 = 4$.

Resultado: 4 de $(0, 0, 0)$ a $(0, 2, 2)$; -4 en el sentido contrario.

Trampa: Γ no es cerrada (es media elipse), así que no da 0 aunque el campo sea conservativo. Y hay que indicar el sentido: el enunciado lo pide y el signo depende de eso.

17/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada la curva C parametrizada por
$\vec{\alpha} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\alpha}(t) = (2 - 4\,\text{sen}(t)\cos(t),\ 2\,\text{sen}(t))$
cuyo gráfico es el siguiente
[gráfico: curva cerrada con forma de gota invertida, con un pico en el eje x y la parte redondeada arriba]
indique la orientación dada por la parametrización y calcule el área de la región encerrada por ella.

> **Respuesta:** La parametrización recorre la curva en sentido **horario**. Área = **16/3**.
>
> **La curva:** $\vec{\alpha}(t) = (2 - 4\,\text{sen}\,t\cos t,\ 2\,\text{sen}\,t) = (2 - 2\,\text{sen}(2t),\ 2\,\text{sen}\,t)$. Es cerrada: $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(\pi) = (2, 0)$. Es simple: t y π − t dan la misma altura 2 sen t pero $x = 2 \mp 2\,\text{sen}(2t)$ distintas (salvo en $t = \pi/2$), y en $[0, \pi/2]$ la altura crece. Es C^1 a trozos (en (2, 0) tiene un pico: sale con velocidad (−4, 2) y llega con (−4, −2)).
>
> **Orientación:** $t = 0$: (2, 0); $t = \pi/4$: $(0, \sqrt{2})$; $t = \pi/2$: (2, 2); $t = 3\pi/4$: $(4, \sqrt{2})$; $t = \pi$: (2, 0). Sale del pico hacia la izquierda y arriba, pasa por arriba de izquierda a derecha y baja por la derecha: sentido **horario** (negativo).
>
> **Green para el área:** con $\vec{f} = (0, x)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ y $Q'_x - P'_y = 1$, queda $\text{área}(D) = \oint_{\partial D^+} x\,dy$. Como $\vec{\alpha}$ recorre ∂D en sentido horario, $\int_\alpha x\,dy = -\text{área}(D)$.
>
> **Cuenta:** $x\,y' = (2 - 4\,\text{sen}\,t\cos t)(2\cos t) = 4\cos t - 8\,\text{sen}\,t\cos^2 t$. $\int_0^\pi 4\cos t\,dt = [4\,\text{sen}\,t]_0^\pi = 0$; $\int_0^\pi 8\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,dt = \left[-\frac{8\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$. Entonces $\int_\alpha x\,dy = 0 - \frac{16}{3} = -\frac{16}{3}$ (el signo negativo confirma el sentido horario).
>
> **Control por franjas:** a la altura $y = 2\,\text{sen}\,t$ el ancho es $4\,\text{sen}(2t) = 8\,\text{sen}\,t\cos t = 2y\sqrt{4 - y^2}$, y $\int_0^2 2y\sqrt{4 - y^2}\,dy = \left[-\frac{2}{3}(4 - y^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$ ✓.
>
> **Resultado:** sentido horario; **área = 16/3**.
>
> **Trampa:** el −16/3 no es "un área negativa" que se corrige con módulo sin decir nada: es la marca de que la parametrización es horaria, y hay que decirlo.

Ejercicio 2. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas formada por las lineas de campo de $\vec{g}(x, y) = (x, 4y)$ y sea Γ la curva ortogonal a las curvas de $\mathscr{F}$ que pasa por (0, 1). Calcule
$\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx\,dy$
donde D es la región acotada del plano cuyo borde es Γ.

> **Respuesta:** $\mathscr{F}$: $y = cx^4$ (y el eje y). Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$. $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = 4\pi$.
>
> **Líneas de campo (EDO):** $x' = x$, $y' = 4y$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$. Separando: $\frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 4\ln|x| + c \Rightarrow$ **$y = c\,x^4$** (con $c = 0$ el eje x; además el eje y, $x = 0$, también es línea de campo). La EDO de $\mathscr{F}$ es entonces $y' = \frac{4y}{x}$.
>
> **Ortogonales:** $y' = -\frac{x}{4y}$. Separando: $4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + k \Rightarrow x^2 + 4y^2 = C$. Por (0, 1): $C = 4$. **Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$**, o sea $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Otra forma de verlo: $\nabla(x^2 + 4y^2) = (2x, 8y) = 2\vec{g}$, así que $\vec{g}$ es perpendicular a las curvas de nivel de $x^2 + 4y^2$, y esas curvas de nivel son las ortogonales a las líneas

de campo. En (0, 1) la línea de campo es el eje y y Γ tiene tangente horizontal ✓.

La región: Γ es una elipse acostada centrada en el origen, que corta los ejes en (±2, 0) y (0, ±1). $D = \{x^2 + 4y^2 \le 4\}$.

Cambio de variables: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Jacobiano: $\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$. Y el integrando se simplifica: $x^2 + 4y^2 = 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\theta = 4r^2$.

Cuenta: $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2 \cdot 2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot [2r^4]_0^1 = 2\pi \cdot 2$.

Resultado: $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = \mathbf{4\pi}$.

Control: en cartesianas, para $x \in [-2, 2]$ e $|y| \le \sqrt{(1 - x^2/4)}$, da 4π; y por partes, $\iint_D x^2 = 2\pi$ y $\iint_D 4y^2 = 2\pi$ (por la simetría que arregla el cambio de variables, los dos sumandos pesan igual) ✓.

Trampa: la ortogonal no es una línea de campo de $\vec{g}$: hay que pasar por la EDO de $\mathscr{F}$ y cambiar la pendiente por $-1/y'$. Si integrás las líneas de campo y te quedás ahí, no aparece ninguna curva cerrada.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo

$H : \sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

Respuesta: $M = 81\pi k/16$.

Planteo: $M = \iiint_H \delta\,dV$.

El sólido: $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es el cono de eje z con vértice en el origen que abre hacia arriba (semiapertura 45°). La condición $\sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 3$ es lo de adentro del cono (la parte del "helado") tapado por el plano $z = 3$; cono y plano se cortan en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ a altura 3. Con $x \ge 0$, $y \ge 0$ queda el cuarto del primer octante. Cada corte horizontal a altura z es un cuarto de disco de radio z.

Densidad: distancia al plano xy = $|z| = z$ (en H, $z \ge 0$): $\delta = kz$, con $k > 0$.

Coordenadas: cilíndricas, jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le \pi/2$ (primer cuadrante), $r \le z \le 3$, que pide $r \le 3$, así que $0 \le r \le 3$.

Cuenta: $M = k\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_r^3 z\,r\,dz\,dr\,d\theta$. Primitiva en z: $\frac{z^2}{2}$, entre r y 3: $\frac{r(9 - r^2)}{2}$. Primitiva en r: $\frac{1}{2}\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)$, entre 0 y 3: $\frac{1}{2}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{8}$. Por $\pi/2$ de la integral en θ.

Resultado: $\mathbf{M = \frac{81\pi k}{16}}$.

Control en esféricas: $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, jacobiano $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\varphi = \pi/4$ y lo de adentro es $0 \le \varphi \le \pi/4$; el plano $z = 3$ es $\rho\cos\varphi = 3$, así que $0 \le \rho \le 3/\cos\varphi$; $\theta \in [0, \pi/2]$. La densidad es $k\rho\cos\varphi$. $M = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3/\cos\varphi} \rho^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$. En ρ: $\frac{\rho^4}{4}$ da $\frac{81}{4\cos^4\varphi}$, y queda $\frac{81}{4}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi}$. Primitiva en φ: $\frac{1}{2\cos^2\varphi}$, entre 0 y $\pi/4$: $\frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$. Total: $\frac{81}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{81\pi k}{16}$ ✓.

Trampa: poner $0 \le z \le r$ (eso es lo de afuera del cono) o, en esféricas, $\rho \le 3$ (eso describe la bola de radio 3, no el plano $z = 3$).

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie $\Sigma : z + y^2 = 5,\ y \ge 0,\ 0 \le x \le 2,\ z \ge 1$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido.

Respuesta: Con el borde recorrido $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$ (antihorario visto desde arriba, normal $(0, 2y, 1)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. En el sentido contrario, -4.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x + z$, $Q = y^2 - xy$, $R = y + z^2$: polinomios, $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

La superficie y su borde: Σ es el trozo del cilindro parabólico $z = 5 - y^2$ con $z \geq 1$ (o sea $y^2 \leq 4$, y como $y \geq 0$, $0 \leq y \leq 2$) y $0 \leq x \leq 2$: el gráfico de $z = 5 - y^2$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ del plano xy. Su borde C tiene cuatro tramos: C_1 segmento $y = 0$, $z = 5$, de $(0, 0, 5)$ a $(2, 0, 5)$; C_2 arco de parábola $z = 5 - y^2$ en $x = 2$, de $(2, 0, 5)$ a $(2, 2, 1)$; C_3 segmento $y = 2$, $z = 1$, de $(2, 2, 1)$ a $(0, 2, 1)$; C_4 arco de parábola en $x = 0$, de $(0, 2, 1)$ a $(0, 0, 5)$. Es cerrada y suave a trozos.

Superficie elegida: el borde no está en un plano, así que no hay un trozo de plano que lo tenga como borde; la propia Σ es la cómoda: un gráfico C^1 sobre un rectángulo, suave y orientable. Con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor.

Orientación: tomo $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2y, 1)$, que apunta hacia arriba (tercera componente positiva). Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia arriba los dedos giran en sentido antihorario visto desde arriba, así que el borde se recorre de modo que su proyección da la vuelta a R en sentido antihorario: **C_1 → C_2 → C_3 → C_4**, es decir $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$. En el gráfico: la superficie como un techo que baja de $z = 5$ (sobre $y = 0$) a $z = 1$ (sobre $y = 2$), con flechas en ese orden.

Rotor: $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 0, 1 - 0, -y - 0) =$ **$(1, 1, -y)$**.

Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2y + (-y) \cdot 1 = y$. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \int_0^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 [y^2/2]_0^2 \, dx = \int_0^2 2 \, dx = 4$.

Resultado: recorriendo $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$, **$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$** (en el sentido contrario, -4).

Control: tramo por tramo, C_1 da 12, C_2 da -48, C_3 da -4 y C_4 da 44: suman 4.

Trampa: la normal de $z = 5 - y^2$ es $(0, 2y, 1)$, no $(0, 0, 1)$: el término $2y$ se multiplica con la segunda componente del rotor y con $(0, 0, 1)$ te daría -4.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 4$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x - z^2, y + x^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

Respuesta: $\nabla \cdot \vec{f} = 3$; $\text{vol}(H) = 32/3$; flujo con normales hacia el interior $= -32$.

Planteo: H es el tetraedro limitado por $x + y + z = 4$ y los tres planos coordenados: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4 - x$, $0 \leq z \leq 4 - x - y$. ∂H son cuatro triángulos: superficie cerrada y suave a trozos.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (x - z^2, y + x^2, z)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior, $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}_{ext} \, d\sigma = \iiint_H \nabla \cdot \vec{f} \, dV$; el enunciado pide normales hacia el interior, así que el flujo pedido es menos esa triple.

Divergencia: $\partial/\partial x(x - z^2) + \partial/\partial y(y + x^2) + \partial/\partial z(z) = 1 + 1 + 1 =$ **3**.

Volumen: $\int_0^4 \int_0^{4-x} (4 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^4 \frac{(4 - x)^2}{2} \, dx = \left[-\frac{(4 - x)^3}{6}\right]_0^4 = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3}$.

Cuenta: flujo saliente $= 3 \cdot \frac{32}{3} = 32$.

Resultado: con normales hacia el interior, **flujo = −32**.

Trampa: el signo (normales interiores). Los términos z^2 y x^2 no aportan a la divergencia: z^2 está en la primera componente y se deriva respecto de x, x^2 está en la segunda y se deriva respecto de y.

10/12/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 8, y \geq 0, z \geq 1\}$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\,dxdydz = 16/15$.
>
> **Planteo:** integrar yz sobre $H = \{x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 8, y \geq 0, z \geq 1\}$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de radio 2). $z \geq 1$ deja el casquete de arriba, entre $z = 1$ y la punta $z = \sqrt{2}$, e $y \geq 0$ se queda con la mitad. Cada tajada $z = cte$ es el medio disco $x^2 + y^2 \leq 8 - 4z^2$, $y \geq 0$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. $y \geq 0$ es $\text{sen}\,\theta \geq 0$: $0 \leq \theta \leq \pi$.
> Rangos: $1 \leq z \leq \sqrt{2}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(8 - 4z^2)}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. El integrando con el jacobiano queda $yz \cdot r = z\,r^2\,\text{sen}\,\theta$.
> **Cuenta (por tajadas):** para z fijo, $\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$ y $\int_0^R r^2\,dr = \frac{R^3}{3}$, con $R = \sqrt{(8 - 4z^2)}$.
> Queda $\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} z(8 - 4z^2)^{3/2}\,dz$. Con $u = 8 - 4z^2$, $du = -8z\,dz$; $z = 1 \mapsto u = 4$, $z = \sqrt{2} \mapsto u = 0$: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\int_0^4 u^{3/2}\,du = \frac{1}{12} \cdot [\frac{2}{5}u^{5/2}]_0^4 = \frac{1}{12} \cdot \frac{64}{5} = \frac{16}{15}$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\,dV = \mathbf{\frac{16}{15}}$.
> **Control (orden dz dr dθ):** $0 \leq r \leq 2$ y $1 \leq z \leq \frac{\sqrt{(8 - r^2)}}{2}$. En z: $[\frac{z^2}{2}] = \frac{8 - r^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{4 - r^2}{8}$. Queda $2\int_0^2 r^2 \cdot \frac{4 - r^2}{8}\,dr = \frac{1}{4}[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}]_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{16}{15}$ ✓.
> **Trampa:** el integrando no es constante en θ: $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y por eso la integral en θ da 2 (no π). Y el jacobiano suma otra r: queda r^2, no r.

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(2, 0, 0) \to (0, 2, 0) \to (0, 0, 2) \to (2, 0, 0)$ (antihorario visto desde el primer octante, normal $(1, 1, 1)$): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2$. En el sentido contrario, -2.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 - y$, $Q = 3x^2y^2z^2 + \varphi(y)$, $R = 2x^2y^3z$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. C es el borde del triángulo Σ de vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ y $D = (0, 0, 2)$ (los cortes del plano con los ejes): es cerrada y suave a trozos, tres segmentos.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = 6xy^2z^2 - (6xy^2z^2 - 1) = 1$.
> **$\text{rot}\,\vec{f} = (0, 0, 1)$**: φ(y) no aporta porque su derivada respecto de x (y de z) es 0. Mirado de otra forma, $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, \varphi(y), 0)$, y la parte de gradiente no circula sobre una curva cerrada.
> **Hipótesis del teorema del rotor:** $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$; Σ es un trozo de plano (suave, orientable, acotada) cuyo

borde es C. Uso la propia Σ, que ya es la superficie más cómoda con ese borde: plana y de normal constante.
Orientación: escribo Σ como $z = 2 - x - y$ sobre el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, y tomo la normal hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$. Regla de la mano derecha: con el pulgar en (1, 1, 1), los dedos recorren el borde **A** → **B** → **D** → **A**, que visto desde el primer octante (desde un punto como (5, 5, 5) mirando al origen) es antihorario. En el gráfico: flechas de (2, 0, 0) a (0, 2, 0), de ahí a (0, 0, 2) y de vuelta a (2, 0, 0).
Cuenta: $\text{rot}\,\vec{f} \cdot \vec{N} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1$, así que $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_T 1\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2-x} dy\,dx = \int_0^2 (2 - x)\,dx = [2x - x^2/2]_0^2 = 4 - 2 = 2$.
Resultado: recorriendo A → B → D → A, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2}$ (en el sentido contrario, −2).
Trampa: no hace falta conocer φ ni pelearse con $2xy^3z^2$: el rotor los mata. Si lo hacés por segmentos, la parte con φ en cada tramo depende sólo de los extremos y se cancela al cerrar la vuelta; pero entonces tenés que parametrizar los tres lados con el sentido correcto, que es donde más se pierden puntos.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación
$\vec{X} = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t),\ t \in \mathbb{R}$
contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$. Calcule la longitud de Γ.

Respuesta: Γ: $t \in [-1, 1]$. $L = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)} \approx 6{,}594$.

Planteo: la longitud es $L = \int_\Gamma ds = \int \|\vec{X}'(t)\|\,dt$ sobre el intervalo de t para el cual $\vec{X}(t)$ está en D.
Qué tramo está en D: reemplazando $\vec{X}(t)$ en la desigualdad: $x^2 + y^2 + 2z^2 = \cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t) + 2t^2 = 1 + 2t^2$. Entonces $1 + 2t^2 \leq 3 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$. Γ es una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que va de $\vec{X}(-1) = (-1, 0, -1)$ a $\vec{X}(1) = (-1, 0, 1)$: da una vuelta entera, porque πt recorre $[-\pi, \pi]$.
Rapidez: por la regla de la cadena $\vec{X}'(t) = (-\pi \operatorname{sen}(\pi t), \pi \cos(\pi t), 1)$, y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(\pi^2 \operatorname{sen}^2(\pi t) + \pi^2 \cos^2(\pi t) + 1)} = \sqrt{(\pi^2 + 1)}$, constante. $\vec{X}$ es C^1, inyectiva (la tercera componente es t) y $\vec{X}' \neq \vec{0}$: parametrización regular de Γ.
Cuenta: $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{(\pi^2 + 1)}\,dt = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot t\,|_{-1}^{1} = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot (1 - (-1)) = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)}$.
Resultado: $L = \boldsymbol{2\sqrt{(\pi^2 + 1)}} \approx 6{,}594$.
Trampa: la derivada de cos(πt) y de sen(πt) lleva el factor π. Si te lo olvidás, la rapidez da √2 y $L = 2\sqrt{2}$, que está mal. Y el tramo sale de la región D, no de pedir $0 \leq \pi t \leq 2\pi$.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(y), xh'(y) + \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
recorrido en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D \text{ horario}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{16/3}$.

Planteo: $D = \{x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Las parábolas se cortan donde $x^2 = 2 - x^2$, o sea $x = \pm 1$, en (−1, 1) y (1, 1); entonces $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$, una región compacta y elemental cuyo borde (dos arcos de parábola) es una curva cerrada, simple y C^1 a trozos.
Hipótesis de Green: $P = y^2 + h(y)$ es C^1 porque $h \in C^2$; $Q = x\,h'(y) + \cos(y)$ es C^1 porque $h' \in C^1$ (por eso piden $h \in C^2$ y no sólo C^1). Los dos son C^1 en todo $\mathbb{R}^2$.
Rotor: $P'_y = 2y + h'(y)$, $Q'_x = h'(y)$. Entonces $\boldsymbol{Q'_x - P'_y = -2y}$. (Otra forma: $(h(y), x\,h'(y)) = \nabla(x\,h(y))$ es un gradiente y no aporta circulación sobre una curva cerrada.)
Orientación: se pide **sentido horario**, el negativo para Green: arriba por $y = 2 - x^2$ de izquierda a derecha y abajo por $y = x^2$ de derecha a izquierda. Por eso $\oint_{\text{horario}} = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.

Cuenta: $-\iint_D(-2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} 2y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}[y^2]_{x^2}^{2-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}((2-x^2)^2 - x^4)\,dx = \int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx = [4x - \frac{4x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.
Resultado: $\oint \vec{f}\cdot d\vec{s}$ = **16/3**.
Trampa: el sentido horario cambia el signo de Green; con el antihorario daría –16/3. Y ojo con la derivada de x h′(y) respecto de x: es h′(y), no h″(y).

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (9y, -x)$ que pasa por (0, 1) y está contenida en el semiplano $x - 3y \leq 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

Respuesta: Γ: $x^2 + 9y^2 = 9$ con $x - 3y \leq 0$, de extremos $P_2 = (-3\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $P_1 = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Recorrida en el sentido del campo $\vec{g}$ (horario: de P_2 a P_1 pasando por (–3, 0) y (0, 1)), la circulación es $2\sqrt{2}$; en el sentido opuesto, $-2\sqrt{2}$.

Línea de campo: tangente paralelo a $\vec{g}$: $x' = 9y$, $y' = -x$ (como EDO: $dy/dx = -x/(9y)$, separable: $9y\,dy = -x\,dx$). Entonces $xx' + 9yy' = 9xy - 9xy = 0 \Rightarrow$ **$x^2 + 9y^2 = C$**; por (0, 1): C = 9.
El recorte: la recta x = 3y pasa por el centro de la elipse y la corta donde $9y^2 + 9y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}/2$, $x = 3y$: $P_1 = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $P_2 = (-3\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. El semiplano $x - 3y \leq 0$ contiene a (0, 1) ($0 - 3 \leq 0$), así que Γ es la media elipse "de arriba de la recta", que pasa por (–3, 0) y (0, 1). Parametrización: $\vec{X}(t) = (3\text{sen } t, \cos t)$, $t \in [-3\pi/4, \pi/4]$ (en $t = -3\pi/4$ está P_2, en $t = -\pi/2$ está (–3, 0), en $t = 0$ está (0, 1), en $t = \pi/4$ está P_1).
Sentido elegido (gráfico): el de la línea de campo: $\vec{X}'(t) = (3\cos t, -\text{sen } t) = \vec{g}(\vec{X}(t))/3$. En (0, 1) el campo es (9, 0), hacia la derecha: la elipse se recorre en **sentido horario**, saliendo de P_2 (abajo a la izquierda), subiendo por (–3, 0), pasando por (0, 1) hacia la derecha y llegando a P_1.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 2xy = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = x + xy^2 \Rightarrow \varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + h(y)$; $\varphi'_y = x^2y + h' = 2 + x^2y \Rightarrow h = 2y$. **$\varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + 2y$**.
Circulación: en los dos extremos $x^2 = 9/2$ e $y^2 = 1/2$, así que los dos primeros términos valen lo mismo (9/4 + 9/8) y sólo cuenta 2y: $\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = 2(\sqrt{2}/2) - 2(-\sqrt{2}/2) =$ **$2\sqrt{2}$**. En sentido antihorario (de P_1 a P_2) da $-2\sqrt{2}$.
Trampa: el semiplano no es "y ≥ 0": la recta de corte es x = 3y y los extremos no están sobre los ejes. Y hay que dibujar y decir el sentido, porque cambia el signo.

10/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \le 18,\ y \ge 0,\ z \ge 1\}$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\,dxdydz = 18/5$.
>
> **Planteo:** integrar yz sobre $H = \{x^2 + y^2 + 9z^2 \le 18,\ y \ge 0,\ z \ge 1\}$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 9z^2 = 18$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 9$ (circunferencia de radio 3). $z \ge 1$ deja el casquete de arriba, entre $z = 1$ y la punta $z = \sqrt{2}$, e $y \ge 0$ se queda con la mitad. Cada tajada $z = cte$ es el medio disco $x^2 + y^2 \le 18 - 9z^2$, $y \ge 0$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. $y \ge 0$ es $\text{sen}\,\theta \ge 0$: $0 \le \theta \le \pi$. Rangos: $1 \le z \le \sqrt{2}$, $0 \le r \le \sqrt{(18 - 9z^2)}$, $0 \le \theta \le \pi$. El integrando con el jacobiano queda $z\,r^2\,\text{sen}\,\theta$.
> **Cuenta (por tajadas):** para z fijo, $\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta = 2$ y $\int_0^{R} r^2\,dr = \frac{R^3}{3}$, con $R = \sqrt{(18 - 9z^2)}$. Queda $\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} z(18 - 9z^2)^{3/2}\,dz$. Con $u = 18 - 9z^2$, $du = -18z\,dz$; $z = 1 \mapsto u = 9$, $z = \sqrt{2} \mapsto u = 0$: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}\int_0^{9} u^{3/2}\,du = \frac{1}{27}\cdot\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^{9} = \frac{1}{27}\cdot\frac{486}{5} = \frac{18}{5}$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\,dV = \mathbf{\frac{18}{5}}$.
> **Control (orden dz dr dθ):** $0 \le r \le 3$ y $1 \le z \le \frac{\sqrt{(18 - r^2)}}{3}$. En z: $\left[\frac{z^2}{2}\right] = \frac{18 - r^2}{18} - \frac{9}{18} = \frac{9 - r^2}{18}$. Queda $2\int_0^3 r^2\cdot\frac{9 - r^2}{18}\,dr = \frac{1}{9}\left[3r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left(81 - \frac{243}{5}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{162}{5} = \frac{18}{5}$ ✓.
> **Trampa:** $y = r\,\text{sen}\,\theta$ hace que la integral en θ dé 2 y no π; y con el jacobiano el integrando lleva r^2, no r. En la sustitución, cuidado con que los límites se dan vuelta (u = 9 abajo pasa a ser el de arriba al cambiar el signo).

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f}\cdot\vec{ds}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 + \varphi(x),\ 3x^2y^2z^2 + x,\ 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(3, 0, 0) \to (0, 3, 0) \to (0, 0, 3) \to (3, 0, 0)$ (antihorario visto desde el primer octante, normal $(1, 1, 1)$): $\int_C \vec{f}\cdot\vec{ds} = 9/2$. En el sentido contrario, $-9/2$.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 + \varphi(x)$, $Q = 3x^2y^2z^2 + x$, $R = 2x^2y^3z$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. C es el borde del triángulo Σ de vértices $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $D = (0, 0, 3)$ (los cortes del plano con los ejes): es cerrada y suave a trozos, tres segmentos.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = (6xy^2z^2 + 1) - (6xy^2z^2) = 1$. **$\text{rot}\,\vec{f} = (0, 0, 1)$**: $\varphi(x)$ no aporta porque su derivada respecto de y (y de z) es 0. Mirado de otra forma, $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (\varphi(x), x, 0)$, y la parte de gradiente no circula sobre una curva cerrada.

Hipótesis del teorema del rotor: $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$; Σ es un trozo de plano (suave, orientable, acotada) cuyo borde es C. Uso la propia Σ, que ya es la superficie más cómoda con ese borde: plana y de normal constante.
Orientación: escribo Σ como $z = 3 - x - y$ sobre el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$, y tomo la normal hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$. Regla de la mano derecha: con el pulgar en (1, 1, 1), los dedos recorren el borde **A** → **B** → **D** → **A**, que visto desde el primer octante (desde un punto como (5, 5, 5) mirando al origen) es antihorario. En el gráfico: flechas de (3, 0, 0) a (0, 3, 0), de ahí a (0, 0, 3) y de vuelta a (3, 0, 0).
Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1$, así que $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \iint_T 1 \, dx \, dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} dy \, dx = \int_0^3 (3 - x) \, dx = [3x - x^2/2]_0^3 = 9 - 9/2 = 9/2$.
Resultado: recorriendo A → B → D → A, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 9/2}$ (en el sentido contrario, −9/2).
Trampa: no hace falta conocer φ ni pelearse con $2xy^3z^2$: el rotor los mata. Si lo hacés por segmentos, la parte con φ en cada tramo depende sólo de los extremos y se cancela al cerrar la vuelta; pero entonces tenés que parametrizar los tres lados con el sentido correcto, que es donde más se pierden puntos.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación
$\vec{X} = (\operatorname{sen}(\pi t), \cos(\pi t), t)$, $t \in \mathbb{R}$
contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4$. Calcule la longitud de Γ.

Respuesta: Γ: $t \in [-1, 1]$. $L = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)} \approx 6{,}594$.

Planteo: la longitud es $L = \int_\Gamma ds = \int \|\vec{X}'(t)\| \, dt$ sobre el intervalo de t para el cual $\vec{X}(t)$ está en D.
Qué tramo está en D: reemplazando X(t) en la desigualdad: $x^2 + y^2 + 3z^2 = \operatorname{sen}^2(\pi t) + \cos^2(\pi t) + 3t^2 = 1 + 3t^2$. Entonces $1 + 3t^2 \leq 4 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$. Γ es una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que va de $\vec{X}(-1) = (0, -1, -1)$ a $\vec{X}(1) = (0, -1, 1)$: da una vuelta entera, porque πt recorre $[-\pi, \pi]$.
Rapidez: por la regla de la cadena $\vec{X}'(t) = (\pi \cos(\pi t), -\pi \operatorname{sen}(\pi t), 1)$, y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(\pi^2 \operatorname{sen}^2(\pi t) + \pi^2 \cos^2(\pi t) + 1)} = \sqrt{(\pi^2 + 1)}$, constante. $\vec{X}$ es C^1, inyectiva (la tercera componente es t) y $\vec{X}' \neq 0$: parametrización regular de Γ.
Cuenta: $L = \int_{-1}^1 \sqrt{(\pi^2 + 1)} \, dt = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot t \,|_{-1}^1 = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot (1 - (-1)) = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)}$.
Resultado: $L = \boldsymbol{2\sqrt{(\pi^2 + 1)}} \approx 6{,}594$.
Trampa: la derivada de cos(πt) y de sen(πt) lleva el factor π. Si te lo olvidás, la rapidez da √2 y $L = 2\sqrt{2}$, que está mal. Y el tramo sale de la región D, no de pedir $0 \leq \pi t \leq 2\pi$.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(y) - y^2, xh'(y) - \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3 - x^2\}$
recorrido en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -64/5$ (horario).

Planteo: $P = h(y) - y^2$, $Q = xh'(y) - \cos(y)$, con $h \in C^2(\mathbb{R})$. Sin conocer h no se puede parametrizar: Green.
La región: $2x^2 \leq 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1$, así que $D = \{-1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 3 - x^2\}$, entre la parábola de abajo $y = 2x^2$ y la de arriba $y = 3 - x^2$, que se cortan en (±1, 2).
Hipótesis del teorema: $h \in C^2$ implica $h' \in C^1$, entonces $Q = xh'(y) - \cos y$ es C^1; P también. $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$. D es una región elemental y su borde (dos arcos de parábola) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: $Q'_x = h'(y)$, $P'_y = h'(y) - 2y$, $Q'_x - P'_y = 2y$ (la h se va: $(h(y), xh'(y)) = \nabla(x\,h(y))$).
Doble integral: $\iint_D 2y \, dA = \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{3-x^2} 2y \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [y^2]_{2x^2}^{3-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^4) \, dx =$

$2[9x - 2x^3 - 3x^5/5]_0^1 = 2(9 - 2 - 3/5) = 64/5$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-64/5}$.
Control (la otra cara): $(h(y), xh'(y)) = \nabla(x\,h(y))$ y $(0, -\cos y) = \nabla(-\operatorname{sen} y)$ no aportan; queda $\oint -y^2\,dx$. Antihorario: abajo $y = 2x^2$, x de -1 a 1: $\int_{-1}^{1} -4x^4\,dx = -8/5$; arriba $y = 3 - x^2$, x de 1 a -1: $\int_{1}^{-1} -(3 - x^2)^2\,dx = 72/5$. Total $64/5$, y en horario $-64/5$ ✓.
Trampa: la hipótesis $h \in C^2$ no es decorativa: es la que garantiza que Q (que tiene h') sea C^1, y hay que decirlo para poder usar Green.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por $(1, 0)$ y está contenida en el semiplano $3x - y \geq 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

Respuesta: Γ: $9x^2 + y^2 = 9$ con $3x - y \geq 0$, de extremos $Q_2 = (-\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$ y $Q_1 = (\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$. Recorrida en el sentido del campo $\vec{g}$ (antihorario: de Q_2 a Q_1 pasando por $(0, -3)$ y $(1, 0)$), la circulación es $6\sqrt{2}$; en el sentido opuesto, $-6\sqrt{2}$.

Línea de campo: tangente paralelo a $\vec{g}$: $x' = -y$, $y' = 9x$ (como EDO: $dy/dx = -9x/y$, separable: $y\,dy = -9x\,dx$). Entonces $9xx' + yy' = -9xy + 9xy = 0 \Rightarrow \mathbf{9x^2 + y^2 = C}$; por $(1, 0)$: $C = 9$.
El recorte: la recta $y = 3x$ pasa por el centro y corta la elipse donde $9x^2 + 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2$, $y = 3x$: $Q_1 = (\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ y $Q_2 = (-\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$. El semiplano $3x - y \geq 0$ contiene a $(1, 0)$ $(3 \geq 0)$, así que Γ es la media elipse "a la derecha de la recta", que pasa por $(0, -3)$ y $(1, 0)$. Parametrización: $\vec{X}(t) = (\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $t \in [-3\pi/4, \pi/4]$ ($t = -3\pi/4$: Q_2; $t = -\pi/2$: $(0, -3)$; $t = 0$: $(1, 0)$; $t = \pi/4$: Q_1).
Sentido elegido (gráfico): el de la línea de campo: $\vec{X}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 3\cos t) = \vec{g}(\vec{X}(t))/3$. En $(1, 0)$ el campo es $(0, 9)$, hacia arriba: **sentido antihorario**, saliendo de Q_2 (abajo a la izquierda), bajando a $(0, -3)$, pasando por $(1, 0)$ hacia arriba y llegando a Q_1.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 2xy = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = x + xy^2 \Rightarrow \varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + h(y)$; $\varphi'_y = x^2y + h' = 2 + x^2y \Rightarrow h = 2y$. $\boldsymbol{\varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + 2y}$.
Circulación: en los dos extremos $x^2 = 1/2$ e $y^2 = 9/2$, así que los dos primeros términos valen lo mismo $(1/4 + 9/8)$ y sólo cuenta $2y$: $\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2) = 2(3\sqrt{2}/2) - 2(-3\sqrt{2}/2) = \mathbf{6\sqrt{2}}$. En sentido horario (de Q_1 a Q_2) da $-6\sqrt{2}$.
Trampa: el semiplano lo define la recta $y = 3x$, no el eje y: los extremos son Q_1 y Q_2, no $(0, \pm 3)$. Y sin indicar el sentido la respuesta no está completa.

13/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 4y \le 0$ y $0 \le z \le x$.

> **Respuesta:** $V = 16/3$.
>
> **Planteo:** la base es $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ y en altura $0 \le z \le x$; $V = \iint$ (techo − piso) $dxdy = \iint x\, dxdy$ sobre la parte de la base donde ese intervalo no es vacío.
> **El sólido:** $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ equivale a $x^2 + (y-2)^2 \le 4$: disco de centro (0, 2) y radio 2, tangente al eje x en el origen. La condición $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, así que H vive sobre la **mitad derecha** del disco ($x \ge 0$). Es una cuña: el piso es el plano $z = 0$, el techo el plano oblicuo $z = x$ (que contiene al eje y), y los costados la superficie cilíndrica. Sobre el diámetro $x = 0$ la altura es 0, y crece hasta 2 en el punto (2, 2).
> **Coordenadas:** cilíndricas corridas al centro, $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le r \le 2$; $x \ge 0$ equivale a $\cos\theta \ge 0$, o sea $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$; $0 \le z \le r\cos\theta$.
> **Cuenta:** $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r\cos\theta} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^2 r^2\, dr$. Primitivas: sen θ, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ da 2; $\frac{r^3}{3}$, entre 0 y 2 da $\frac{8}{3}$.
>
> **Resultado: $V = \frac{16}{3}$.**
>
> **Control (cartesianas, primero x):** para $y \in [0, 4]$, x va de 0 a $\sqrt{(4y - y^2)}$ (la mitad derecha del disco). $V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{(4y-y^2)}} x\, dx\, dy = \int_0^4 \frac{4y - y^2}{2}\, dy$; primitiva $\frac{1}{2}(2y^2 - \frac{y^3}{3})$, entre 0 y 4: $\frac{1}{2}(32 - \frac{64}{3}) = \frac{16}{3}$ ✓.
> **Trampa:** integrar x sobre el disco entero da 0 por simetría: es la señal de que se metió la mitad $x < 0$, donde $0 \le z \le x$ no tiene puntos.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (3\cos(t), 3\,\text{sen}(t), 3 - 3\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (g(x) + yz, xz + 2x, xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

> **Respuesta:** La circulación es 18π (no depende de g).
>
> **La curva:** $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$, y $z = 3 - 3\cos t = 3 - x$. Γ es la elipse intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ con el plano $x + z = 3$, y es **cerrada**: $\vec{X}(0) = \vec{X}(2\pi) = (3, 0, 0)$. Con t creciente, su proyección sobre el plano xy gira en sentido antihorario.
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (g(x) + yz, xz + 2x, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, (z + 2) - z) = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$. **No** es de gradientes.
> **Descomposición:** $\vec{f} = (g(x) + yz, xz, xy) + (0, 2x, 0) = \nabla U + \vec{h}$, con $U = G(x) + xyz$ y G una primitiva de g. Control: $\nabla U = (g(x) + yz, xz, xy)$.
> **Parte de gradientes:** U es C^1 y Γ es cerrada: $\oint_\Gamma \nabla U \cdot d\vec{s} = U(\vec{X}(2\pi)) - U(\vec{X}(0)) = 0$, sea cual sea g.
> **El resto:** $\oint_\Gamma \vec{h} \cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma 2x\, dy = \int_0^{2\pi} 2(3\cos t)(3\cos t)\, dt = 18\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 18\pi$.
> **Control con Stokes:** f es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ: el pedazo del plano $z = 3 - x$ adentro del cilindro, sobre $D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$, con normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 0, 1)$, hacia arriba, compatible con el giro antihorario de Γ vista

desde arriba. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (1, 0, 1)\, dx\, dy = 2 \cdot 9\pi = 18\pi$. ✓
Resultado: 18π.
Trampa: el término 2x de la segunda componente hace que $Q'_x - P'_y = 2$; contestar 0 “porque es cerrada” sólo vale para campos de gradientes.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
$\Sigma : z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 1$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4} \approx 9{,}996$.

Planteo: $z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono con vértice en (0, 0, 4) que abre hacia abajo. Σ es la parte con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 1$: un cuarto de cono entre el vértice y la altura $z = 1$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 4 - r)$.
Dominio D: $z \geq 1$ es $4 - r \geq 1$, o sea $0 \leq r \leq 3$. $x \geq 0$ e $y \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$. $D = [0, 3] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r \cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\, r$. Sólo se anula en el vértice ($r = 0$), un punto que no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 0 y 3 da $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$. Integral en θ: multiplica por $\dfrac{\pi}{2}$. $A = \dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4}} \approx 9{,}996$.
Control geométrico: el cono completo tiene radio de base 3 y generatriz $g = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = 3\sqrt{2}$; su área lateral es $\pi R g = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\,\pi$, y Σ es la cuarta parte ✓. También: como gráfica $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de disco de radio 3, de área $\dfrac{9\pi}{4}$ ✓.
Trampa: como el cono abre hacia abajo, $z \geq 1$ es $r \leq 3$ (la parte de arriba, cerca del vértice), no $r \geq 3$. Y el área no es la de la proyección: falta el factor $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (x - y\varphi(2xy), 3x - x\varphi(2xy) + y^2)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4y^2 + 8y + x^2 = 0$ contenido en el semiplano $x \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Respuesta: Sentido elegido: de (0, 0) a (0, −2) pasando por (2, −1) (horario). $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -3\pi - 8/3 \approx -12{,}09$. Con el sentido opuesto: $3\pi + 8/3$.

Planteo: $P = x - y\varphi(2xy)$, $Q = 3x - x\varphi(2xy) + y^2$; con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ ambas son C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Rotor escalar: $Q'_x = 3 - \varphi(2xy) - 2xy\, \varphi'(2xy)$ y $P'_y = -\varphi(2xy) - 2xy\, \varphi'(2xy)$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3}$. La parte con φ, $-\varphi(2xy)(y\, dx + x\, dy)$, es un gradiente (de $-\dfrac{1}{2}\Phi(2xy)$ con $\Phi' = \varphi$), por eso se va.
La curva: $4y^2 + 8y + x^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + (y + 1)^2 = 1$: elipse de centro (0, −1), semiejes 2 en x y 1 en y, que pasa por (0, 0) y (0, −2).
Sentido elegido (el gráfico): la media elipse derecha, con la flecha saliendo del origen, bajando por (2, −1) y llegando a (0, −2): **sentido horario**.
Cierre e hipótesis: agrego el segmento S del eje y de (0, −2) a (0, 0). $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple, C^1 a trozos, y es el borde de la media elipse $D = \{\dfrac{x^2}{4} + (y + 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$, región regular; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$.
El borde queda recorrido en sentido horario, así que $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 3\, dA = -3 \cdot \text{área}(D) = -3 \cdot$

$\frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2} = -3\pi$.

Segmento: S: (0, t), t de −2 a 0. $\vec{f}(0, t) = (-t\varphi(0), t^2)$; con derivada (0, 1), $\int_S = \int_{-2}^{0} t^2\, dt = [\frac{t^3}{3}]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -3\pi - \frac{8}{3}$ = **$-3\pi - 8/3$** ≈ −12,09. Si en el gráfico elegís el otro sentido (de (0, −2) a (0, 0), antihorario) el resultado cambia de signo: 3π + 8/3.

Trampa: el enunciado no fija el sentido, por eso pide el gráfico: sin la flecha dibujada el número no significa nada. Y el segmento se resta con la orientación con la que cerraste.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(x)\vec{g}(x, y)$. con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (2 + 3x\cos(y), -x^2\text{sen}(y))$. Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(1, \pi/2) = (2, -1)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $h(x) = x$; $\vec{f} = (2x + 3x^2\cos y, -x^3 \text{ sen } y)$; potenciales $U(x, y) = x^2 + x^3\cos y + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (h(x)(2 + 3x\cos y), -h(x)x^2 \text{ sen } y)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

Condición necesaria: $P'_y = -3x\,h(x) \text{ sen } y$; $Q'_x = -\text{sen } y\cdot(2x\,h + x^2h')$ (regla del producto). Igualando: $x \text{ sen } y\cdot(x\,h' - h) = 0$ para todo (x, y). Con $y = \pi/2$ queda $x(xh' - h) = 0$, o sea **$x\,h'(x) = h(x)$** para $x \neq 0$.

Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(h/x)' = \frac{xh' - h}{x^2} = 0$, así que h/x es constante en cada semirrecta: $h(x) = c_1x$ para $x > 0$ y $h(x) = c_2x$ para $x < 0$ (y $h(0) = 0$ por continuidad). Como h es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$h(x) = cx$** en todo $\mathbb{R}$.

Dato: $\vec{f}(1, \pi/2) = h(1)\cdot(2 + 3\cdot 0, -1\cdot 1) = (2h(1), -h(1)) = (2, -1) \Rightarrow h(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. **$h(x) = x$**.

Suficiencia: $\vec{f} = (2x + 3x^2\cos y, -x^3 \text{ sen } y)$ cumple $P'_y = -3x^2 \text{ sen } y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes.

Potenciales: $U'_x = 2x + 3x^2\cos y \Rightarrow U = x^2 + x^3\cos y + k(y)$. Derivando en y: $-x^3 \text{ sen } y + k'(y) = -x^3 \text{ sen } y \Rightarrow k' = 0$, $k = K$. Resultado: **$U(x, y) = x^2 + x^3\cos y + K$**, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: la EDO sale dividiendo por x, que no vale en x = 0, y el dato en x = 1 sólo fija la constante de las x positivas. Lo que obliga a que sea la misma recta en todo $\mathbb{R}$ es que h sea derivable en 0. Y “todas” pide la constante K.

13/8/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 6y \le 0$ y $0 \le z \le x$.

> **Respuesta:** $V = 18$.
>
> **Planteo:** la base es $x^2 + y^2 - 6y \le 0$ y en altura $0 \le z \le x$; $V = \iint$ (techo − piso) dxdy $= \iint x\, dxdy$ sobre la parte de la base donde ese intervalo no es vacío.
> **El sólido:** $x^2 + y^2 - 6y \le 0$ equivale a $x^2 + (y-3)^2 \le 9$: disco de centro (0, 3) y radio 3, tangente al eje x en el origen. La condición $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, así que H vive sobre la **mitad derecha** del disco ($x \ge 0$). Es una cuña: el piso es el plano $z = 0$, el techo el plano oblicuo $z = x$ (que contiene al eje y), y los costados la superficie cilíndrica. Sobre el diámetro $x = 0$ la altura es 0, y crece hasta 3 en el punto (3, 3).
> **Coordenadas:** cilíndricas corridas al centro, $x = r\cos\theta$, $y = 3 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le r \le 3$; $x \ge 0$ equivale a $\cos\theta \ge 0$, o sea $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$; $0 \le z \le r\cos\theta$.
> **Cuenta:** $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{r\cos\theta} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^3 r^2\, dr$. Primitivas: sen θ, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ da 2; $\frac{r^3}{3}$, entre 0 y 3 da 9.
>
> **Resultado: $V = 18$.**
> **Control (cartesianas, primero x):** para $y \in [0, 6]$, x va de 0 a $\sqrt{(6y - y^2)}$ (la mitad derecha del disco). $V = \int_0^6 \int_0^{\sqrt{(6y-y^2)}} x\, dx\, dy = \int_0^6 \frac{6y - y^2}{2}\, dy$; primitiva $\frac{1}{2}(3y^2 - \frac{y^3}{3})$, entre 0 y 6: $\frac{1}{2}(108 - 72) = 18$ ✓.
> **Trampa:** integrar x sobre el disco entero da 0 por simetría: es la señal de que se metió la mitad $x < 0$, donde $0 \le z \le x$ no tiene puntos.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 2 - 2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz - 2y, xz + g(y), xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

> **Respuesta:** La circulación es 8π (no depende de g).
>
> **La curva:** $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, y $z = 2 - 2\cos t = 2 - x$. Γ es la elipse intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $x + z = 2$, y es **cerrada**: $\vec{X}(0) = \vec{X}(2\pi) = (2, 0, 0)$. Con t creciente, su proyección sobre el plano xy gira en sentido antihorario.
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (yz - 2y, xz + g(y), xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, z - (z - 2)) = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$. **No** es de gradientes: no se puede usar un potencial para todo f.
> **Descomposición:** $\vec{f} = (yz, xz + g(y), xy) + (-2y, 0, 0) = \nabla U + \vec{h}$, con $U = xyz + G(y)$ y G una primitiva de g (existe porque g es continua). Control: $\nabla U = (yz, xz + g(y), xy)$.
> **Parte de gradientes:** U es C^1 y Γ es cerrada, así que $\oint_\Gamma \nabla U \cdot d\vec{s} = U(\vec{X}(2\pi)) - U(\vec{X}(0)) = 0$. Por eso g no importa.
> **El resto:** $\oint_\Gamma \vec{h} \cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma -2y\, dx = \int_0^{2\pi} -2(2\,\mathrm{sen}\,t)(-2\,\mathrm{sen}\,t)\, dt = 8\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t\, dt = 8\pi$.
> **Control con Stokes:** f es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Tomo Σ: el pedazo del plano $z = 2 - x$ adentro del cilindro, parametrizado por $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$, con normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 0, 1)$, de componente z positiva: es la compatible con Γ girando antihorario vista desde arriba (regla de la mano derecha). $\iint_\Sigma$

rot f · n dS = $\iint_D$ (0, 0, 2) · (1, 0, 1) dx dy = 2·área(D) = 2·4π = 8π. ✓
Resultado: 8π.
Trampa: el −2y rompe la simetría: la tercera componente del rotor es 2, no 0. Ver "casi gradiente" y contestar 0 es el error clásico.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
Σ : $z = 9 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 5$.

Respuesta: $A(\Sigma) = 4\sqrt{2}\,\pi \approx 17{,}77$.

Planteo: $z = 9 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono con vértice en (0, 0, 9) que abre hacia abajo. Σ es la parte con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 5$: un cuarto de cono entre el vértice y la altura $z = 5$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 9 - r)$.
Dominio D: $z \geq 5$ es $9 - r \geq 5$, o sea $0 \leq r \leq 4$. $x \geq 0$ e $y \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$. $D = [0, 4] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\, r$. Sólo se anula en el vértice ($r = 0$), un punto que no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 0 y 4 da $\frac{16\sqrt{2}}{2}$. Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{2}$. $A = \frac{16\sqrt{2}\,\pi}{4}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{4\sqrt{2}\,\pi} \approx 17{,}77$.
Control geométrico: el cono completo tiene radio de base 4 y generatriz $g = \sqrt{(4^2 + 4^2)} = 4\sqrt{2}$; su área lateral es $\pi R g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\,\pi$, y Σ es la cuarta parte ✓. También: como gráfica $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de disco de radio 4, de área $\frac{16\pi}{4}$ ✓.
Trampa: como el cono abre hacia abajo, $z \geq 5$ es $r \leq 4$ (la parte de arriba, cerca del vértice), no $r \geq 4$. Y el área no es la de la proyección: falta el factor $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (3y - y\varphi(2xy) + x^2,\ y - x\varphi(2xy))$ con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ contenido en el semiplano $y \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Respuesta: Recorriendo el arco de (0, 0) a (−2, 0) por (−1, 2) (antihorario): $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-3\pi - 8/3} \approx -12{,}09$. En el sentido contrario, $3\pi + 8/3$.

La curva: $4x^2 + 8x + y^2 = 0 \Leftrightarrow 4(x + 1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$: elipse de centro (−1, 0), semiejes 1 (en x) y 2 (en y). Con $y \geq 0$ queda la mitad de arriba, que une (0, 0) con (−2, 0) pasando por (−1, 2).
Sentido elegido (el "gráfico"): de (0, 0) a (−2, 0) pasando por (−1, 2), o sea antihorario.
Parametrización: $(-1 + \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
Cerrar la curva: agrego el segmento S de (−2, 0) a (0, 0) sobre el eje x. Arco más S es el borde de la media elipse $D = \{(x + 1)^2 + y^2/4 \leq 1,\ y \geq 0\}$ en sentido **positivo**. D es compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos; $\text{área}(D) = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 2}{2} = \pi$.
Hipótesis de Green: $\varphi \in C^1$ y $(x, y) \mapsto 2xy$ es polinomial, así que $\varphi(2xy)$ es C^1; $P = 3y - y\varphi(2xy) + x^2$ y $Q = y - x\varphi(2xy)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Rotor (regla de la cadena): $P'_y = 3 - \varphi(2xy) - y \cdot \varphi'(2xy) \cdot 2x = 3 - \varphi - 2xy\varphi'$; $Q'_x = -\varphi(2xy) - x \cdot \varphi'(2xy) \cdot 2y = -\varphi - 2xy\varphi'$. Restando: $\mathbf{Q'_x - P'_y = -3}$; los términos con φ se cancelan.
Green: $\oint_{\text{arco} \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (-3)\, dA = -3\pi$.

El segmento: $\sigma(t) = (t, 0)$, $-2 \le t \le 0$, $\sigma' = (1, 0)$. Con $y = 0$, $P(t, 0) = t^2$ (los dos términos con φ van multiplicados por y): $\int_S \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{-2}^{0} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$.

Resultado: $\int_{\text{arco}} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -3\pi - \frac{8}{3} \approx -12{,}09$. Si se elige el sentido de $(-2, 0)$ a $(0, 0)$, da **$3\pi + 8/3$**.

Otra mirada: $-\varphi(2xy)(y, x) = \nabla\left(-\frac{1}{2}\Phi(2xy)\right)$ con $\Phi' = \varphi$: es un gradiente, y en los dos extremos del arco $2xy = 0$, así que aporta $\Phi(0) - \Phi(0) = 0$. Queda la circulación de $(3y + x^2, y)$ sobre el arco, que parametrizando da lo mismo.

Trampa: el segmento no da 0: el x^2 de P sobrevive con $y = 0$. Y φ desaparece del segmento porque va multiplicada por y, no porque $\varphi(0)$ sea 0.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(y)\vec{g}(x, y)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (-y^2\text{sen}(x), 2 + 3y\cos(x))$.
Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(\pi/2, 1) = (-1, 2)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $h(y) = y$; $\vec{f} = (-y^3 \text{ sen } x, 2y + 3y^2 \cos x)$; potenciales $U(x, y) = y^3 \cos x + y^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (-h(y)y^2 \text{ sen } x, h(y)(2 + 3y \cos x))$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

Condición necesaria: $P'_y = -\text{sen } x\cdot(y^2h' + 2y\, h)$ (regla del producto, h depende de y); $Q'_x = -3y\, h(y) \text{ sen } x$. Igualando: $y \text{ sen } x\cdot(y\, h' - h) = 0$ para todo (x, y). Con $x = \pi/2$ queda $y(yh' - h) = 0$, o sea **$y\, h'(y) = h(y)$** para $y \neq 0$.

Solución de la EDO: para $y \neq 0$, $(h/y)' = \frac{yh' - h}{y^2} = 0$, así que h/y es constante en cada semirrecta: $h(y) = c_1 y$ para $y > 0$ y $h(y) = c_2 y$ para $y < 0$ ($h(0) = 0$ por continuidad). Como h es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$h(y) = cy$** en todo $\mathbb{R}$.

Dato: $\vec{f}(\pi/2, 1) = h(1)\cdot(-1\cdot 1, 2 + 3\cdot 0) = (-h(1), 2h(1)) = (-1, 2) \Rightarrow h(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. **$h(y) = y$**.

Suficiencia: $\vec{f} = (-y^3 \text{ sen } x, 2y + 3y^2 \cos x)$ cumple $P'_y = -3y^2 \text{ sen } x = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes.

Potenciales: $U'_y = 2y + 3y^2 \cos x \Rightarrow U = y^2 + y^3 \cos x + k(x)$. Derivando en x: $-y^3 \text{ sen } x + k'(x) = -y^3 \text{ sen } x \Rightarrow k = K$. Resultado: **$U(x, y) = y^3 \cos x + y^2 + K$**, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: la EDO vale para $y \neq 0$ y el dato en $y = 1$ sólo fija la constante de las y positivas; la derivabilidad de h en 0 es lo que hace que $h = y$ en todo $\mathbb{R}$. Y “todas” pide la constante K.

6/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ z \geq 1\}$,
suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in H$ es proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 4\pi k/5$ ($\delta = kz$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 5z^2 = 9$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 3, 3 y $3/\sqrt{5} \approx 1{,}34$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de radio 2). H es el casquete de arriba: entre $z = 1$ y la punta $z = 3/\sqrt{5}$. Cada tajada $z = cte$ es el disco $x^2 + y^2 \leq 9 - 5z^2$.
> **Densidad:** la distancia al plano xy ($z = 0$) es $|z| = z$, porque en H es $z \geq 1$: $\delta = kz$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $1 \leq z \leq 3/\sqrt{5}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(9 - 5z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(9 - 5z^2)$. $M = k\pi \int_1^{3/\sqrt{5}} z(9 - 5z^2)\, dz$. Primitiva: $\frac{9z^2}{2} - \frac{5z^4}{4}$. En $z^2 = \frac{9}{5}$: $\frac{81}{10} - \frac{81}{20} = \frac{81}{20}$. En $z = 1$: $\frac{9}{2} - \frac{5}{4} = \frac{65}{20}$. Diferencia: $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{4\pi k}{5}}$.
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 2$ (radio de la tapa $z = 1$) y $1 \leq z \leq \sqrt{(\frac{9 - r^2}{5})}$. $M = 2\pi k \int_0^2 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{\sqrt{((9 - r^2)/5)}} dr = \pi k \int_0^2 r \cdot \frac{4 - r^2}{5}\, dr = \frac{\pi k}{5}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{4\pi k}{5}$ ✓.
> **Trampa:** el casquete termina en $z = 3/\sqrt{5}$, no en $z = 3$ (el 5 achica el semieje z). Y en el orden dz dr, r llega sólo a 2, el radio de la tapa, no a 3.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z)$ a lo largo de la curva $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, siendo $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $\Sigma_2 : z + x^2 = 1$.
Indique en un gráfico la orientación de Γ elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con Γ antihoraria vista desde z positivo: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ (con la orientación opuesta, -2π).
>
> **Planteo:** Γ está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, así que es una curva cerrada que se proyecta sobre la circunferencia unitaria del plano xy. $\vec{f} = (-y, x, z)$ no es de gradientes: $\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$, así que no hay atajo con potencial.
> **Parametrización y orientación:** $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. **Orientación elegida:** antihoraria vista desde arriba (desde z positivo); en el gráfico la curva pasa, en ese orden, por (1, 0, 0), (0, 1, 1), (−1, 0, 0) y (0, −1, 1). $\vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t \operatorname{sen} t)$.
> **Cuenta directa:** $\vec{f}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) + z\, z' = 1 + z\, z'$. El término $z\, z'$ es la derivada de $z^2/2$, que vuelve a su valor inicial en una curva cerrada, así que integra 0 (en cuentas: $z\, z' = 2\operatorname{sen}^3 t \cos t$, y $\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^3 t \cos t\, dt = [\operatorname{sen}^4 t/2]_0^{2\pi} = 0$). Queda $\oint = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Tomamos Σ: $z = 1 - x^2$ con (x, y) en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, cuyo borde es Γ. Con la normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 0, 1)$, que apunta hacia arriba, el borde queda antihorario visto desde arriba: compatible con la orientación elegida. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (0, 0, 2)$

$\cdot (2x, 0, 1)\, dx\, dy = 2 \cdot \pi = 2\pi$ ✓.

Resultado: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = 2\pi$ con Γ antihoraria vista desde arriba (-2π si se recorre al revés).

Trampa: el enunciado pide indicar la orientación en un gráfico: sin ella el signo no significa nada y el ejercicio queda incompleto. La flecha va sobre la curva en el espacio, no sólo sobre la circunferencia del piso.

Ejercicio 3. Sea D la región del plano contenida en el primer cuadrante limitada por la línea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (2, 0) y los ejes coordenados. Calcule $\iint_D y\, dxdy$.

Respuesta: Línea de campo: $x^2 + 4y^2 = 4$. $D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2\sqrt{(1 - y^2)}\}$. $\iint_D y\, dxdy = 2/3$.

Línea de campo (EDO): $x' = 4y$, $y' = -x$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$. Separando: $4y\, dy = -x\, dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + 4y^2 = k$. Por (2, 0): $k = 4$. La línea es la elipse $\mathbf{x^2 + 4y^2 = 4}$, o sea $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Control: $\frac{d}{dt}(x^2 + 4y^2) = 2x \cdot 4y + 8y \cdot (-x) = 0$ ✓.

La región: en el primer cuadrante, la elipse va de (2, 0) a (0, 1); junto con los dos ejes encierra un cuarto de elipse acostado (semieje 2 sobre el eje x, 1 sobre el eje y). $\mathbf{D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2\sqrt{(1 - y^2)}\}}$.

Cambio de variables: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$ e $y \ge 0$ piden $\cos\theta \ge 0$ y $\mathrm{sen}\,\theta \ge 0$). Jacobiano: $\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos^2\theta + 2r\,\mathrm{sen}^2\theta = 2r$, así que $dxdy = 2r\, dr\, d\theta$.

Cuenta: $\iint_D y\, dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot 2r\, dr\, d\theta = (\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta)(\int_0^1 2r^2\, dr) = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \cdot [\frac{2r^3}{3}]_0^1 = 1 \cdot \frac{2}{3}$.

Resultado: $\iint_D y\, dxdy = \mathbf{2/3}$.

Control en cartesianas: $\int_0^1 y \cdot 2\sqrt{(1 - y^2)}\, dy$; primitiva $-\frac{2}{3}(1 - y^2)^{3/2}$, entre 0 y 1 da $0 - (-\frac{2}{3}) = 2/3$ ✓.

Trampa: θ va de 0 a π/2, no hasta 2π (es un cuarto de elipse), y el jacobiano es 2r: sin el 2 da 1/3.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \varphi(x - y), 2y + \varphi(x - y), 2z - 1)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0,\ z \ge 0,$

orientada de modo que en el punto (0, 2, 2) el versor normal sea $\check{n} = (0, 0, 1)$.

Dato: el volumen de una bola de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Respuesta: $\Phi = 68\pi/3$ (normal exterior a la semiesfera, la que en (0, 2, 2) vale (0, 0, 1)).

Planteo: completando cuadrados, $x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$: es la esfera de centro C = (0, 2, 0) y radio 2, y $z \ge 0$ deja la semiesfera superior. Está abierta abajo: la cerramos con el disco B: $z = 0$, $x^2 + (y - 2)^2 \le 4$, y usamos Gauss en la media bola H.

Orientación: (0, 2, 2) está en Σ (0 + 0 + 4 = 4) y es el polo de arriba; ahí el versor (0, 0, 1) apunta hacia afuera de la esfera. Por continuidad, la orientación pedida es la **exterior** en toda Σ. En B la exterior de H es (0, 0, −1).

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ y $x - y$ es C^∞, así que $\varphi(x - y)$ es C^1 y $\vec{f} = (x + \varphi(x - y), 2y + \varphi(x - y), 2z - 1)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ ∪ B es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia (regla de la cadena): $\partial_x[x + \varphi(x - y)] = 1 + \varphi'(x - y)$; $\partial_y[2y + \varphi(x - y)] = 2 + \varphi'(x - y)\cdot(-1) = 2 - \varphi'(x - y)$; $\partial_z(2z - 1) = 2$. Sumando, $\nabla\cdot\vec{f} = 5$: φ' se cancela.

Triple integral: $\iiint_H 5\ dV = 5\cdot\text{Vol}(\text{media bola de radio } 2) = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = 5\cdot\frac{16\pi}{3} = \frac{80\pi}{3}$.

Base: en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(2z - 1) = -(0 - 1) = 1$. $\Phi_B = 1\cdot\text{área}(B) = 4\pi$. Fijate que φ no aparece: la tercera componente de $\vec{f}$ no la tiene.

Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = \frac{80\pi}{3} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{80\pi}{3} - 4\pi = \frac{68\pi}{3}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{68\pi}{3}}$.

Trampa: centrar la esfera en el origen (no lo está: el centro es $(0, 2, 0)$, aunque para el volumen no cambia nada, sí para describir B), o derivar $\varphi(x - y)$ respecto de y sin el -1 de la regla de la cadena: entonces φ' no se cancela y el problema parece imposible.

Ejercicio 5. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, donde $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$ y $C = (2, 0)$. Calcule

$\int_\Gamma (x - y^2)\,dx + e^{y^2}\,dy$

con Γ recorrida en el sentido $A \to B \to C$.

Respuesta: $\int_\Gamma (x - y^2)\,dx + e^{y^2}\,dy = -2/3$.

Planteo: $P = x - y^2$, $Q = e^{y^2}$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 0$, $P'_y = -2y$, $\boldsymbol{Q'_x - P'_y = 2y}$.

Cierre: Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 2)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, de C a A sobre el eje x. $A \to B \to C \to A$ recorre el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 2,\ y/2 \le x \le 2 - y/2\}$ en **sentido horario**.

Hipótesis de Green: D regular, borde cerrado, simple y C^1 a trozos, campo C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} = -\iint_D 2y\ dA$.

Doble integral: $\iint_D 2y\ dA = \int_0^2 2y\,[x]_{y/2}^{2 - y/2}\,dy = \int_0^2 2y(2 - y)\,dy = [2y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$.

Así $\oint_{\Gamma \cup S} = -\frac{8}{3}$.

Segmento: S: $(t, 0)$, t de 2 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t$: $\int_S = \int_2^0 t\,dt = -2$.

Resultado: $\int_\Gamma = -\frac{8}{3} - (-2) = \boldsymbol{-2/3}$.

Control directo: $e^{y^2}\,dy$ es la diferencial de $\int_0^y e^{s^2}\,ds$, y la ordenada vuelve de 0 a 0: aporta 0 aunque no tenga primitiva elemental. Lo otro: en AB ($x = t$, $y = 2t$) $\int_0^1 (t - 4t^2)\,dt = -\frac{5}{6}$; en BC ($x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$) $\int_0^1 (1 + t - 4(1 - t)^2)\,dt = \frac{1}{6}$. Suma $-2/3$ ✓.

Trampa: no intentes integrar e^{y^2} en cada segmento por separado: o usás Green o te das cuenta de que es exacta.

30/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies $\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint_H z \, dx dy dz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H z \, dx \, dy \, dz = \mathbf{8\pi} \approx 25{,}13$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble con eje z que forma 45° con el eje; con $z \geq 0$ queda la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Se cortan donde $z^2 + z^2 = 8$, o sea $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura 2. La región limitada sólo por esas dos superficies es el cucurucho de helado: adentro del cono ($z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$) y adentro de la esfera.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, con $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho \cos\varphi = \rho \operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$, y "adentro del cono" es $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$: $\varphi \in [0, \pi/4]$. La esfera es $\rho \leq 2\sqrt{2}$, y θ da toda la vuelta, $\theta \in [0, 2\pi]$. Los límites no dependen entre sí: la región es un rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $z \cdot |J| = \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$, que se separa en producto.
> **Cuenta:** $\iiint_H z \, dV = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho)$. En ρ: primitiva $\frac{\rho^4}{4}$, da $\frac{(2\sqrt{2})^4}{4} = \frac{64}{4} = 16$. En φ: primitiva $\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En θ: 2π.
> **Resultado:** $\iiint_H z \, dV = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = \mathbf{8\pi} \approx 25{,}13$.
> **Control en cilíndricas:** $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int (4 - r^2) \, r \, dr$, primitiva $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. Por 2π: $2\pi \cdot 4 = 8\pi$ ✓.
> **Si se leyera la otra región:** la parte de la semiesfera que queda afuera del cono ($\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$) también está en $z \geq 0$, pero además la limita el plano $z = 0$. Igual da lo mismo: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, así que la respuesta no depende de la lectura.
> **Trampa:** el jacobiano esférico es $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (no ρ^2 ni $\rho \operatorname{sen}\varphi$); y φ se mide desde el eje z positivo, así que adentro del cono es φ de 0 a $\pi/4$, no de $\pi/4$ a $\pi/2$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = -27/2$. En el otro sentido, 27/2.
> **Planteo:** $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$, y el borde ∂T es cerrado. Como $\vec{h} = \nabla u$ es un campo de gradientes continuo, $\oint_{\partial T} \vec{h} \cdot d\vec{s} = u(\text{final}) - u(\text{inicial}) = \mathbf{0}$. Queda la circulación de $\vec{g}$.
> **El triángulo:** los vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3) están en el plano $\mathbf{x + y + z = 3}$; T es $z = 3 - x - y$ sobre $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$, de área 9/2.
> **Rotor:** $\vec{g} = (P, Q, R) = (xy, yz, xz)$, polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = \mathbf{(0 - y, 0 - z, 0 - x) = (-y, -z, -x)}$.

Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; T es un triángulo plano (regular y orientable) y ∂T es una poligonal cerrada simple, suave a trozos. Uso como superficie el mismo T, que es la más cómoda: su borde es la curva y su normal es constante.
Orientación elegida (el gráfico): recorro (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) → (3, 0, 0). Proyectado sobre xy es (3, 0) → (0, 3) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Con la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta hacia afuera del origen, a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo: $(\text{rot}\,\vec{g}) \cdot \vec{n} = -y - z - x = -(x + y + z)$, que sobre T vale **−3**. $\iint_D (-3)\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} (-3)\,dy\,dx = \int_0^3 -3(3 - x)\,dx = [-9x + \frac{3x^2}{2}]_0^3 = -27 + \frac{27}{2} = \mathbf{-27/2}$.
Resultado: $\oint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + \oint_{\partial T} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-27/2}$ con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3); en el sentido contrario cambia el signo.
Trampa: no hace falta conocer $\vec{h}$: alcanza con que sea de gradientes y continuo en una curva cerrada. Y el rotor no es constante: reemplazá $z = 3 - x - y$ (o usá directamente $x + y + z = 3$) antes de integrar.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} - y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + x^2 - x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = (e - 1)/2 - 1/6 = e/2 - 2/3 \approx 0{,}692$.

La curva: $y = x - x^2 = x(1 - x)$. En el primer cuadrante es $x \in [0, 1]$: un arco de (0, 0) a (1, 0) que pasa por arriba (vértice (1/2, 1/4)), recorrido con x creciente. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (1, 0) a (0, 0). $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x - x^2\}$ en sentido **horario** (arriba de izquierda a derecha, abajo de vuelta): orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = xe^{x^2} - y$ y $Q = e^{y^2}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región elemental con borde cerrado, simple y suave a trozos. Con la orientación horaria, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.
Rotor: $Q'_x = 0$, $P'_y = -1$, $Q'_x - P'_y = 1$.
Doble integral: $\iint_D 1\,dA = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/6$. Entonces $\oint_{C \cup C_1} = -1/6$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 1 a 0; dy = 0 y $P(t, 0) = te^{t^2}$: $\int_{C_1} = \int_1^0 te^{t^2}\,dt = [\tfrac{1}{2}e^{t^2}]_1^0 = \tfrac{1}{2} - e/2$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1/6 - (\tfrac{1}{2} - e/2) = \mathbf{(e - 1)/2 - 1/6} = e/2 - 2/3 \approx 0{,}692$.
Control (la otra cara): $\vec{f} = \nabla(\tfrac{1}{2}e^{x^2} + G(y)) + (-y, 0)$ con $G' = e^{y^2}$. La parte gradiente da (e − 1)/2 (el arco empieza y termina en y = 0), y $\int_C -y\,dx = -\int_0^1 (x - x^2)\,dx = -1/6$ ✓.
Trampa: el arco recorrido con x creciente deja la región a la derecha: es horario. Si usás Green con signo +, te da 1/6 + (e − 1)/2 y está mal.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 4 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, 1)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 32/3$ (con $\vec{N} = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)$, la saliente).

Planteo: Σ es la mitad y ≥ 0 del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, cortada abajo por z = 0 y arriba por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$. Va en cilíndricas, con θ y z como parámetros.
Parametrización y dominio: $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$. $y \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \pi$. El techo, escrito en θ: $z \le 4 - (2\cos\theta)^2 = 4(1 - \cos^2\theta) = 4\,\text{sen}^2\theta$. Entonces $\mathbf{D = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le 4\,\text{sen}^2\theta\}}$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-2\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)} = (x, y, 0)$, la normal saliente del cilindro.

Orientación: la segunda componente es $2\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$: es la pedida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f} = (0, 1, 1)$ es constante y $\vec{N}$ no tiene componente z, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = 2\operatorname{sen}\theta$ (la tercera componente de $\vec{f}$ no aporta nada).
Cuenta: $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^{4\operatorname{sen}^2\theta} 2\operatorname{sen}\theta \, dz \, d\theta = \int_0^{\pi} 8\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta$. Con $\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta)$, primitiva $-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$: $[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}]_0^{\pi} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$. $\Phi = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{32}{3}}$.
Control con otra parametrización: Σ es el gráfico $y = \sqrt{(4 - x^2)}$ sobre $D' = \{-2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$ del plano xz. $\vec{X}_z \times \vec{X}_x = (\frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)}}, 1, 0)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 1$, así que $\Phi = \text{área}(D') = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = 2(8 - \frac{8}{3}) = \frac{32}{3}$ ✓ (la parametrización no es C^1 en $x = \pm 2$, que es el borde, pero la integral converge y coincide).
Trampa: el techo hay que escribirlo en θ ($4\operatorname{sen}^2\theta$); poner $z \leq 4 - r^2$ o $z \leq 4$ no tiene sentido sobre el cilindro.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), 2y\varphi(x), 4xz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 1 - 2x - e^{-2x}$ (da $\nabla\cdot\vec{f} \equiv 0$, así que el flujo por cualquier esfera centrada en el origen es 0, y $\varphi(0) = 0$).

Planteo: llamo B_r a la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$; su frontera es la esfera S_r del enunciado.
Hipótesis de Gauss: φ es C^1, así que $\varphi(x)$, $2y\varphi(x)$ y $4xz$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (no hay singularidades). S_r es una superficie cerrada y suave que encierra el sólido B_r, y con normal exterior vale $\oiint_{S_r} \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = \iiint_{B_r} \nabla\cdot\vec{f}\, dV$. (Que el flujo sea nulo no depende de la orientación: si da 0 con la exterior, da 0 con la interior.)
Divergencia: $\partial/\partial x(\varphi(x)) = \varphi'(x)$, $\partial/\partial y(2y\varphi(x)) = 2\varphi(x)$, $\partial/\partial z(4xz) = 4x$. Entonces $\nabla\cdot\vec{f} = \varphi'(x) + 2\varphi(x) + 4x$.
Condición suficiente: si $\nabla\cdot\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, la triple da 0 en toda bola y la condición 1 se cumple para todo $r > 0$. Pido entonces $\boldsymbol{\varphi' + 2\varphi = -4x}$.
EDO lineal: factor integrante e^{2x}: $(\varphi e^{2x})' = \varphi' e^{2x} + 2\varphi e^{2x} = -4xe^{2x}$. Por partes ($u = -4x$, $dv = e^{2x}dx$): $\int -4xe^{2x}\,dx = -2xe^{2x} + \int 2e^{2x}\,dx = -2xe^{2x} + e^{2x} + C$. Entonces $\varphi e^{2x} = -2xe^{2x} + e^{2x} + C$ y $\boldsymbol{\varphi(x) = 1 - 2x + Ce^{-2x}}$.
Condición 2: $\vec{f}(0, 0, 0) = (\varphi(0), 2 \cdot 0 \cdot \varphi(0), 0) = (\varphi(0), 0, 0)$, así que hay que pedir $\varphi(0) = 0$: $1 + C = 0$, $C = -1$.
Resultado: $\boldsymbol{\varphi(x) = 1 - 2x - e^{-2x}}$.
Control: $\varphi' = -2 + 2e^{-2x}$, y $\varphi' + 2\varphi + 4x = -2 + 2e^{-2x} + 2 - 4x - 2e^{-2x} + 4x = 0$ ✓. $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$ ✓, y φ es C^1 (de hecho C^{∞}).
Nota: $\nabla\cdot\vec{f} = 0$ es suficiente pero no necesario. Como la divergencia depende sólo de x, el flujo por S_r se anula para todo r si y sólo si $\varphi' + 2\varphi + 4x$ es una función impar de x. El enunciado pide "una función φ", y la de divergencia nula es la natural.
Trampa: no te olvides de la condición 2: sin ella te queda toda la familia con C libre. Y ojo con $\partial/\partial y(2y\varphi(x))$: es $2\varphi(x)$, no $2y\varphi'(x)$.

30/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies $\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 18$.
Calcule $\iiint_H z \, dx dy dz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H z \, dx\, dy\, dz = \dfrac{\mathbf{81\pi}}{\mathbf{2}} \approx 127{,}2$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble con eje z que forma 45° con el eje; con $z \geq 0$ queda la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Se cortan donde $z^2 + z^2 = 18$, o sea $z = 3$ y $x^2 + y^2 = 9$: la circunferencia de radio 3 a altura 3. La región limitada sólo por esas dos superficies es el cucurucho de helado: adentro del cono ($z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$) y adentro de la esfera.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, con $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho \cos\varphi = \rho \operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$, y "adentro del cono" es $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$: $\varphi \in [0, \pi/4]$. La esfera es $\rho \leq 3\sqrt{2}$, y θ da toda la vuelta, $\theta \in [0, 2\pi]$. Los límites no dependen entre sí: la región es un rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $z \cdot |J| = \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$, que se separa en producto.
> **Cuenta:** $\iiint_H z \, dV = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi)(\int_0^{3\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho)$. En ρ: primitiva $\dfrac{\rho^4}{4}$, da $\dfrac{(3\sqrt{2})^4}{4} = \dfrac{324}{4} = 81$. En φ: primitiva $\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. En θ: 2π.
> **Resultado:** $\iiint_H z \, dV = 2\pi \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 81 = \dfrac{\mathbf{81\pi}}{\mathbf{2}} \approx 127{,}2$.
> **Control en cilíndricas:** $r \in [0, 3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [r, \sqrt{(18 - r^2)}]$, $|J| = r$. En z: primitiva $\dfrac{z^2}{2}$, da $\dfrac{18 - 2r^2}{2} = 9 - r^2$. En r: $\int (9 - r^2)\, r \, dr$, primitiva $\dfrac{9r^2}{2} - \dfrac{r^4}{4}$, entre 0 y 3 da $\dfrac{81}{2} - \dfrac{81}{4} = \dfrac{81}{4}$. Por 2π: $2\pi \cdot \dfrac{81}{4} = \dfrac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Si se leyera la otra región:** la parte de la semiesfera que queda afuera del cono ($\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$) también está en $z \geq 0$, pero además la limita el plano $z = 0$. Igual da lo mismo: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, así que la respuesta no depende de la lectura.
> **Trampa:** el jacobiano esférico es $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (no ρ^2 ni $\rho \operatorname{sen}\varphi$); y φ se mide desde el eje z positivo, así que adentro del cono es φ de 0 a $\pi/4$, no de $\pi/4$ a $\pi/2$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xz, yx, yz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 27/2$. En el otro sentido, $-27/2$.
> **Planteo:** $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$, y el borde ∂T es cerrado. Como $\vec{h} = \nabla u$ es un campo de gradientes continuo, $\oint_{\partial T} \vec{h} \cdot d\vec{s} = u(\text{final}) - u(\text{inicial}) = \mathbf{0}$. Queda la circulación de $\vec{g}$.
> **El triángulo:** los vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3) están en el plano **x + y + z = 3**; T es $z = 3 - x - y$ sobre $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$, de área 9/2.

Rotor: $g = (P, Q, R) = (xz, yx, yz)$, polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = \mathbf{(z - 0, x - 0, y - 0) = (z, x, y)}$.
Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; T es un triángulo plano (regular y orientable) y ∂T es una poligonal cerrada simple, suave a trozos. Uso como superficie el mismo T, que es la más cómoda: su borde es la curva y su normal es constante.
Orientación elegida (el gráfico): recorro (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) → (3, 0, 0). Proyectado sobre xy es (3, 0) → (0, 3) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Con la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta hacia afuera del origen, a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo: $(\text{rot}\ \vec{g}) \cdot \vec{n} = z + x + y$, que sobre T vale **3**. $\iint_D 3\ dx\ dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} 3\ dy\ dx = \int_0^3 3(3 - x)\ dx = [9x - \frac{3x^2}{2}]_0^3 = 27 - \frac{27}{2} = \mathbf{27/2}$.
Resultado: $\oint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + \oint_{\partial T} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \mathbf{27/2}$ con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3); en el sentido contrario cambia el signo.
Trampa: $\vec{h}$ no aporta por ser de gradientes y la curva cerrada; no intentes averiguarlo. Y el rotor depende del punto: usá x + y + z = 3 sobre T antes de integrar.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} + y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + 2x^2 - 2x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1/3 + (e - 1)/2 = e/2 - 1/6 \approx 1{,}192$.

La curva: $y = 2x - 2x^2 = 2x(1 - x)$. En el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) es $x \in [0, 1]$: un arco que va de (0, 0) a (1, 0) pasando por arriba (vértice (1/2, 1/2)), con x creciente. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (1, 0) a (0, 0). $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x - 2x^2\}$: arriba de izquierda a derecha y abajo de derecha a izquierda, o sea sentido **horario** (orientación negativa).
Hipótesis del teorema: $P = xe^{x^2} + y$ y $Q = e^{y^2}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región elemental (regular) con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación horaria, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\ dA$.
Rotor: $Q'_x = 0$, $P'_y = 1$, $Q'_x - P'_y = -1$.
Doble integral: $\iint_D (-1)\ dA = -\int_0^1 (2x - 2x^2)\ dx = -[x^2 - 2x^3/3]_0^1 = -1/3$. Con el signo de la orientación: $\oint_{C \cup C_1} = +1/3$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 1 a 0; dy = 0 y $P(t, 0) = te^{t^2}$: $\int_{C_1} = \int_1^0 te^{t^2}\ dt = [\tfrac{1}{2}e^{t^2}]_1^0 = \tfrac{1}{2} - e/2$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1/3 - (\tfrac{1}{2} - e/2) = \mathbf{1/3 + (e - 1)/2} = e/2 - 1/6 \approx 1{,}192$.
Control (la otra cara): $\vec{f} = \nabla(\tfrac{1}{2}e^{x^2} + G(y)) + (y, 0)$, con $G'(y) = e^{y^2}$. La parte gradiente da $\tfrac{1}{2}e^1 - \tfrac{1}{2}e^0 + G(0) - G(0) = (e - 1)/2$, y $\int_C y\ dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\ dx = 1/3$ ✓.
Trampa: e^{y^2} no tiene primitiva elemental, pero $e^{y^2}\ dy$ es exacta (es dG con $G' = e^{y^2}$) y el arco empieza y termina en y = 0: ese término aporta G(0) − G(0) = 0, también si parametrizás. Con Green se ve igual: Q no aporta al rotor y en el segmento dy = 0, así que nunca hace falta integrarla.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, -1)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 36$ (con $\vec{N} = (3 \cos\theta, 3 \operatorname{sen}\theta, 0)$, la saliente).

Planteo: Σ es la mitad $y \geq 0$ del cilindro $x^2 + y^2 = 9$, cortada abajo por z = 0 y arriba por el cilindro parabólico $z = 9 - x^2$. Va en cilíndricas, con θ y z como parámetros.

Parametrización y dominio: $X(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z)$. $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. El techo, escrito en θ: $z \leq 9 - (3\cos\theta)^2 = 9(1 - \cos^2\theta) = 9\operatorname{sen}^2\theta$. Entonces $\mathbf{D = \{0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq z \leq 9\operatorname{sen}^2\theta\}}$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)} = (x, y, 0)$, la normal saliente del cilindro.
Orientación: la segunda componente es $3\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$: es la pedida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f} = (0, 1, -1)$ es constante y $\vec{N}$ no tiene componente z, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = 3\operatorname{sen}\theta$ (la tercera componente de $\vec{f}$ no aporta nada).
Cuenta: $\Phi = \int_0^\pi \int_0^{9\operatorname{sen}^2\theta} 3\operatorname{sen}\theta\, dz\, d\theta = \int_0^\pi 27\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$. Con $\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta)$, primitiva $-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$: $[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}]_0^\pi = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$. $\Phi = 27 \cdot \frac{4}{3} = 36$.
Resultado: $\Phi = 36$.
Control con otra parametrización: Σ es el gráfico $y = \sqrt{(9 - x^2)}$ sobre $D' = \{-3 \leq x \leq 3,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2\}$ del plano xz. $\vec{X}_z \times \vec{X}_x = (\frac{x}{\sqrt{(9 - x^2)}}, 1, 0)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 1$, así que $\Phi = \text{área}(D') = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = [9x - \frac{x^3}{3}]_{-3}^{3} = 2(27 - 9) = 36$ ✓ (la parametrización no es C^1 en $x = \pm 3$, que es el borde, pero la integral converge y coincide).
Trampa: el techo hay que escribirlo en θ ($9\operatorname{sen}^2\theta$); poner $z \leq 9 - r^2$ o $z \leq 9$ no tiene sentido sobre el cilindro.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (2x\varphi(y), \varphi(y), 4yz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(y) = 1 - 2y - e^{-2y}$ (también sirve $\varphi \equiv 0$, ver la observación).
Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial(2x\varphi(y))/\partial x + \partial\varphi(y)/\partial y + \partial(4yz)/\partial z = 2\varphi(y) + \varphi'(y) + 4y$.
Gauss: la esfera S_r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es cerrada, encierra la bola B_r, y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$). Con normal exterior, $\Phi(S_r) = \iiint_{B_r} (2\varphi + \varphi' + 4y)\, dV$. La orientación no importa porque se pide flujo 0.
Condición suficiente: si $\nabla \cdot \vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, el flujo es 0 para todo $r > 0$. Pedimos entonces $\varphi' + 2\varphi = -4y$.
EDO lineal: factor integrante e^{2y}: $(\varphi\, e^{2y})' = -4y\, e^{2y}$. Por partes ($u = -4y$, $dv = e^{2y}\, dy$): $\int -4y\, e^{2y}\, dy = -2y\, e^{2y} + \int 2e^{2y}\, dy = -2y\, e^{2y} + e^{2y} + C$. Dividiendo por e^{2y}: $\varphi(y) = 1 - 2y + C\, e^{-2y}$.
Condición 2: $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, \varphi(0), 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$.
Resultado: $\varphi(y) = 1 - 2y - e^{-2y}$. Control: $\varphi' = -2 + 2e^{-2y}$ y $\varphi' + 2\varphi = -2 + 2e^{-2y} + 2 - 4y - 2e^{-2y} = -4y$ ✓; $\varphi(0) = 0$ ✓; φ es C^1 ✓.
Observación: $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ alcanza, pero no es necesario: basta que $\iiint_{B_r} \operatorname{div}\vec{f}\, dV = 0$ para todo r. Por ejemplo $\varphi \equiv 0$ también cumple las dos condiciones (queda $\operatorname{div}\vec{f} = 4y$, impar en y, que integra 0 en toda bola centrada en el origen). El enunciado pide "una" φ: cualquiera de las dos vale bien justificada; la de la EDO es la que busca el ejercicio.
Trampa: la condición 2 sólo involucra la segunda componente: la primera y la tercera ya son 0 en el origen para cualquier φ.

10/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcular el volumen de la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 - 4y \le z \le 5 + 2x^2 + y^2\}$.

> **Respuesta:** $V = 81\pi/2$ (≈ 127,23).
>
> **Planteo:** H está entre un piso, $z = 3x^2 + 2y^2 - 4y$, y un techo, $z = 5 + 2x^2 + y^2$ (dos paraboloides que abren hacia arriba). Sobre cada punto (x, y) hay sólido sólo donde piso ≤ techo, así que $V = \iint_D$ (techo − piso) dxdy, con D la sombra de H en el plano xy.
> **Dónde se cortan (la proyección):** techo − piso $= 5 + 2x^2 + y^2 - 3x^2 - 2y^2 + 4y = 5 - x^2 - y^2 + 4y$. Completando cuadrados, $-(y^2 - 4y) = -(y - 2)^2 + 4$, así que techo − piso $= 9 - x^2 - (y - 2)^2$. Eso es ≥ 0 si y sólo si $x^2 + (y - 2)^2 \le 9$: **D es el disco de centro (0, 2) y radio 3**. Los paraboloides se cortan en una curva que se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 9$; afuera del disco el piso queda por encima del techo y no hay sólido. H es un cuerpo acotado con forma de lente, con el piso abajo y el techo arriba.
> **Coordenadas:** cilíndricas con el eje corrido a la recta x = 0, y = 2: $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$. La traslación no cambia el jacobiano: $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, z)$ tiene determinante $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
> Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$ (el disco D) y, en z, de piso a techo; integrando primero en z queda la altura techo − piso $= 9 - r^2$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 3: $\frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4}$. La integral en θ da 2π.
> **Resultado: $V = \frac{81\pi}{2}$** ≈ 127,23.
> **Control (cartesianas, otro orden):** con u = y − 2 la altura es $9 - u^2 - x^2$ sobre $u^2 + x^2 \le 9$. Primero en x, entre $\pm\sqrt{9 - u^2}$: $2(9 - u^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(9 - u^2)^{3/2} = \frac{4}{3}(9 - u^2)^{3/2}$. Después en u, con $u = 3\,\mathrm{sen}\,t$: $\frac{4}{3}\cdot 81 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = 108\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Trampa:** usar polares centradas en el origen con r ≤ 3 (el disco está corrido a (0, 2)), o integrar sólo el techo como si el piso fuera z = 0.

Ejercicio 2. Considere la familia de curvas $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Halle la curva Γ que pasa por el punto (−1, 0) y es ortogonal a las curvas de la familia $\mathscr{F}$.
b) Sea D la región encerrada por Γ y Γ^*, donde Γ^* es la curva de ecuación y = −3.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{-x^3} - y^2, \cos(y^5) + xy)$ a lo largo de ∂D. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** a) Γ: $y = 1 - x^2$. b) Con ∂D en sentido antihorario: $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s}$ = **−224/5** = −44,8 (en sentido horario, 224/5).

a) EDO de la familia: derivando $\frac{x^2}{2} + (y-1)^2 = c$ respecto de x (c desaparece): $x + 2(y-1)y' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2(y-1)}$.

EDO de las ortogonales: pendiente inversa y opuesta: $\mathbf{y' = \frac{2(y-1)}{x}}$.

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$ e $y \neq 1$: $\frac{dy}{y-1} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1| = 2\ln|x| + k \Rightarrow y - 1 = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$.

Condición inicial: por $(-1, 0)$: $-1 = K$. **Γ: $y = 1 - x^2$.** Control: la parábola entera cumple $xy' = 2(y-1)$ (los dos lados valen $-2x^2$), y su tangente $(1, -2x)$ es paralela a $\nabla(\frac{x^2}{2} + (y-1)^2) = (x, 2(y-1)) = (x, -2x^2) = x(1, -2x)$: corta a cada elipse de la familia en ángulo recto ✓.

b) La región: $1 - x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm 2$. $D = \{(x, y) : -2 \le x \le 2, -3 \le y \le 1 - x^2\}$, compacta, con borde cerrado y simple formado por el segmento de $y = -3$ y el arco de parábola.

Orientación elegida (el "gráfico"): sentido **antihorario**: por $y = -3$ de $(-2, -3)$ a $(2, -3)$, y por la parábola de $(2, -3)$ a $(-2, -3)$ pasando por el vértice $(0, 1)$.

Hipótesis de Green: $P = e^{-x^3} - y^2$ y $Q = \cos(y^5) + xy$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Parametrizar no sirve: e^{-x^3} y $\cos(y^5)$ no tienen primitiva elemental.

Rotor: $Q'_x = y$, $P'_y = -2y$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3y}$.

Cuenta: $\oint^+ \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 3y\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{1-x^2} 3y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} [\frac{3y^2}{2}]_{-3}^{1-x^2} dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{2} ((1-x^2)^2 - 9)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{2} (x^4 - 2x^2 - 8)\,dx = \frac{3}{2}[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 8x]_{-2}^{2} = \frac{3}{2}\cdot 2(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16) = 3\cdot(-\frac{224}{15}) = -\frac{224}{5}$.

Resultado: antihorario, $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-224/5} = -44{,}8$.

Trampa: en a), para las ortogonales se invierte *y* se cambia el signo de la pendiente; usar la misma pendiente da otra vez la familia. En b), P'_y de $-y^2$ es $-2y$ y el rotor queda $y + 2y = 3y$.

Ejercicio 3.

Sea Σ la superficie definida por

$\Sigma : y + x^2 = 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le x.$

Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (-1, x, y^2)$ a través de Σ, orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa.

Respuesta: $\Phi = -8/3$ (con $\vec{N} = (2x, 1, 0)$).

Planteo: $y + x^2 = 4$ es el cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ (generatrices paralelas al eje z). $y \ge 0$ da $-2 \le x \le 2$, pero $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$: queda $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le x$.

Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$, $D = \{0 \le x \le 2, 0 \le z \le x\}$.

Normal: $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$.

Orientación: esa tiene primera componente $-2x \le 0$, es la opuesta. **Cambio el orden**: $\vec{N} = \vec{X}_z \times \vec{X}_x = (2x, 1, 0)$, con primera componente $2x \ge 0$ en D ✓ (vale 0 sólo en $x = 0$, por eso el enunciado dice "no negativa").

Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (-1, x, (4 - x^2)^2)$; $\vec{f}\cdot\vec{N} = -2x + x + 0 = -x$.

Cuenta: $\Phi = \int_0^2 \int_0^x (-x)\,dz\,dx = -\int_0^2 x^2\,dx = -[\frac{x^3}{3}]_0^2 = -\frac{8}{3}$.

Resultado: $\Phi = \mathbf{-8/3}$.

Control con Gauss: $\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ y $\vec{f}$ es C^1. Sólido $W = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2, 0 \le z \le x\}$; en

Σ su normal saliente es (2x, 1, 0), la pedida. Caras: y = 0 ($-\vec{j}$): $\vec{f}\cdot(-\vec{j}) = -x$, $\int_0^2 \int_0^x -x\,dz\,dx = -\frac{8}{3}$; z = 0 ($-\vec{k}$): $-y^2$; z = x (normal saliente (–1, 0, 1)): $1 + y^2$. Esas dos juntas dan $\iint_D 1\,dA = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}$ (la cara x = 0 se reduce a un segmento). Gauss: $\Phi - \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 0$, $\Phi = -\frac{8}{3}$ ✓.

Trampa: tomar x entre –2 y 2 (por y ≥ 0) sin ver que z ≤ x corta la mitad con x < 0.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - e^z, 2xy, 2z - xe^z)$. Calcule $\int_C \vec{f}.d\vec{s}$, con
$C : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 1,\ y \geq 0,$
orientada de modo tal que la coordenada z resulte creciente.

Respuesta: $\vec{f} = \nabla U$ con $U = xy^2 - xe^z + z^2$; C va de (2, 0, –1) a (–2, 0, 3); $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 2e^3 + 8 + 2/e \approx 48{,}91$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $\vec{f} = (P, Q, R) = (y^2 - e^z, 2xy, 2z - xe^z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 0, -e^z + e^z, 2y - 2y) = \vec{0}$. $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes.

Potencial: $U'_x = y^2 - e^z \Rightarrow U = xy^2 - xe^z + a(y, z)$. $U'_y = 2xy + a'_y = 2xy \Rightarrow a = b(z)$. $U'_z = -xe^z + b'(z) = 2z - xe^z \Rightarrow b = z^2$. $U = xy^2 - xe^z + z^2$.

La curva: cilindro $x^2 + y^2 = 4$ cortado por el plano z = 1 – x, con y ≥ 0: media elipse. $\vec{X}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 1 - 2\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$ (y = 2 sen t ≥ 0). Como $z'(t) = 2\,\text{sen}\,t \geq 0$, z crece con t: el sentido pedido es el de t creciente, de $\vec{X}(0) = (2, 0, -1)$ a $\vec{X}(\pi) = (-2, 0, 3)$.

Cuenta: $U(-2, 0, 3) = 0 + 2e^3 + 9$; $U(2, 0, -1) = 0 - 2e^{-1} + 1$.

Resultado: $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 2e^3 + 9 - 1 + 2e^{-1} = \mathbf{2e^3 + 8 + \frac{2}{e}} \approx 48{,}91$.

Trampa: C es un arco abierto (no la elipse entera), así que no da 0: hay que identificar bien cuál extremo es el inicial. El de z menor es (2, 0, –1).

Ejercicio 5. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y + \varphi(z), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 - z = 0,\ z \leq 9.$
Indique en un gráfico la orientación considerada para la superficie.

Respuesta: Con la normal exterior al sólido (tercera componente negativa): $\Phi = 81\pi/2$. Con la orientación opuesta (hacia arriba): $\Phi = -81\pi/2$.

Planteo: Σ: $z = x^2 + y^2$, z ≤ 9, es un paraboloide circular abierto por arriba (borde: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en z = 9). Como φ no se conoce, conviene Gauss: cerramos con la tapa T: z = 9, $x^2 + y^2 \leq 9$, y trabajamos en $H = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$.

Orientación elegida (gráfico): tomo en Σ la normal **exterior a H**, la que apunta hacia afuera del paraboloide y hacia abajo (tercera componente negativa); en el dibujo, las flechas salen del "vaso" por la pared. Con esa orientación, Σ ∪ T con la tapa hacia arriba es la frontera de H con normal saliente.

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f} = (x, y + \varphi(z), z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ ∪ T es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = 1 + \partial_y(y + \varphi(z)) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ (φ(z) no depende de y).

Triple integral: en cilíndricas, $H = \{0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 3,\ r^2 \leq z \leq 9\}$. $\iiint_H 3\,dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 3\cdot 2\pi\left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^3 = 6\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{243\pi}{2}$.

Tapa: en z = 9 con normal (0, 0, 1): $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = z = 9$, área 9π, $\Phi_T = 81\pi$.

Resultado: $\Phi_\Sigma = \frac{243\pi}{2} - 81\pi = \mathbf{\frac{81\pi}{2}}$ con la normal exterior. Si se elige la normal hacia arriba (hacia el eje z), el flujo es $\mathbf{-\frac{81\pi}{2}}$.

Control directo: con $\vec{N} = (-2x, -2y, 1)$ (hacia arriba): $\vec{f}\cdot\vec{N} = -2x^2 - 2y^2 - 2y\varphi(z) + z$, con $z = x^2 + y^2$. Como $\varphi(z) = \varphi(r^2)$ no depende de θ, el término $-2y\varphi$ es impar en y y se anula sobre el disco. Queda $\iint(-x^2 - y^2)\,dA = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\,dr\,d\theta = -\frac{81\pi}{2}$ ✓ (y con la exterior, $+\frac{81\pi}{2}$).

Trampa: el enunciado deja elegir la orientación pero hay que decirla (y dibujarla): el número sin orientación no vale. Y no olvidarse de restar la tapa.

2/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las superficies de ecuaciones
$\Sigma_1 : 3x^2 + 3y^2 - z = 5$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 - z = -3$.
Suponga que la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al eje z.

> **Respuesta:** $M = 64\pi k/3$ ($\delta = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$, con H la región acotada entre Σ_1 y Σ_2.
> **Las superficies:** Σ_1: $z = 3(x^2 + y^2) - 5$ es un paraboloide que abre hacia arriba con vértice $(0, 0, -5)$. Σ_2: $z = x^2 + y^2 + 3$ es otro paraboloide hacia arriba con vértice $(0, 0, 3)$, más abierto que Σ_1.
> **Dónde se cortan:** $3(x^2 + y^2) - 5 = x^2 + y^2 + 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, a altura $z = 7$. Es la circunferencia de radio 2 en el plano $z = 7$. Para $x^2 + y^2 < 4$ vale $3(x^2 + y^2) - 5 < x^2 + y^2 + 3$ (porque $2(x^2 + y^2) < 8$), así que Σ_1 va abajo y Σ_2 arriba. H es la región encerrada: proyección el disco $x^2 + y^2 \le 4$, piso Σ_1, techo Σ_2.
> **Densidad:** la distancia de (x, y, z) al eje z es $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, su cuadrado es $x^2 + y^2$: $\delta = k(x^2 + y^2) = kr^2$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r ($dV = r\,dz\,dr\,d\theta$). Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $3r^2 - 5 \le z \le r^2 + 3$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{3r^2-5}^{r^2+3} r^2 \cdot r \, dz\,dr\,d\theta$. En z: $r^3 \cdot [(r^2 + 3) - (3r^2 - 5)] = r^3(8 - 2r^2)$. En r: primitiva $2r^4 - \frac{r^6}{3}$, entre 0 y 2: $32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$. En θ: 2π.
>
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{64\pi k}{3}}$.
>
> **Control (orden dr dz):** por tajadas $z = cte$, la integral en r de $2\pi r^3$ da $\frac{\pi r^4}{2}$. Para $-5 \le z \le 3$ sólo manda Σ_1: $0 \le r^2 \le \frac{z+5}{3}$, y da $\int_{-5}^{3} \frac{\pi}{2}(\frac{z+5}{3})^2 \, dz = \frac{256\pi}{27}$. Para $3 \le z \le 7$ es una corona: $z - 3 \le r^2 \le \frac{z+5}{3}$, y da $\frac{320\pi}{27}$. Suma: $\frac{576\pi}{27} = \frac{64\pi}{3}$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje z al cuadrado es $x^2 + y^2$, no $x^2 + y^2 + z^2$ (eso es al origen). Y no te olvides del jacobiano r: el integrando queda r^3, no r^2.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 7/3$.
>
> **Planteo:** $P = \varphi(y) + y^2$, $Q = x\varphi'(y) + xy$. Como $\varphi \in C^2$, φ' es C^1 y P, Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (por eso piden C^2 y no C^1).
> **Rotor escalar:** $Q'_x = \varphi'(y) + y$, $P'_y = \varphi'(y) + 2y$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -y}$. No es de gradientes, pero φ' se cancela.
> **Cierre:** Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, el segmento de C a A sobre el eje x. A → B → C → A sube, baja y vuelve por abajo hacia la izquierda: es el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - y\}$ en **sentido horario**.
> **Hipótesis de Green:** D es regular, su borde es cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D (-y)\,dA = \iint_D y \, dA$.

Doble integral: $\iint_D y\,dA = \int_0^1 y\,[x]_y^{2-y}\,dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\,dy = [y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Segmento: S: (t, 0), t de 2 a 0, derivada (1, 0); P(t, 0) = φ(0) + 0 = 1, así que $\int_S = \int_2^0 1\,dt = -2$. Acá se usa el dato φ(0) = 1.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - (-2) =$ **7/3**.

Control: (φ(y), xφ′(y)) = ∇(xφ(y)), que de A a C aporta 2φ(0) − 0 = 2. Lo que queda, $\int y^2\,dx + xy\,dy$: en AB (x = y = t) es $\int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}$; en BC (x = 1 + t, y = 1 − t) es $\int_0^1 (-2t + 2t^2)\,dt = -\frac{1}{3}$. Total $2 + \frac{1}{3} =$ 7/3 ✓.

Trampa: A → B → C → A es horario. Y sobre el eje x no te olvides de φ(0): el segmento no da 0.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Respuesta: Con normal hacia arriba ($\vec{N} = (2x, 2y, 1)$): Φ = 9π/4. Con la opuesta, −9π/4.

Planteo: Σ: $z = 9 - x^2 - y^2$, paraboloide con vértice (0, 0, 9) que abre hacia abajo. En el primer octante: x, y ≥ 0 y z ≥ 0, o sea $x^2 + y^2 \le 9$. Es un gráfico sobre D = cuarto de disco de radio 3 (x, y ≥ 0). $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, (x, y) ∈ D.

Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$.

Orientación elegida: la de $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$: tercera componente 1 > 0, normal hacia arriba, que en el paraboloide es hacia afuera del sólido que encierra con los planos coordenados. En el gráfico: el cuarto de paraboloide con flechitas que en el vértice (0, 0, 9) apuntan según $\vec{k}$ y en el borde, por ejemplo en (3, 0, 0), según (6, 0, 1) (casi horizontales, hacia afuera).

Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2yz, -2xz, 1)$; $\vec{f}\cdot\vec{N} = 4xyz - 4xyz + 1 = 1$. Las dos primeras componentes se cancelan solas.

Cuenta: $\Phi = \iint_D 1\,dx\,dy =$ área de D. En polares: $\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot[\frac{r^2}{2}]_0^3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{9\pi}{4}$.

Resultado: con la normal hacia arriba, Φ = **9π/4** (con la orientación opuesta sería −9π/4).

Control con Gauss: $\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ ($\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$). Cierro con los tres planos coordenados, normales salientes $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$. En x = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{i}) = -2yz$, $\int_0^3\int_0^{9-y^2} -2yz\,dz\,dy = -\int_0^3 y(9 - y^2)^2\,dy$ (primitiva de $y(9 - y^2)^2$: $-\frac{(9 - y^2)^3}{6}$) $= -\frac{729}{6} = -\frac{243}{2}$. En y = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{j}) = 2xz$, por simetría $+\frac{243}{2}$. En z = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{k}) = -1$, da −9π/4. Gauss: Φ − 9π/4 = 0, así que Φ = 9π/4 ✓.

Trampa: el enunciado no fija la orientación y por eso pide el gráfico: si no la indicás, el signo no está justificado.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial

$\vec{X} = (t\cos\frac{\pi t}{2}, t\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{2}, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$

que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1.

Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz - e^y, 2z + xy)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a t ∈ [−1, 0], de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1). Con $U = xyz + x^3 - e^y + z^2$, la circulación es U(B) − U(A) = 0 − (−e) = e.

El arco: $\|\dot{\vec{X}}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t/2) + t^2\text{sen}^2(\pi t/2) + (t+1)^2 = 2t^2 + 2t + 1$. Estar en la bola cerrada de radio 1 es $2t^2 + 2t + 1 \le 1 \Leftrightarrow 2t(t+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 0$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi/2), -\text{sen}(-\pi/2), 0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{X}(0) = (0, 0, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1).

¿Es de gradientes? $\vec{f} = (yz + 3x^2, xz - e^y, 2z + xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = x - x = 0$; $P'_z - R'_x = y - y = 0$; $Q'_x - P'_y = z - z = 0$. rot $\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.

Potencial: $U'_x = yz + 3x^2 \Rightarrow U = xyz + x^3 + h(y, z)$. $U'_y = xz + h'_y = xz - e^y \Rightarrow h = -e^y + k(z)$. $U'_z = xy + k'(z) = 2z + xy \Rightarrow k = z^2$. **$U = xyz + x^3 - e^y + z^2$.**

Circulación: $U(B) = 0 + 0 - e^0 + 1 = 0$; $U(A) = 0 + 0 - e + 0 = -e$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - (-e) =$ **e**.

Trampa: el recorte da $t \in [-1, 0]$ (no $[0, 1]$): la desigualdad $2t(t+1) \le 0$ se cumple entre las raíces. Y en $\vec{X}(-1)$, $\text{sen}(-\pi/2) = -1$, así que $y = (-1)(-1) = 1$.

Ejercicio 5. Sean C la línea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto (0, 0) y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x\,dxdy$.

Respuesta: C: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2). $\iint_D x\,dxdy = -8\pi$.

Línea de campo (EDO): $x' = -y$, $y' = x + 2$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{-y}$. Separando: $y\,dy = -(x+2)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{(x+2)^2}{2} + c \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = k$. Por (0, 0): k = 4. **C: $(x+2)^2 + y^2 = 4$**. Control: $\frac{d}{dt}[(x+2)^2 + y^2] = 2(x+2)(-y) + 2y(x+2) = 0$ ✓. (El campo se anula en (−2, 0), el centro: ahí no pasa ninguna línea de campo, pero no molesta porque lo que se integra es x sobre D, no el campo.)

La región: C es la circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2; está toda en el semiplano $x \le 0$ y toca al eje y sólo en el origen. D es el disco **$D = \{(x+2)^2 + y^2 \le 4\}$**.

Cambio de variables: polares centradas en el centro, $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Es una traslación seguida de polares: jacobiano $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.

Cuenta: $\iint_D x\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \int_0^2 r^2\,dr$. Primero: $-2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 = -2 \cdot 2\pi \cdot 2 = -8\pi$. Segundo: $[\text{sen}\,\theta]_0^{2\pi} = 0$, se anula.

Resultado: $\iint_D x\,dxdy =$ **-8π**. Da negativo, y está bien: D está entero en $x \le 0$. (Es $\bar{x} \cdot$ área $= (-2) \cdot 4\pi$.)

Control con polares en el origen: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = -4x$, o sea $r = -4\cos\theta$, que pide $\cos\theta \le 0$: $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{-4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta \cdot \frac{(-4\cos\theta)^3}{3}\,d\theta = -\frac{64}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = -8\pi$ ✓.

Trampa: con polares en el origen, θ no va de 0 a 2π ni r hasta 2: el disco no contiene al origen en su interior. Y no hay que tachar el signo: el resultado negativo es correcto.

5/3/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea C la curva definida por las ecuaciones
$9x^2 + y^2 - z = 0 \wedge z + 4y = 5$
y sea $\vec{f}(x, y, z) = (\alpha(x^2) - y, 2x, z^2 + 2x)$ con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Elija una orientación para C, indíquela claramente en un gráfico y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva.

> **Respuesta:** Recorriendo C en sentido antihorario visto desde arriba: circulación -15π. En sentido horario, 15π.
>
> **Planteo:** C es cerrada (paraboloide $z = 9x^2 + y^2$ cortado por un plano) y hay que elegir el sentido. Teorema del rotor con la porción de plano que encierra.
> **La curva:** del plano, $z = 5 - 4y$. En el paraboloide: $9x^2 + y^2 = 5 - 4y \Rightarrow 9x^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$. C se proyecta en una elipse de centro $(0, -2)$ y semiejes 1 (en x) y 3 (en y); su área es $\pi \cdot 1 \cdot 3 = 3\pi$.
> **Superficie elegida:** $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 5 - 4y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y + 2)^2/9 \le 1\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -4) = (0, 4, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\alpha \in C^1 \Rightarrow \alpha(x^2)$ es C^1 y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido elegido (lo que va en el gráfico):** antihorario visto desde arriba: $x = \cos t$, $y = -2 + 3 \operatorname{sen} t$, $z = 5 - 4y = 13 - 12 \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$. En el dibujo: el paraboloide, el plano $z + 4y = 5$ cortándolo, la elipse con su punto más alto $(0, -5, 25)$ y el más bajo $(0, 1, 1)$, con flechas antihorarias vistas desde arriba y la normal $(0, 4, 1)$ hacia arriba.
> **Orientación compatible:** regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (0, 4, 1)$.
> **Rotor:** $P = \alpha(x^2) - y$, $Q = 2x$, $R = z^2 + 2x$: $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 0, 0 - 2, 2 - (-1)) = (0, -2, 3)$. $\alpha(x^2)$ depende sólo de x: no aporta.
> **Flujo del rotor:** $\iint_D (0, -2, 3) \cdot (0, 4, 1)\, dxdy = \iint_D (-8 + 3)\, dxdy = -5 \cdot 3\pi = -15\pi$. (Área de D con polares elípticas $x = r\cos\theta$, $y = -2 + 3r \operatorname{sen}\theta$, jacobiano $3r$: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$.)
> **Resultado:** circulación = **-15π** en sentido antihorario visto desde arriba (15π en el otro).
> **Control (circulación directa):** $\alpha(x^2)dx$ y z^2dz son exactas; queda $\oint -y\, dx + 2x\, dy + 2x\, dz$, y sobre C $dz = -4dy$: $\oint -y\, dx - 6x\, dy$, y por Green en D (con C antihoraria): $\iint_D [\partial_x(-6x) - \partial_y(-y)]\, dxdy = \iint_D (-6 + 1)\, dxdy = -5 \cdot 3\pi = -15\pi$ ✓.
> **Trampa:** la componente -2 del rotor no se puede ignorar: la normal del plano tiene segunda componente 4 y aporta -8. Mirar sólo la tercera daría 9π.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea de campo de $\vec{f}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por el punto $(2, 0)$. Calcule $\int_\Gamma y^3\, dx + xy^2\, dy$.
Indique en un gráfico la orientación elegida.

Respuesta: Γ: $x^2/4 + y^2 = 1$. Orientación elegida antihoraria: $\oint_\Gamma y^3\,dx + xy^2\,dy = -\pi$. (Siguiendo el sentido del campo, que es horario, da π.)

Línea de campo: $\vec{f} = (4y, -x)$. Donde $y \neq 0$ la línea es un gráfico con $y' = \dfrac{-x}{4y}$, EDO de variables separables: $4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + c \Rightarrow \mathbf{x^2 + 4y^2 = K}$. Por (2, 0): K = 4. Control que vale también en (2, 0): $\nabla(x^2 + 4y^2) \cdot \vec{f} = (2x, 8y) \cdot (4y, -x) = 8xy - 8xy = 0$, o sea $\vec{f}$ es tangente a las curvas de nivel de $x^2 + 4y^2$, sin excepción de puntos (el único cero de $\vec{f}$ es el origen, que no está en la curva). Γ es la elipse $\dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}} \mathbf{+ y^2 = 1}$, cerrada.

Sentido del campo: $r(t) = (2\cos t, -\operatorname{sen} t)$ cumple $r'(t) = (-2\operatorname{sen} t, -\cos t) = \dfrac{1}{2}\vec{f}(r(t))$, así que el campo recorre la elipse en sentido horario (en (2, 0) apunta hacia abajo).

Orientación elegida (el gráfico): tomo Γ en **sentido antihorario** (en (2, 0) la flecha hacia arriba), que es la positiva para Green.

Hipótesis de Green: $P = y^3$, $Q = xy^2$, C^1 en $\mathbb{R}^2$; $D = \{x^2/4 + y^2 \leq 1\}$ es regular y Γ es su borde, cerrado, simple, C^1, orientado positivamente. $Q'_x = y^2$, $P'_y = 3y^2$, $Q'_x - P'_y = -2y^2$.

Doble integral: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, jacobiano $2r$. $\iint_D y^2\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta = \dfrac{2}{4}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \dfrac{1}{2}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{2}$. Entonces $\oint_\Gamma = -2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = -\pi$.

Cara directa: con $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, el integrando es $\operatorname{sen}^3 t\,(-2\operatorname{sen} t) + 2\cos t\operatorname{sen}^2 t\cos t = -2\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t$, y $\int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t)\,dt = -\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = -\pi$ ✓.

Resultado: antihoraria, $\oint_\Gamma y^3\,dx + xy^2\,dy = \mathbf{-\pi}$; si la orientás según el campo (horaria) da $\boldsymbol{\pi}$.

Trampa: la línea de campo sale de $y' = f_2/f_1$ (tangente paralela a $\vec{f}$); pedir $\vec{f} \cdot (1, y') = 0$ da las trayectorias ortogonales. Y en polares elípticas el jacobiano es $2r$.

Ejercicio 3. Sea H el sólido definido por $2x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ y $z \geq \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$. Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xz, -yz, e^{xy})$ a través de la frontera de H orientada de modo tal que las normales apunten hacia el exterior de H.

Respuesta: $\nabla\cdot\vec{f} = z$; flujo saliente = 12π.

En la foto el exponente de e se ve borroso; se leyó e^{xy}. El resultado es el mismo para cualquier exponente que no dependa de z.

Planteo: H está debajo del elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 12$ y encima del cono elíptico $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$. ∂H es cerrada y suave a trozos (trozo de elipsoide + trozo de cono con vértice en el origen) y se pide normal exterior.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (2xz, -yz, e^{xy})$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y una exponencial), así que $\oiint_{\partial H}\vec{f}\cdot\check{n}\,d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\,dV$.

Divergencia: $\partial/\partial x(2xz) = 2z$, $\partial/\partial y(-yz) = -z$, $\partial/\partial z(e^{xy}) = 0$. $\mathbf{\nabla\cdot\vec{f} = z}$.

Proyección: igualando z^2: $12 - 2x^2 - y^2 = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. La proyección de H sobre el plano xy es el disco D de radio 2.

Cuenta: integrando primero en z, con primitiva $z^2/2$: $\iiint_H z\,dV = \iint_D \dfrac{1}{2}[z^2]_{\sqrt{(x^2 + 2y^2)}}^{\sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}}\,dA = \iint_D \dfrac{1}{2}(12 - 3(x^2 + y^2))\,dA$. En polares: $\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2)\,r\,dr\,d\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi[6r^2 - \dfrac{3}{4}r^4]_0^2 = \pi(24 - 12) = 12\pi$.

> **Resultado: flujo saliente = 12π.**
> **Trampa:** el flujo directo es un infierno (e^{xy} sobre un cono y un elipsoide); con Gauss la exponencial desaparece porque no depende de z.

Ejercicio 4. Sea Γ el arco de la curva

$$\vec{X} = (\cos(\frac{\pi\, t}{4}), \operatorname{sen}(\frac{\pi\, t}{4}), t - 1),\ t \in \mathbb{R}$$

contenido en la bola cerrada de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{y^2} + 2z,\ 2xye^{y^2} - y^2,\ 2x)$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

> **Respuesta:** Γ corresponde a $t \in [0, 2]$, de A = (1, 0, −1) a B = (0, 1, 1). Con $U = xe^{y^2} - y^3/3 + 2xz$, la circulación es U(B) − U(A) = −1/3 − (−1) = 2/3.
>
> El enunciado escribe $\vec{f}(x, y)$, pero el campo tiene tres componentes y depende de z: se toma $\vec{f}(x, y, z)$. **El arco:** $\|\vec{X}(t)\|^2 = \cos^2(\pi t/4) + \operatorname{sen}^2(\pi t/4) + (t-1)^2 = 1 + (t-1)^2$. Estar en la bola cerrada de radio $\sqrt{2}$ es $1 + (t-1)^2 \le 2 \Leftrightarrow |t-1| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 2$. Extremos: $\vec{X}(0) = (1, 0, -1)$ y $\vec{X}(2) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2), 1) = (0, 1, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (1, 0, −1) a B = (0, 1, 1).
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (e^{y^2} + 2z,\ 2xye^{y^2} - y^2,\ 2x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 2 - 2 = 0$; $Q'_x - P'_y = 2ye^{y^2} - 2ye^{y^2} = 0$. $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** $U'_z = 2x \Rightarrow U = 2xz + h(x, y)$. $U'_x = 2z + h'_x = e^{y^2} + 2z \Rightarrow h = xe^{y^2} + k(y)$. $U'_y = 2xye^{y^2} + k'(y) = 2xye^{y^2} - y^2 \Rightarrow k = -y^3/3$. **$U = xe^{y^2} - y^3/3 + 2xz$.**
> **Circulación:** $U(B) = 0 - 1/3 + 0 = -1/3$; $U(A) = 1\cdot e^0 - 0 + 2\cdot 1\cdot(-1) = -1$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1/3 - (-1) = \mathbf{2/3}$.
> **Trampa:** el recorte por la bola sale de la tercera coordenada (las dos primeras siempre suman 1): $|t - 1| \le 1$. Y al evaluar U(A) no olvidar el 2xz = −2.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ cuyos puntos satisfacen: $0 \le y \le x,\ z \le 4$. Calcule el área de Σ.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = \dfrac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{48} \approx 4{,}52$.
>
> **Planteo:** $z - x^2 - y^2 = 0$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con vértice en el origen y abierto hacia arriba. Σ es la parte con $0 \le y \le x$ y $z \le 4$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$.
> **Dominio D:** $z \le 4$ es $r^2 \le 4$, o sea $0 \le r \le 2$. $0 \le y \le x$ obliga a $x \ge 0$ (porque $x \ge y \ge 0$), y en polares es $0 \le \operatorname{sen}\theta \le \cos\theta$, o sea $0 \le \theta \le \pi/4$. $D = [0, 2] \times [0, \pi/4]$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ ($r \ge 0$). Sólo se anula en r = 0, un punto que no aporta área.
> **Cuenta:** $A = \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r\sqrt{(1 + 4r^2)}\, dr\, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\, dr$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 2 da $\dfrac{17^{3/2} - 1}{12} = \dfrac{17\sqrt{17} - 1}{12}$. Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{4}$.
> **Resultado:** $A(\Sigma) = \mathbf{\dfrac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{48}} \approx 4{,}52$.
> **Control (cartesianas):** como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\, dx\, dy$ sobre el triángulo curvo $0 \le y \le \sqrt{2}$, $y \le x \le \sqrt{(4 - y^2)}$ (integrado en orden dx dy); integrado numéricamente da lo mismo ✓.
> **Trampa:** $0 \le y \le x$ no es el primer cuadrante: es el octavo de plano entre el eje x y la recta y = x, $\theta \in [0, \pi/4]$. Con θ hasta π/2 la respuesta da el doble.

27/2/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y - 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** D es el triángulo de vértices (0, 0), (–1, 3) y (5, 15). M = 90k (k > 0 la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** la distancia de (x, y) al eje x es |y|. En D vale $y \geq 3|x| \geq 0$, así que |y| = y y la densidad es $\delta(x, y) = ky$, con k > 0. $M = \iint_D ky\, dx\, dy$.
> **La región (dibujo):** $y \geq 3|x|$ es lo que queda por encima de una V con vértice en el origen, formada por las semirrectas $y = 3x$ ($x \geq 0$) e $y = -3x$ ($x \leq 0$). $y - 2x \leq 5$ es el semiplano debajo de la recta $y = 2x + 5$ (pendiente 2, ordenada al origen 5). Como esa recta es menos empinada que la rama de la V hacia la que sube, termina cortando las dos ramas y cierra un triángulo. Intersecciones: con la rama derecha $y = 3x$, $3x = 2x + 5$ da x = 5, punto (5, 15); con la rama izquierda $y = -3x$, $-3x = 2x + 5$ da x = –1, punto (–1, 3). D es el triángulo de vértices (0, 0), (–1, 3) y (5, 15): el origen abajo y el lado de arriba sobre la recta.
> **Límites (tipo I, partiendo en x = 0 porque el piso cambia de fórmula):** $x \in [-1, 0]$: el piso es la rama $y = -3x$ y el techo la recta, $-3x \leq y \leq 2x + 5$. $x \in [0, 5]$: el piso es $y = 3x$, $3x \leq y \leq 2x + 5$.
> **Integral en y:** primitiva $\frac{y^2}{2}$. En los dos tramos da lo mismo, porque $(-3x)^2 = (3x)^2$: $\frac{(2x + 5)^2 - 9x^2}{2} = \frac{-5x^2 + 20x + 25}{2}$.
> **Integral en x:** primitiva $F(x) = \frac{1}{2}(-\frac{5x^3}{3} + 10x^2 + 25x)$. Tramo izquierdo: $F(0) - F(-1) = 0 - \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + 10 - 25) = \frac{20}{3}$. Tramo derecho: $F(5) - F(0) = \frac{1}{2}(-\frac{625}{3} + 250 + 125) = \frac{250}{3}$. Suma: $\frac{270}{3} = 90$.
> **Resultado:** $M = k \cdot 90 =$ **90k**.
> **Control en el otro orden (dx dy):** ahora hay que partir en y = 3, donde el borde izquierdo pasa de la V a la recta. $y \in [0, 3]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre las dos ramas de la V), $y \in [3, 15]$: $\frac{y - 5}{2} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre la recta y la rama derecha). $\int_0^3 y \cdot \frac{2y}{3}\, dy = [\frac{2y^3}{9}]_0^3 = 6$ y $\int_3^{15} \frac{15y - y^2}{6}\, dy = [\frac{5y^2}{4} - \frac{y^3}{18}]_3^{15} = \frac{375}{4} - \frac{39}{4} = 84$. Total 90 ✓.
> **Control geométrico:** el área del triángulo es $\frac{1}{2}|5 \cdot 3 - 15 \cdot (-1)| = 15$ y la ordenada del baricentro es $\frac{0 + 3 + 15}{3} = 6$, así que $\iint_D y\, dA = 15 \cdot 6 = 90$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje x es |y|, no |x|. Y en el orden dy dx el piso es –3x a la izquierda del origen y 3x a la derecha. Escribir 3x en todo el intervalo no deja nada afuera: agrega un triángulo que no es parte de D (el de vértices (0, 0), (–1, –3) y (–1, 3), debajo de la rama $y = -3x$), donde además |y| = –y. En esta cuenta el número no cambia sólo de casualidad: $\iint y$ sobre ese triángulo da 0 porque es simétrico respecto del eje x. La región queda mal descripta igual, y con la densidad bien puesta (k|y|) daría otra masa.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 3 - 4\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi$.
>
> **Planteo:** no conocemos g, así que no se puede integrar $\vec{f}$ de forma directa: hay que separar la parte que es gradiente.
> **Descomposición:** sea G una primitiva de g ($G' = g$, y $G \in C^2$ porque $g \in C^1$). Entonces $\nabla(x^3y^2z^2 + G(x)) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2, 2x^3y^2z)$, así que $\vec{f} = \nabla\psi + (0, -x, 0)$ con $\psi = x^3y^2z^2 + G(x)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$.
> **La parte de gradientes:** la curva es cerrada, $\vec{\alpha}(0) = (2, 0, -1) = \vec{\alpha}(2\pi)$, y $\vec{\alpha}$ es C^1, así que $\oint_C \nabla\psi \cdot d\vec{s} = \psi(\vec{\alpha}(2\pi)) - \psi(\vec{\alpha}(0)) = 0$.
> **El resto:** $\oint_C (0, -x, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -x(t)\, y'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -(2\cos t)(2\cos t)\, dt = -4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -4\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\text{rot}(0, -x, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 3 - 2x$ (porque $z = 3 - 4\cos t = 3 - 2x$), sobre el disco $x^2 + y^2 \le 4$. La parametrización recorre la proyección en sentido antihorario, que es compatible con la normal hacia arriba $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -(\text{área del disco}) = -4\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi}$.
> **Trampa:** $\vec{f}$ no es de gradientes ($\text{rot}\,\vec{f} = (0, 0, -1) \neq \vec{0}$), así que no da 0 por ser curva cerrada: sólo se anula la parte que sí es gradiente.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, 2x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 4\pi + 12$ con la normal saliente $\vec{N} = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)$; con la entrante, $-(4\pi + 12)$.
>
> **Planteo:** Σ es un cuarto de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ (primer cuadrante) entre $z = 0$ y $z = 2$. No es cerrada y el enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y dibujarla.
> **Gráfico y orientación elegida:** dibujá el cuarto de cilindro de radio 2 entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, con los bordes verticales sobre los planos xz e yz. Elegimos la normal **saliente**: flechas horizontales que salen de la pared alejándose del eje z.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$, con $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) y $0 \le z \le 2$. $\vec{X}_\theta = (-2\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)}$.
> **Orientación:** $\vec{N} = (x, y, 0)$ apunta desde el eje z hacia afuera (por ejemplo en $\theta = 0$ da $(2, 0, 0)$ en el punto $(2, 0, z)$): coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (x + y, 2x + y, xz^2)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (2\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta, 4\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta, 2z^2\cos\theta)$. Como $\vec{N}$ no tiene componente z, xz^2 no aporta. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (2\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta)\cdot 2\cos\theta + (4\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta)\cdot 2\,\text{sen}\,\theta = 4\cos^2\theta + 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 4\,\text{sen}^2\theta = 4 + 12\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 4 + 6\,\text{sen}\,2\theta$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4 + 6\,\text{sen}\,2\theta)\, dz\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (4 + 6\,\text{sen}\,2\theta)\, d\theta = 2[4\theta - 3\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 2[(2\pi + 3) - (0 - 3)] = 2(2\pi + 6) = 4\pi + 12$.
> **Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 4\pi + 12}$** con la normal saliente (con la entrante, $\Phi = -(4\pi + 12)$).
> **Control con Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Cerramos con el techo, el piso y las caras $x = 0$ e $y = 0$; V es el cuarto de cilindro macizo. $\text{div}\,\vec{f} = 1 + 1 + 2xz = 2 + 2xz$. $\iiint_V (2 + 2xz)\, dV = 2\cdot\text{vol}(V) + 2(\iint x\, dA)(\int_0^2 z\, dz) = 2\cdot 2\pi + 2\cdot\frac{8}{3}\cdot 2 = 4\pi + \frac{32}{3}$ ($\text{vol}(V) = \frac{\pi\cdot 4}{4}\cdot 2 = 2\pi$ y $\iint x\, dA$ sobre el cuarto de disco $= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\cos\theta\, dr$

$d\theta = \frac{8}{3}$). Tapas con normal saliente: techo $z = 2$, $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = 4x$, flujo $4\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}$; piso $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -xz^2 = 0$; cara $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -y$, flujo $\int_0^2 \int_0^2 -y\, dy\, dz = -4$; cara $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -2x$, flujo $\int_0^2 \int_0^2 -2x\, dx\, dz = -8$. $\Phi_\Sigma = 4\pi + \frac{32}{3} - \frac{32}{3} - 0 + 4 + 8 = 4\pi + 12$ ✓.

Trampa: el cuarto del primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$; y el producto mixto $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ se integra fácil como ½ $\operatorname{sen} 2\theta$. Sin el dibujo de la orientación el ejercicio no está completo.

Ejercicio 4. Calcule

$\iiint_H z\, dx\, dy\, dz$,

donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \le 9,\ 0 \le z \le 1\}$.

Respuesta: $\iiint_H z\, dxdydz = 13\pi/4$.

Planteo: integrar z sobre $H = \{x^2 + y^2 + 5z^2 \le 9,\ 0 \le z \le 1\}$.

El cuerpo: $x^2 + y^2 + 5z^2 = 9$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 3, 3 y $3/\sqrt{5} \approx 1{,}34$. Como $1 < 3/\sqrt{5}$, los planos $z = 0$ y $z = 1$ lo cortan los dos: H es una rodaja con base el disco $x^2 + y^2 \le 9$ (radio 3) en $z = 0$, tapa el disco $x^2 + y^2 \le 4$ (radio 2) en $z = 1$, y costado el elipsoide. Cada tajada $z =$ cte es el disco $x^2 + y^2 \le 9 - 5z^2$.

Coordenadas: cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \le z \le 1$, $0 \le r \le \sqrt{(9 - 5z^2)}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Cuenta (por tajadas): la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(9 - 5z^2)$. Queda $\pi\int_0^1 z(9 - 5z^2)\, dz$. Primitiva $\frac{9z^2}{2} - \frac{5z^4}{4}$, entre 0 y 1: $\frac{9}{2} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$.

Resultado: $\iiint_H z\, dV = \frac{13\pi}{4}$.

Control (orden dz dr): acá el techo cambia: para $0 \le r \le 2$ el techo es el plano $z = 1$; para $2 \le r \le 3$ es el elipsoide $z = \sqrt{(\frac{9 - r^2}{5})}$. $2\pi[\int_0^2 r\cdot\frac{1}{2}\, dr + \int_2^3 r\cdot\frac{9 - r^2}{10}\, dr] = 2\pi[1 + \frac{1}{10}(\frac{81}{4} - 14)] = 2\pi(1 + \frac{5}{8}) = \frac{13\pi}{4}$ ✓.

Trampa: si integrás primero en z, no podés poner un solo techo: hay que partir en $r = 2$. Por tajadas $z =$ cte no hace falta partir nada, por eso conviene ese orden.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por $(2, 0)$ y está contenida en el semiplano $x \ge 1$.

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-\pi y \operatorname{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las ordenadas sean crecientes.

Respuesta: C: $x^2 + 4y^2 = 4$ con $x \ge 1$, de $(1, -\sqrt{3}/2)$ a $(1, \sqrt{3}/2)$. $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\sqrt{3}$.

Línea de campo: una línea de campo $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ cumple $x' = 4y$, $y' = -x$. Donde $y \ne 0$ se puede escribir $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, de variables separables: $4y\, dy = -x\, dx \Rightarrow 2y^2 = -x^2/2 + c \Rightarrow x^2 + 4y^2 = K$. Como en $(2, 0)$ es $y = 0$ (ahí la tangente es vertical), conviene confirmarlo sobre el sistema: $\frac{d}{ds}(x^2 + 4y^2) = 2x\cdot 4y + 8y\cdot(-x) = 0$, así que $x^2 + 4y^2$ es constante a lo largo de toda línea de campo, también al cruzar $y = 0$.

Por (2, 0): $K = 4$, o sea la elipse $\mathbf{x^2 + 4y^2 = 4}$ ($x^2/4 + y^2 = 1$). Con $x \ge 1$: $4y^2 = 4 - x^2 \le 3$, y $\in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$, y es el arco derecho, que pasa por $(2, 0)$. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [-\pi/3, \pi/3]$ (x

$= 2\cos t \geq 1 \Leftrightarrow |t| \leq \pi/3$).

Orientación: ordenadas crecientes: t creciente, de A = $(1, -\sqrt{3}/2)$ a B = $(1, \sqrt{3}/2)$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? P = $-\pi y \operatorname{sen}(\pi x)$ y Q = $\cos(\pi x)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) = Q'_x$. Potencial: $\phi = y\cos(\pi x)$ ($\phi'_x = -\pi y \operatorname{sen}(\pi x)$, $\phi'_y = \cos(\pi x)$ ✓).

Cuenta: $\cos(\pi) = -1$, así que $\phi(B) = (\sqrt{3}/2)(-1) = -\sqrt{3}/2$ y $\phi(A) = (-\sqrt{3}/2)(-1) = \sqrt{3}/2$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = -\sqrt{3}$.

Trampa: la línea de campo es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, no la circunferencia: los coeficientes 4 y 1 de $\vec{g}$ la estiran. Y ojo con $\cos(\pi \cdot 1) = -1$, que da vuelta el signo.

27/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y + 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** D es el triángulo de vértices (0, 0), (−5, 15) y (1, 3). M = 90k (k > 0 la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** la distancia de (x, y) al eje x es |y|. En D vale $y \geq 3|x| \geq 0$, así que |y| = y y la densidad es δ(x, y) = ky, con k > 0. $M = \iint_D ky\,dx\,dy$.
> **La región (dibujo):** $y \geq 3|x|$ es lo que queda por encima de una V con vértice en el origen, formada por las semirrectas $y = 3x$ ($x \geq 0$) e $y = -3x$ ($x \leq 0$). $y + 2x \leq 5$ es el semiplano debajo de la recta $y = 5 - 2x$ (pendiente −2, ordenada al origen 5). Como esa recta es menos empinada que la rama de la V hacia la que sube, termina cortando las dos ramas y cierra un triángulo. Intersecciones: con la rama derecha $y = 3x$, $3x = 5 - 2x$ da $x = 1$, punto (1, 3); con la rama izquierda $y = -3x$, $-3x = 5 - 2x$ da $x = -5$, punto (−5, 15). D es el triángulo de vértices (0, 0), (−5, 15) y (1, 3): el origen abajo y el lado de arriba sobre la recta.
> **Límites (tipo I, partiendo en x = 0 porque el piso cambia de fórmula):** $x \in [-5, 0]$: el piso es la rama $y = -3x$ y el techo la recta, $-3x \leq y \leq 5 - 2x$. $x \in [0, 1]$: el piso es $y = 3x$, $3x \leq y \leq 5 - 2x$.
> **Integral en y:** primitiva $\frac{y^2}{2}$. En los dos tramos da lo mismo, porque $(-3x)^2 = (3x)^2$: $\frac{(5 - 2x)^2 - 9x^2}{2} = \frac{-5x^2 - 20x + 25}{2}$.
> **Integral en x:** primitiva $F(x) = \frac{1}{2}(-\frac{5x^3}{3} - 10x^2 + 25x)$. Tramo izquierdo: $F(0) - F(-5) = 0 - \frac{1}{2}(\frac{625}{3} - 250 - 125) = \frac{250}{3}$. Tramo derecho: $F(1) - F(0) = \frac{1}{2}(-\frac{5}{3} - 10 + 25) = \frac{20}{3}$. Suma: $\frac{270}{3} = 90$.
> **Resultado:** $M = k \cdot 90 =$ **90k**.
> **Control en el otro orden (dx dy):** ahora hay que partir en y = 3, donde el borde derecho pasa de la V a la recta. $y \in [0, 3]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre las dos ramas de la V), $y \in [3, 15]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{5 - y}{2}$ (entre la rama izquierda y la recta). $\int_0^3 y \cdot \frac{2y}{3}\,dy = 6$ y $\int_3^{15} \frac{15y - y^2}{6}\,dy = 84$. Total 90 ✓. Además es el reflejo $x \to -x$ de la región del tema 1, y la densidad y no cambia con ese reflejo: la masa tenía que dar igual.
> **Control geométrico:** el área del triángulo es $\frac{1}{2}|(-5) \cdot 3 - 15 \cdot 1| = 15$ y la ordenada del baricentro es $\frac{0 + 3 + 15}{3} = 6$, así que $\iint_D y\,dA = 15 \cdot 6 = 90$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje x es |y|, no |x|. Y en el orden dy dx el piso es −3x a la izquierda del origen y 3x a la derecha. Escribir 3x en todo el intervalo no deja nada afuera: agrega un triángulo que no es parte de D (el de vértices (0, 0), (−5, −15) y (−5, 15), debajo de la rama $y = -3x$), donde además |y| = −y. En esta cuenta el número no cambia sólo de casualidad: $\iint y$ sobre ese triángulo da 0 porque es simétrico respecto del eje x. La región queda mal descripta igual, y con la densidad bien puesta (k|y|) daría otra masa.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z + g(z))$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), 4 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi$.
>
> **Planteo:** no conocemos g, así que no se puede integrar $\vec{f}$ de forma directa: hay que separar la parte que es gradiente.
> **Descomposición:** sea G una primitiva de g ($G' = g$, y $G \in C^2$ porque $g \in C^1$). Entonces $\nabla(x^3y^2z^2 + G(z)) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2, 2x^3y^2z + g(z))$, así que $\vec{f} = \nabla\psi + (0, -x, 0)$ con $\psi = x^3y^2z^2 + G(z)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$.
> **La parte de gradientes:** la curva es cerrada, $\vec{\alpha}(0) = (3, 0, -2) = \vec{\alpha}(2\pi)$, y $\vec{\alpha}$ es C^1, así que $\oint_C \nabla\psi \cdot d\vec{s} = \psi(\vec{\alpha}(2\pi)) - \psi(\vec{\alpha}(0)) = 0$.
> **El resto:** $\oint_C (0, -x, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -x(t)\, y'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -(3\cos t)(3\cos t)\, dt = -9\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -9\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\operatorname{rot}(0, -x, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 4 - 2x$ (porque $z = 4 - 6\cos t = 4 - 2x$), sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$. La parametrización recorre la proyección en sentido antihorario, que es compatible con la normal hacia arriba $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -(\text{área del disco}) = -9\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi}$.
> **Trampa:** $\vec{f}$ no es de gradientes ($\operatorname{rot}\vec{f} = (0, 0, -1) \neq \vec{0}$), así que no da 0 por ser curva cerrada: sólo se anula la parte que sí es gradiente.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + 2y, x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 9\pi + 27$ con la normal saliente $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)$; con la entrante, $-(9\pi + 27)$.
>
> **Planteo:** Σ es un cuarto de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (primer cuadrante) entre $z = 0$ y $z = 2$. No es cerrada y el enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y dibujarla.
> **Gráfico y orientación elegida:** dibujá el cuarto de cilindro de radio 3 entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, con los bordes verticales sobre los planos xz e yz. Elegimos la normal **saliente**: flechas horizontales que salen de la pared alejándose del eje z.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z)$, con $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) y $0 \le z \le 2$. $\vec{X}_\theta = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)}$.
> **Orientación:** $\vec{N} = (x, y, 0)$ apunta desde el eje z hacia afuera (por ejemplo en $\theta = 0$ da $(3, 0, 0)$ en el punto $(3, 0, z)$): coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (x + 2y, x + y, xz^2)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (3\cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta, 3z^2\cos\theta)$. Como $\vec{N}$ no tiene componente z, xz^2 no aporta. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (3\cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta)\cdot 3\cos\theta + (3\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\cdot 3\operatorname{sen}\theta = 9\cos^2\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta = 9 + 27\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta)\, dz\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta)\, d\theta = 2[9\theta - \frac{27}{4}\cos2\theta]_0^{\pi/2}$
> $= 2[(\frac{9\pi}{2} + \frac{27}{4}) + \frac{27}{4}] = 9\pi + 27$.
> **Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 9\pi + 27}$** con la normal saliente (con la entrante, $\Phi = -(9\pi + 27)$).
> **Control con Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Cerramos con el techo, el piso y las caras $x = 0$ e $y = 0$; V es el cuarto

de cilindro macizo. div $\vec{f} = 1 + 1 + 2xz = 2 + 2xz$. $\iiint_V (2 + 2xz)\, dV = 2\cdot\text{vol}(V) + 2(\iint x\, dA)(\int_0^2 z\, dz) = 2\cdot\frac{9\pi}{2} + 2\cdot 9\cdot 2 = 9\pi + 36$ ($\text{vol}(V) = \frac{9\pi}{4}\cdot 2$ y $\iint x\, dA$ sobre el cuarto de disco $= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = 9$). Tapas con normal saliente: techo $z = 2$, $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = 4x$, flujo 36; piso $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = 0$; cara $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -2y$, flujo $\int_0^2\int_0^3 -2y\, dy\, dz = -18$; cara $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -x$, flujo $\int_0^2\int_0^3 -x\, dx\, dz = -9$. $\Phi_\Sigma = 9\pi + 36 - 36 - 0 + 18 + 9 = 9\pi + 27$ ✓.

Trampa: el cuarto del primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$; y el producto mixto sen θ cos θ se integra fácil como ½ sen 2θ. Sin el dibujo de la orientación el ejercicio no está completo.

Ejercicio 4. Calcule
$\iiint_H z\, dx\, dy\, dz$,
donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 7z^2 \le 16,\ 0 \le z \le 1\}$.

Respuesta: $\iiint_H z\, dxdydz = 25\pi/4$.

Planteo: integrar z sobre $H = \{x^2 + y^2 + 7z^2 \le 16,\ 0 \le z \le 1\}$.

El cuerpo: $x^2 + y^2 + 7z^2 = 16$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 4, 4 y $4/\sqrt{7} \approx 1{,}51$. Como $1 < 4/\sqrt{7}$, los planos $z = 0$ y $z = 1$ lo cortan los dos: H es una rodaja con base el disco $x^2 + y^2 \le 16$ (radio 4) en $z = 0$, tapa el disco $x^2 + y^2 \le 9$ (radio 3) en $z = 1$, y costado el elipsoide. Cada tajada $z = \text{cte}$ es el disco $x^2 + y^2 \le 16 - 7z^2$.

Coordenadas: cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \le z \le 1$, $0 \le r \le \sqrt{(16 - 7z^2)}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Cuenta (por tajadas): la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(16 - 7z^2)$. Queda $\pi\int_0^1 z(16 - 7z^2)\, dz$. Primitiva $8z^2 - \frac{7z^4}{4}$, entre 0 y 1: $8 - \frac{7}{4} = \frac{25}{4}$.

Resultado: $\iiint_H z\, dV = \frac{25\pi}{4}$.

Control (orden dz dr): para $0 \le r \le 3$ el techo es el plano $z = 1$; para $3 \le r \le 4$ es el elipsoide $z = \sqrt{(\frac{16 - r^2}{7})}$. $2\pi[\int_0^3 r\cdot\frac{1}{2}\, dr + \int_3^4 r\cdot\frac{16 - r^2}{14}\, dr] = 2\pi[\frac{9}{4} + \frac{1}{14}\cdot\frac{49}{4}] = 2\pi(\frac{9}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{25\pi}{4}$ ✓.

Trampa: integrando primero en z hay que partir en $r = 3$, donde el plano $z = 1$ deja de ser el techo. Por tajadas $z = \text{cte}$ se evita.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (0, 2) y está contenida en el semiplano $y \ge 1$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y),)$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las abscisas sean decrecientes.

Respuesta: C: $4x^2 + y^2 = 4$ con $y \ge 1$, de $(\sqrt{3}/2, 1)$ a $(-\sqrt{3}/2, 1)$. $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sqrt{3}$.

La coma final en $\vec{f} = (\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y),)$ es una errata: $\vec{f}$ es el campo de $\mathbb{R}^2$ $(\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y))$.

Línea de campo: una línea de campo $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ cumple $x' = y$, $y' = -4x$. Donde $y \ne 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{y}$, de variables separables: $y\, dy = -4x\, dx \Rightarrow y^2/2 = -2x^2 + c \Rightarrow 4x^2 + y^2 = K$. Confirmación sobre el sistema: $\frac{d}{ds}(4x^2 + y^2) = 8x\cdot y + 2y\cdot(-4x) = 0$, así que $4x^2 + y^2$ es constante a lo largo de toda línea de campo.

Por (0, 2): $K = 4$, o sea la elipse $\mathbf{4x^2 + y^2 = 4}$ ($x^2 + y^2/4 = 1$). Con $y \ge 1$: $4x^2 = 4 - y^2 \le 3$, $x \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$, y es el arco de arriba, que pasa por (0, 2). Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [\pi/6, 5\pi/6]$

($y = 2 \operatorname{sen} t \geq 1 \Leftrightarrow t \in [\pi/6, 5\pi/6]$).

Orientación: abscisas decrecientes: $x = \cos t$ decrece con t, así que t creciente, de $A = (\sqrt{3}/2, 1)$ a $B = (-\sqrt{3}/2, 1)$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = \cos(\pi y)$ y $Q = -\pi x \operatorname{sen}(\pi y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = -\pi \operatorname{sen}(\pi y) = Q'_x$. Potencial: $\phi = x\cos(\pi y)$ ($\phi'_x = \cos(\pi y)$, $\phi'_y = -\pi x \operatorname{sen}(\pi y)$ ✓).

Cuenta: $\cos(\pi) = -1$, así que $\phi(B) = (-\sqrt{3}/2)(-1) = \sqrt{3}/2$ y $\phi(A) = (\sqrt{3}/2)(-1) = -\sqrt{3}/2$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = \sqrt{3}$.

Trampa: la línea de campo es $4x^2 + y^2 = 4$ (más alta que ancha), no $x^2 + 4y^2 = 4$: el 4 de $\vec{g}$ multiplica a x en la segunda componente, y eso pone el 4 delante de x^2 en la cantidad que se conserva.

20/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + 2xz, x^2z, \varphi(x, z))$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, a lo largo del borde de la superficie

$\Sigma : x = 2, y + z \le 4, y \ge 0, z \ge 0.$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(2, 0, 0) \to (2, 4, 0) \to (2, 0, 4) \to (2, 0, 0)$ (antihorario visto desde x positivo, normal $(1, 0, 0)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32$. En el sentido contrario, 32.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = y^2 + 2xz$, $Q = x^2z$, $R = \varphi(x, z)$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$.
> **La superficie:** Σ es el triángulo del plano $x = 2$ con vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (2, 4, 0)$ y $D = (2, 0, 4)$; su borde C son los tres lados, una curva cerrada y suave a trozos. Σ es plana (suave, orientable, acotada) y ya es la superficie más cómoda con ese borde: la uso tal cual.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 0 - x^2 = -x^2$ (φ no depende de y); $P'_z - R'_x = 2x - \varphi'_x(x, z)$; $Q'_x - P'_y = 2xz - 2y$. **$\operatorname{rot} \vec{f} = (-x^2, 2x - \varphi'_x, 2xz - 2y)$**.
> **Orientación:** tomo $\vec{n} = (1, 0, 0)$, hacia x creciente. Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia x positivo, los dedos recorren el borde en sentido antihorario **visto desde x positivo**, con el eje y hacia la derecha y el z hacia arriba (porque $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$). Eso es **A → B → D → A**: $(2, 0, 0) \to (2, 4, 0) \to (2, 0, 4) \to (2, 0, 0)$. En el gráfico, el triángulo en el plano $x = 2$ con esas flechas y la normal saliendo hacia x positivo.
> **Cuenta:** $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} = -x^2$, que en Σ ($x = 2$) vale -4; la componente con φ se multiplica por 0. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^4 \int_0^{4-y} (-4)\, dz\, dy = -4 \int_0^4 (4 - y)\, dy = -4\,[4y - y^2/2]_0^4 = -4 \cdot 8 = -32$.
> **Resultado:** recorriendo A → B → D → A, **$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32$** (en el sentido contrario, 32).
> **Control directo:** en $x = 2$ es $dx = 0$ y queda $\int 4z\, dy + \varphi(2, z)\, dz$. En AB, $z = 0$; en DA, $dy = 0$; los dos tramos con φ (BD y DA) se cancelan entre sí porque recorren el mismo intervalo de z en sentidos opuestos. Queda BD: $(2, 4 - t, t)$, $t \in [0, 4]$, $dy = -dt$: $\int_0^4 -4t\, dt = -32$ ✓.
> **Trampa:** "antihorario" depende de desde dónde mires: mirá desde la punta de la normal. Mirando el plano $x = 2$ desde el origen el mismo recorrido se ve horario.

Ejercicio 2. Hallar el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xe^z, z^2)$ a través de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 18, z \ge 3.$

Considere la orientación para la cual las normales apuntan hacia el origen.

> **Respuesta:** $\Phi = -243\pi/2$ (normales hacia el origen). Con la saliente sería $243\pi/2$.
>
> **Planteo:** Σ es el casquete de la esfera de radio $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ con $z \ge 3$; su borde es la circunferencia $z = 3$, $x^2 + y^2 = 18 - 9 = 9$. Es abierta: la cerramos con la tapa T: $z = 3$, $x^2 + y^2 \le 9$, y $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 18, z \ge 3\}$.
> **Orientación:** "hacia el origen" es hacia adentro de la esfera, o sea **entrante** a V. Calculamos todo con normal saliente y al final cambiamos el signo.
> **Hipótesis:** $\vec{f} = (yz, xe^z, z^2)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; V acotado, $\partial V = \Sigma \cup T$ cerrada y suave a trozos.
> **Divergencia:** $\partial(yz)/\partial x + \partial(xe^z)/\partial y + \partial(z^2)/\partial z = 0 + 0 + 2z$.
> **Triple (cilíndricas):** $3 \le z \le \sqrt{(18 - r^2)}$, $0 \le r \le 3$. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 [z^2]_3^{\sqrt{(18 - r^2)}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr = 2\pi\,[9r^2/2 - r^4/4]_0^3 = 2\pi \cdot 81/4 = 81\pi/2$.

Tapa: normal saliente de V en z = 3: (0, 0, –1). $\mathbf{f} \cdot \hat{n} = -z^2 = -9$, flujo = $-9 \cdot$ área(T) = $-9 \cdot 9\pi = -81\pi$.
Casquete con normal saliente: $81\pi/2 - (-81\pi) = 243\pi/2$.
Resultado: con las normales hacia el origen, $\Phi =$ **$-243\pi/2$**.
Trampa: hay dos signos distintos en juego: restar la tapa con su normal saliente (hacia abajo) y después dar vuelta el resultado porque la orientación pedida es la entrante. Si te olvidás del último, contestás $243\pi/2$.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas: $x^2 + ky = 0$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de la familia $\mathcal{G}$ que pasa por (0, –1). Calcule
$\iint_D x^2 \, dxdy$.

Respuesta: Γ: $x^2 + 2y^2 = 2$ (elipse de semiejes $\sqrt{2}$ en x y 1 en y). $\iint_D x^2 \, dxdy = \sqrt{2}\,\pi/2 \approx 2{,}221$.

EDO de $\mathcal{F}$: $x^2 + ky = 0$ son parábolas con vértice en el origen. Despejando $k = -\frac{x^2}{y}$ ($y \neq 0$) y derivando $x^2 + ky = 0$: $2x + k\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{k} = -2x \cdot (-\frac{y}{x^2}) = \frac{2y}{x}$.

Familia ortogonal $\mathcal{G}$: $y' = -\frac{x}{2y}$. Separando: $2y\,dy = -x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + 2y^2 = C$. Por (0, –1): $C = 2$. **Γ: $x^2 + 2y^2 = 2$**, o sea $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Control: la tangente a $\mathcal{F}$ va en la dirección (x, 2y) y la de Γ en (2y, –x); producto escalar $2xy - 2xy = 0$ ✓.
La región: Γ es una elipse acostada centrada en el origen que corta a los ejes en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ y $(0, \pm 1)$. D = $\{x^2 + 2y^2 \leq 2\}$.
Cambio de variables: $x = \sqrt{2}\,r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($x^2 + 2y^2 = 2r^2$). Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,r$.
Cuenta: $\iint_D x^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\cos^2\theta \cdot \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = 2\sqrt{2} \cdot (\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta)(\int_0^1 r^3\,dr) = 2\sqrt{2} \cdot [\frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}]_0^{2\pi} \cdot [\frac{r^4}{4}]_0^1 = 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}$.
Resultado: $\iint_D x^2\,dxdy = \mathbf{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}} \approx 2{,}221$.
Control en cartesianas: para $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $|y| \leq \sqrt{(1 - x^2/2)}$: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2\sqrt{(1 - x^2/2)}\,dx$; con $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,u$ ($dx = \sqrt{2}\cos u\,du$) queda $4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{sen}^2u\cos^2u\,du = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$ ✓.
Trampa: el $\sqrt{2}$ aparece dos veces: en $x^2 = 2r^2\cos^2\theta$ y en el jacobiano $\sqrt{2}\,r$. Sin el del jacobiano da $\pi/2$, y sin el de x^2 da $\sqrt{2}\,\pi/4$.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u - v, u + v, 2v + u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Calcular el área de la porción de Σ cuyos puntos satisfacen las condiciones: $x+y \leq 2$, $0 \leq x \leq y$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}995$.

Planteo: la superficie viene dada por $\vec{X}(u, v) = (u - v, u + v, 2v + u^2)$ y las condiciones están en x, y; hay que pasarlas a (u, v). $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|\,du\,dv$.
Dominio D: $x + y = (u - v) + (u + v) = 2u$, así que $x + y \leq 2$ es $u \leq 1$. $x \geq 0$ es $u - v \geq 0$, o sea $v \leq u$. $x \leq y$

es $u - v \le u + v$, o sea $v \ge 0$. $D = \{0 \le v \le u \le 1\}$: el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1) del plano uv. (De ahí sale $u \ge 0$ sola.) La aplicación $(u, v) \mapsto (x, y)$ es lineal con determinante $2 \neq 0$, así que $\vec{X}$ es inyectiva y Σ no se superpone.

Vector normal: $\vec{X}_u = (1, 1, 2u)$, $\vec{X}_v = (-1, 1, 2)$. $\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1 \cdot 2 - 2u \cdot 1, 2u \cdot (-1) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = (2 - 2u, -2 - 2u, 2)$. $\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 = 4(1 - u)^2 + 4(1 + u)^2 + 4 = 4(3 + 2u^2)$, entonces $\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = 2\sqrt{(3 + 2u^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Cuenta: como la norma depende sólo de u, conviene integrar primero en v: $A = \int_0^1 \int_0^u 2\sqrt{(3 + 2u^2)}\, dv\, du$. Integral en v: primitiva $2\sqrt{(3 + 2u^2)}\, v$, entre 0 y u da $2u\sqrt{(3 + 2u^2)}$. Integral en u: con $w = 3 + 2u^2$, $dw = 4u\, du$, primitiva $\frac{1}{3}(3 + 2u^2)^{3/2}$; entre 0 y 1 da $\frac{5^{3/2} - 3^{3/2}}{3}$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3}} \approx 1{,}995$.

Control (como gráfica): despejando $u = \frac{x + y}{2}$, $v = \frac{y - x}{2}$, Σ es la gráfica $z = (y - x) + \frac{(x + y)^2}{4}$ sobre $T = \{0 \le x \le y, x + y \le 2\}$. Con $s = x + y$: $z_x = \frac{s}{2} - 1$, $z_y = \frac{s}{2} + 1$ y $dS = \sqrt{(3 + \frac{s^2}{2})}\, dx\, dy$; integrado numéricamente sobre T da 1,99473 ✓ (y es la misma cuenta, porque $dx\, dy = 2\, du\, dv$ y $\sqrt{(3 + s^2/2)} = \sqrt{(3 + 2u^2)}$).

Trampa: integrar en (u, v) con los límites de x, y sin traducirlos, o dar como dominio el triángulo de x, y con la norma de (u, v): se mezclan las variables y se pierde el factor 2.

Ejercicio 5. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva

$\Gamma : y^2 + x^2 + 2x = 3,\ y - x \le 1,$

orientado de modo tal que el punto incial tenga ordenada positiva.

Respuesta: $\alpha(y) = 3y$, $\vec{f} = \nabla(3xy^2)$. Γ va de $(-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -12\sqrt{2}$.

Condición de gradientes: $P = y\alpha(y)$ y $Q = 2x\alpha(y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{f} = \nabla\phi$ (con $\phi \in C^2$, porque $\vec{f}$ es C^1), por Schwarz $P'_y = Q'_x$: $\alpha(y) + y\alpha'(y) = 2\alpha(y) \Leftrightarrow y\alpha'(y) = \alpha(y)$ para todo y.

La EDO: para $y \neq 0$, $(\alpha/y)' = \frac{y\alpha' - \alpha}{y^2} = 0$, así que $\alpha = K_1 y$ en $y > 0$ y $\alpha = K_2 y$ en $y < 0$. Como $\alpha \in C^1$, α' es continua en 0: $\alpha'(0) = K_1$ por derecha y K_2 por izquierda, entonces $K_1 = K_2 = K$ (y $\alpha(0) = 0$ sale de la ecuación en $y = 0$). Queda $\alpha(y) = Ky$. Control: $y \cdot K = Ky$ ✓.

Constante: $\vec{f}(1, 1) = (\alpha(1), 2\alpha(1)) = (K, 2K) = (3, 6) \Rightarrow K = 3$ (las dos componentes dan lo mismo, así que el dato es consistente). $\alpha(y) = 3y$ y $\vec{f} = (3y^2, 6xy)$. Con esto, $P'_y = 6y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes, con potencial $\phi(x, y) = 3xy^2$ ($\phi'_x = 3y^2$, $\phi'_y = 6xy$ ✓).

La curva: $y^2 + x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 2. La recta $y = x + 1$ pasa por el centro, así que $y - x \le 1$ se queda con media circunferencia: la que contiene a (1, 0) ($0 - 1 \le 1$ ✓) y a $(-1, -2)$. Extremos: reemplazando $y = x + 1$, $2(x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2}$: $P_1 = (-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $P_2 = (-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Orientación: el punto inicial tiene ordenada positiva, así que se va de P_1 a P_2 (en sentido horario, pasando por (1, 0) y $(-1, -2)$).

Cuenta: $\phi(P_2) = 3(-1 - \sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = -6 - 6\sqrt{2}$ y $\phi(P_1) = 3(-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = -6 + 6\sqrt{2}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \mathbf{-12\sqrt{2}}$.

Trampa: la condición $P'_y = Q'_x$ es una EDO para α, no una igualdad entre números; y como el campo es de gradientes, no hace falta parametrizar el arco: alcanzan los extremos, pero bien elegidos (el inicial es el de ordenada positiva).

19/12/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12 \wedge \sqrt{(2x^2 + y^2)} \leq z\}$.
Halle el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xy, z - y^2, z^2)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

> **Respuesta:** $\nabla \cdot \vec{f} = 2z$; flujo con normales hacia el interior = -24π (el saliente sería 24π).
>
> **Planteo:** H está debajo del elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 12$ y encima del cono elíptico $z = \sqrt{(2x^2 + y^2)}$. ∂H es cerrada y suave a trozos (un trozo de elipsoide y un trozo de cono, con un vértice en el origen, que no molesta).
> **Hipótesis de Gauss:** $\vec{f} = (2xy, z - y^2, z^2)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior, $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}_{ext}\, d\sigma = \iiint_H \nabla \cdot \vec{f}\, dV$; como se piden normales hacia el interior, el flujo pedido es **menos** esa triple.
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = 2y + (-2y) + 2z = \mathbf{2z}$.
> **Proyección:** igualando z^2: $12 - x^2 - 2y^2 = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. El cono queda por debajo del elipsoide exactamente cuando $x^2 + y^2 \leq 4$, así que la proyección de H sobre el plano xy es el disco D de radio 2 (las formas elípticas se compensan y el borde es una circunferencia).
> **Cuenta:** integrando primero en z, con primitiva z^2: $\iiint_H 2z\, dV = \iint_D [z^2]_{\sqrt{(2x^2 + y^2)}}^{\sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}}\, dA = \iint_D (12 - x^2 - 2y^2 - 2x^2 - y^2)\, dA = \iint_D (12 - 3(x^2 + y^2))\, dA$. En polares: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[6r^2 - \frac{3}{4}r^4]_0^2 = 2\pi(24 - 12) = 24\pi$.
> **Resultado:** con normales hacia el interior, **flujo = -24π**.
> **Trampa:** el signo: Gauss da el flujo saliente (24π) y el enunciado pide normales hacia adentro. Además, integrar primero en z con primitiva z^2 evita las raíces: z^2 en los límites devuelve las expresiones sin $\sqrt{}$.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2x + yz, 4y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 2y \wedge x^2 + y^2 + z = 3 \wedge x \geq 0$,
recorrido de modo tal que la segunda componente del vector tangente a la curva nunca sea negativa.

> **Respuesta:** C va de (0, 0, 3) a (0, 2, −1). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8$.
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (2x + yz, 4y + xz, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, y $\text{rot}\, \vec{f} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$, así que es un campo de gradientes. Potencial: de $\phi'_x = 2x + yz$, $\phi = x^2 + xyz + h(y, z)$; $\phi'_y = xz + h'_y = 4y + xz \Rightarrow h = 2y^2 + k(z)$; $\phi'_z = xy + k'(z) = xy \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xyz$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 2y$ es la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro (0, 1) y radio 1, y reemplazando $x^2 + y^2 = 2y$ en la segunda ecuación queda $z = 3 - 2y$. Con $x \geq 0$ es la media circunferencia derecha, de extremos (0, 0) y (0, 2) en el plano xy. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (\text{sen } t, 1 - \cos t, 1 + 2 \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ ($x = \text{sen } t \geq 0$ ✓).
> **Orientación:** la segunda componente del vector tangente es $y'(t) = \text{sen } t \geq 0$ en $[0, \pi]$, así que el recorrido pedido es el de t creciente (al revés sería $-\text{sen } t \leq 0$, que no sirve). Entonces se va de A = (0, 0, 3) a B = (0, 2, −1).
> **Cuenta:** $\phi(B) = 0 + 2 \cdot 4 + 0 = 8$ y $\phi(A) = 0$.
> **Resultado:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = 8$.

Trampa: la z de cada extremo sale de la curva ($z = 3 - x^2 - y^2$): en A vale 3 y en B vale –1, no 0. Acá el término xyz se anula porque x = 0 en los dos extremos, pero no lo des por hecho sin mirarlo.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción del plano de ecuación x + 2y + 2z = 2 contenida en el primer octante. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2z, -z, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación empleada en el cálculo.

Respuesta: Con normal (1, 2, 2) (del lado opuesto al origen): Φ = 1. Con la opuesta, –1.

Planteo: el plano x + 2y + 2z = 2 corta los ejes en (2, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1); Σ es ese triángulo.

Despejo $z = 1 - \frac{x}{2} - y$ y parametrizo $\vec{X}(x, y) = (x, y, 1 - x/2 - y)$ con D = {x ≥ 0, y ≥ 0, x/2 + y ≤ 1} (la última es z ≥ 0).

Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, -1/2)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1/2, 1, 1)$.

Orientación elegida: la de $\vec{N} = (1/2, 1, 1)$, paralela a (1, 2, 2): hacia arriba, del lado del plano opuesto al origen. En el gráfico: el triángulo de vértices (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) con una flecha según (1, 2, 2) alejándose del origen.

Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2z, -z, 1)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = z - z + 1 = 1$.

Cuenta: $\Phi = \int_0^2 \int_0^{1 - x/2} 1 \, dy \, dx = \int_0^2 (1 - \frac{x}{2}) \, dx = [x - \frac{x^2}{4}]_0^2 = 1$ (es el área del triángulo de catetos 2 y 1).

Resultado: Φ = **1** con la normal elegida (–1 con la opuesta).

Control con el versor: $\check{n} = (1, 2, 2)/3$ y $\vec{f} \cdot \check{n} = (2z - 2z + 2)/3 = 2/3$, constante. El área del triángulo en el espacio es $\frac{1}{2}\|(-2, 1, 0) \times (-2, 0, 1)\| = \frac{1}{2}\|(1, 2, 2)\| = 3/2$, así que $\Phi = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ ✓.

Trampa: confundir el área de la proyección (1) con el área del triángulo (3/2): con $\vec{N}$ sin normalizar se integra sobre D, con $\check{n}$ se integra con dσ.

Ejercicio 4. Sea C la curva de ecuación

$\frac{x^2}{a^2} + a^2y^2 = 1$, a > 0.

Determine el valor de la constante a para que la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{x^2} + 3x^2y, e^{y^2} + 3y^2x)$ a lo largo de C sea nula.

Respuesta: $\oint^+ \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{3\pi(1 - a^4)}{4a^2}$; es nula si y sólo si **a = 1** (C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$).

Los exponentes de las dos exponenciales se leen como 2 (e^{x^2}, e^{y^2}); si fueran 3 no cambia nada, porque e^{x^2} sólo depende de x y e^{y^2} sólo de y y no entran en el rotor.

La curva: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1/a^2} = 1$ es una elipse de semiejes a (en x) y 1/a (en y): cerrada, simple y suave. Encierra la región compacta D. La consigna no fija el sentido; tomo el antihorario (con el otro cambia el signo, pero no dónde se anula).

Hipótesis de Green: $P = e^{x^2} + 3x^2y$ y $Q = e^{y^2} + 3y^2x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Rotor: $Q'_x = 3y^2$, $P'_y = 3x^2$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3y^2 - 3x^2}$.

Cambio de variables: $x = a\,r\cos\theta$, $y = \frac{r}{a}\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\,r\,\text{sen}\,\theta \\ \frac{1}{a}\,\text{sen}\,\theta & \frac{r}{a}\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta = r$.

Cuenta: $\iint_D (3y^2 - 3x^2)\,dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{a^2} - a^2 r^2\cos^2\theta\right) r\,dr\,d\theta = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{a^2} - \pi a^2\right) = \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2} - a^2\right) = \frac{3\pi(1-a^4)}{4a^2}$ (usando $\int_0^1 r^3\,dr = 1/4$ e $\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$).
Condición: la circulación es nula $\Leftrightarrow 1 - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 = 1$; con $a > 0$, **$a = 1$**. Ahí C es la circunferencia unitaria y la nulidad se ve también por simetría: $\iint (y^2 - x^2)\,dA = 0$ en un disco.
Trampa: no alcanza con decir "el rotor no es cero, entonces la circulación no es nula": el rotor $3y^2 - 3x^2$ cambia de signo y su integral se puede cancelar. Hay que calcularla en función de a.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas: $xy = k$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde está compuesto por una porción de la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por (0, 1) y un segmento de la recta $y = \sqrt{5}$. Calcule
$\iint_D y^3 dydx$.

Respuesta: Γ: rama superior de $y^2 - x^2 = 1$. $D = \{-2 \le x \le 2,\ \sqrt{(1+x^2)} \le y \le \sqrt{5}\}$. $\iint_D y^3\,dydx = 272/15$.

EDO de $\mathcal{F}$: derivando $xy = k$ respecto de x: $y + x\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$ (la k desaparece sola).

Familia ortogonal $\mathcal{G}$: $y' = \frac{x}{y}$. Separando: $y\,dy = x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 - x^2 = C$. Por (0, 1): $C = 1$.
Control: los gradientes de xy y de $y^2 - x^2$ son (y, x) y (−2x, 2y), con producto escalar $-2xy + 2xy = 0$ en todo punto ✓. (En (0, 1) la forma $y' = -y/x$ no está definida, pero en forma diferencial $y\,dx + x\,dy = 0$ y su ortogonal $x\,dx - y\,dy = 0$ sí lo están; la curva de $\mathcal{F}$ por (0, 1) es el eje y, con $k = 0$, y Γ cruza ahí con tangente horizontal.)
La curva Γ: $y^2 - x^2 = 1$ es una hipérbola con dos ramas; la que pasa por (0, 1) es la de arriba, **$y = \sqrt{(1 + x^2)}$**: vértice en (0, 1), abre hacia arriba, asíntotas $y = \pm x$.
La región (dibujo): la recta $y = \sqrt{5}$ corta la rama en $1 + x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm 2$, en $(-2, \sqrt{5})$ y $(2, \sqrt{5})$. D es el casquete entre la rama (abajo) y el segmento horizontal (arriba), simétrico respecto del eje y: **$D = \{-2 \le x \le 2,\ \sqrt{(1 + x^2)} \le y \le \sqrt{5}\}$** $= \{1 \le y \le \sqrt{5},\ -\sqrt{(y^2 - 1)} \le x \le \sqrt{(y^2 - 1)}\}$.
Cuenta en el orden dydx: $\int_{-2}^{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{\sqrt{(1+x^2)}}^{\sqrt{5}} dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(25 - (1+x^2)^2)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(24 - 2x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{4}\left[24x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(48 - \frac{16}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{544}{15} = \frac{272}{15}$.
Resultado: $\iint_D y^3\,dydx$ = **272/15** ≈ 18,13.
Control en el orden dxdy: $\int_1^{\sqrt{5}} y^3 \cdot 2\sqrt{(y^2 - 1)}\,dy$. Con $u = y^2 - 1$, $du = 2y\,dy$, $y^2 = u + 1$, y pasa de 1 a $\sqrt{5}$ cuando u pasa de 0 a 4: $\int_0^4 (u+1)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^4 = \frac{64}{5} + \frac{16}{3} = \frac{272}{15}$ ✓.
Trampa: $y^2 - x^2 = 1$ no es una curva cerrada; la región se cierra con el segmento de $y = \sqrt{5}$. Tomar la rama de abajo ($y = -\sqrt{(1 + x^2)}$) no encierra nada con esa recta.

12/12/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región H de $\mathbb{R}^3$ definida por
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 18 \wedge z \geq 1\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 32\pi k$ ($\delta = kz$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 2z^2 = 18$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y 3. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 16$ (circunferencia de radio 4). H es el casquete de arriba: entre $z = 1$ y la punta $z = 3$. Cada tajada $z = cte$ es el disco $x^2 + y^2 \leq 18 - 2z^2$.
> **Densidad:** la distancia al plano xy es $|z| = z$ (en H, $z \geq 1$): $\delta = kz$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $1 \leq z \leq 3$, $0 \leq r \leq \sqrt{(18 - 2z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r da el área del disco, $\pi(18 - 2z^2)$. $M = k\pi \int_1^3 z(18 - 2z^2)\, dz$. Primitiva: $9z^2 - \frac{z^4}{2}$. En $z = 3$: $81 - \frac{81}{2} = \frac{81}{2}$. En $z = 1$: $9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$. Diferencia: $\frac{64}{2} = 32$.
> **Resultado: $M = 32\pi k$.**
>
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 4$ y $1 \leq z \leq \sqrt{(\frac{18 - r^2}{2})}$. $M = 2\pi k \int_0^4 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{\sqrt{((18 - r^2)/2)}} dr =$
> $\pi k \int_0^4 r \cdot \frac{16 - r^2}{2}\, dr = \frac{\pi k}{2}\left[8r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^4 = \frac{\pi k}{2}(128 - 64) = 32\pi k$ ✓.
> **Trampa:** el casquete va de $z = 1$ a $z = 3$ (la punta del elipsoide), no hasta $\sqrt{18}$. En el orden dz dr, r va hasta 4 (radio del corte con $z = 1$), y el piso de z es 1, no 0.

Ejercicio 2. Sea Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \leq z \leq x \wedge y \geq 0$
orientada de modo tal que las normales apunten hacia el eje z.
Calcule el flujo a través de Σ de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z\,\varphi(x, y, z))$, donde φ es un campo escalar continuo en $\mathbb{R}^3$.

> **Respuesta:** $\Phi = -8$ (con $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\,\text{sen}\,\theta, 0)$, hacia el eje z; φ no interviene).
>
> **Planteo:** $x^2 + y^2 = 4$ es el cilindro de radio 2 y eje z: $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$. La condición $0 \leq z \leq x$ sólo tiene puntos si $x \geq 0$, y con $y \geq 0$ queda $\theta \in [0, \pi/2]$; para cada θ, $0 \leq z \leq 2\cos\theta$. $D = \{0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq z \leq 2\cos\theta\}$.
> **Normal:** $\vec{X}_\theta = (-2\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)$, que apunta hacia afuera del cilindro.
> **Orientación:** se pide hacia el eje z, así que **cambio el signo**: $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\,\text{sen}\,\theta, 0)$.
> **Producto escalar:** $\vec{f}(\vec{X}) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z\,\varphi(\vec{X}))$. Como $\vec{N}$ es horizontal, el término con φ no aparece (por eso alcanza con que φ sea continua): $\vec{f} \cdot \vec{N} = -4\cos^2\theta - 4\,\text{sen}^2\theta = -4$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (-4)\, dz\, d\theta = -8 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = -8\,[\text{sen}\,\theta]_0^{\pi/2} = -8$.
> **Resultado: $\Phi = -8$.**
> **Control con el versor:** $\vec{f} \cdot \check{n} = -(x^2 + y^2)/2 = -2$ constante; el área de Σ es $\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta \cdot 2\, d\theta = 4$, así que $\Phi = -8$ ✓.

> **Trampa:** Gauss no se puede usar: φ es sólo continua y div $\vec{f}$ pide derivar φ. Otro error: tomar θ de 0 a π (por $y \geq 0$) sin ver que para $x < 0$ la condición $0 \leq z \leq x$ no tiene puntos.

Ejercicio 3. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y^2, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por
$x^2 + y^2 - 2y = 0 \wedge 2y + z = 6$
recorrida de modo que en el punto (0, 0, 6) el versor tangente tenga primera componente positiva.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ (el sentido pedido es antihorario visto desde arriba).
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 - y^2$, $Q = 3x^2y^2z^2 + y$, $R = 2x^2y^3z$: polinomios, así que $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. Parametrizar directo deja integrales trigonométricas larguísimas por el término $2xy^3z^2$; conviene el teorema del rotor.
> **La curva:** $x^2 + y^2 - 2y = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, un cilindro circular de radio 1 con eje paralelo a z por (0, 1); $2y + z = 6$ es un plano. C es la elipse donde el plano corta al cilindro: cerrada y suave.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = 6xy^2z^2 - (6xy^2z^2 - 2y) = 2y$. **rot $\vec{f}$ = (0, 0, 2y)**. (Es lo mismo que ver $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y^2, y, 0)$: sólo circula la parte $(-y^2, y, 0)$.)
> **Superficie elegida:** el trozo S del plano $z = 6 - 2y$ que queda dentro del cilindro, $(x, y) \in D$: $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Es un gráfico C^1 (suave, orientable, acotada) y su borde es C. Como $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor, y el trozo de plano es la superficie más cómoda con ese borde.
> **Orientación:** (0, 0, 6) se proyecta en (0, 0), el punto más bajo de la circunferencia de centro (0, 1). Ahí, tangente con primera componente positiva quiere decir avanzar hacia x creciente, o sea recorrer la circunferencia en sentido **antihorario mirando desde arriba** (con $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $z = 4 - 2 \operatorname{sen} t$, en $t = -\pi/2$ se pasa por (0, 0, 6) con tangente (1, 0, 0)). Regla de la mano derecha: dedos según el recorrido, el pulgar apunta hacia arriba, así que la normal compatible es $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2, 1)$.
> **Cuenta:** $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2y \cdot 1 = 2y$. Entonces $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2y \, dx \, dy$. Con $x = \rho \cos\theta$, $y = 1 + \rho \operatorname{sen}\theta$, jacobiano ρ, $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 2(1 + \rho \operatorname{sen}\theta)\, \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} [\rho^2 + (2/3)\rho^3 \operatorname{sen}\theta]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + (2/3)\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi$. (Más rápido: $\iint_D y \, dA = \bar{y} \cdot \text{área}(D) = 1 \cdot \pi$.)
> **Resultado:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$.
> **Trampa:** el dato del versor tangente es lo que fija el signo. (0, 0, 6) es el punto más bajo de la proyección: si lo confundís con el más alto, o tomás la normal hacia abajo, te da -2π. Hacé siempre el dibujito de la circunferencia proyectada con el punto marcado.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por (1, 0) y está contenida en el semiplano $3x - y \geq 0$. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (2 + xy^2, y + x^2y)$ a lo largo de C. Indique en un gráfico la orientación elegida.

> **Respuesta:** C: media elipse $9x^2 + y^2 = 9$ con $y \leq 3x$, de $(-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ a $(1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ pasando por (1, 0). $\vec{f} = \nabla U$ con $U = 2x + x^2y^2/2 + y^2/2$. En sentido antihorario la circulación vale $2\sqrt{2}$ (en sentido horario, $-2\sqrt{2}$).
>
> **Planteo:** hay que hallar la línea de campo de $\vec{g}$ por (1, 0), quedarse con la parte que cae en el semiplano y, si $\vec{f}$ es de gradientes, usar el potencial entre los extremos.
> **Línea de campo (EDO):** $\vec{X}' = \vec{g}(\vec{X})$ da $x' = -y$, $y' = 9x$. Las trayectorias cumplen $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{-y}$, separable: $y\,dy = -9x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{9x^2}{2} + k \Rightarrow 9x^2 + y^2 = c$. Por (1, 0): $c = 9$. La línea es la elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

(semieje 1 en x, 3 en y). Control: $\frac{d}{dt}(9x^2 + y^2) = 18x(-y) + 2y(9x) = 0$.

Recorte con $3x - y \geq 0$: la recta $y = 3x$ pasa por el centro de la elipse; reemplazando, $9x^2 + 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$. Corta en $B = (-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ y $A = (1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$. El semiplano $y \leq 3x$ contiene a $(1, 0)$ ($3 \cdot 1 - 0 = 3 \geq 0$), así que C es la media elipse que va de B a A pasando por $(1, 0)$.

Orientación elegida (gráfico): dibujá la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ y la recta $y = 3x$ por el origen, y quedate con la mitad que está a la derecha y abajo de la recta (la que contiene a $(1, 0)$). Marcá la flecha en sentido antihorario: sale de B, pasa por $(1, 0)$ y llega a A. Es el sentido de $\vec{g}$ (en $(1, 0)$, $\vec{g} = (0, 9)$ apunta para arriba). Parametrización con ese sentido: $\vec{X}(s) = (\cos s, 3 \operatorname{sen} s)$, $-3\pi/4 \leq s \leq \pi/4$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = 2 + xy^2$ y $Q = y + x^2y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $P'_y = 2xy = Q'_x$. $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, entonces $\vec{f}$ es de gradientes.

Potencial: $U'_x = 2 + xy^2 \Rightarrow U = 2x + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$. Derivando en y: $x^2y + h'(y) = y + x^2y \Rightarrow h' = y$, $h = y^2/2$.

Queda $U = 2x + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

Cuenta: en A, $x^2y^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$ e $y^2 = \frac{9}{2}$, así que $U(A) = \sqrt{2} + \frac{9}{8} + \frac{9}{4} = \sqrt{2} + \frac{27}{8}$. En B los cuadrados son los mismos y sólo cambia el signo de $2x$: $U(B) = -\sqrt{2} + \frac{27}{8}$.

Resultado: con la orientación antihoraria, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = \mathbf{2\sqrt{2}}$. Si se elige la horaria (de A a B por $(1, 0)$), da $-2\sqrt{2}$.

Trampa: el enunciado no fija el sentido, así que sin la orientación indicada (en el gráfico) la respuesta está incompleta: el signo depende de ella. Y C es un arco abierto, no la elipse entera: sobre la elipse cerrada la circulación daría 0.

Ejercicio 5. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^x + h(3x + 3y), x^2 + h(3x + 3y))$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$
recorrida en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -76/15$ (horario).

Planteo: $P = e^x + h(3x + 3y)$, $Q = x^2 + h(3x + 3y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. No conocemos h, así que parametrizar no sirve: Green.

La región: $D = \{|y| \leq x \leq 2 - y^2\}$. Las curvas se cortan donde $|y| = 2 - y^2$, o sea $|y|^2 + |y| - 2 = 0$, $(|y| + 2)(|y| - 1) = 0$, $|y| = 1$: en $(1, 1)$ y $(1, -1)$. Entonces $D = \{-1 \leq y \leq 1, |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$: a la izquierda la "V" $x = |y|$ (vértice en el origen) y a la derecha el arco de parábola $x = 2 - y^2$.

Hipótesis del teorema: P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h $\in C^1$ compuesta con una función lineal, más e^x y x^2). D es una región elemental (regular) y su borde, formado por dos segmentos y un arco de parábola, es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es horario: orientación negativa, así que $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.

Rotor: por la regla de la cadena, $Q'_x = 2x + 3h'(3x + 3y)$ y $P'_y = 3h'(3x + 3y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{2x}$: la h desaparece (de hecho $(h(3x + 3y), h(3x + 3y)) = \nabla(H(3x + 3y)/3)$ con $H' = h$).

Doble integral: $\iint_D 2x\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{2 - y^2} 2x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} [x^2]_{|y|}^{2 - y^2} dy = \int_{-1}^{1} (4 - 4y^2 + y^4 - y^2)\, dy = 2[4y - 5y^3/3 + y^5/5]_0^1 = 2(4 - 5/3 + 1/5) = 76/15$.

Resultado: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-76/15}$ (el signo menos sale del sentido horario).

Control (la otra cara): e^x y los términos con h son gradientes y no aportan en una curva cerrada; queda $\oint x^2\, dy$. En sentido antihorario: por la parábola $x = 2 - y^2$, y de -1 a 1: $\int_{-1}^{1} (2 - y^2)^2\, dy = 86/15$; por $x =$

$|y|$, de (1, 1) a (0, 0) y a (1, –1), y de 1 a –1: $\int_1^{-1} y^2\,dy = -2/3$. Total 86/15 – 10/15 = 76/15 ✓, y en sentido horario –76/15.

Trampa: el sentido es horario: Green da la circulación antihoraria y hay que cambiarle el signo. Además, elegí bien el orden: con franjas verticales la región se parte en dos ($x \in [0, 1]$ entre $y = \pm x$ y $x \in [1, 2]$ entre $y = \pm\sqrt{(2 - x)}$); con franjas horizontales (x entre $|y|$ y $2 - y^2$) sale en una sola integral, y como el integrando queda par en y se duplica la de 0 a 1.

15/8/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f}(x, y) = (x + y h(2xy), x^2 + x h(2xy) + y)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $9y^2 + 18y + x^2 = 0$ contenido en el semiplano $x \geq 0$ y recorrido de (0, 0) a (0, −2).

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -10$ (de (0, 0) a (0, −2) por la media elipse $x \geq 0$).
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q)$ con $P = x + y\,h(2xy)$ y $Q = x^2 + x\,h(2xy) + y$. Como $h \in C^1(\mathbb{R})$, P y Q son C^1 en todo $\mathbb{R}^2$.
> **Rotor escalar:** por regla de la cadena, $Q'_x = 2x + h(2xy) + 2xy\,h'(2xy)$ y $P'_y = h(2xy) + 2xy\,h'(2xy)$. Entonces $\mathbf{Q'_x - P'_y = 2x}$: la h desaparece, pero el campo no es de gradientes ($2x \not\equiv 0$), así que no alcanza con mirar los extremos.
> **La curva:** $9y^2 + 18y + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9(y + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + (y + 1)^2 = 1$: elipse de centro (0, −1), semieje 3 en x y 1 en y. Pasa por (0, 0) y (0, −2). El arco con $x \geq 0$ es la mitad derecha; yendo de (0, 0) a (0, −2) pasa por (3, −1): se recorre en **sentido horario**.
> **Cierre:** la curva es abierta, así que le agrego el segmento S del eje y que va de (0, −2) a (0, 0) (hacia arriba). $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple y C^1 a trozos, y es el borde de $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{9} + (y + 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$, recorrido en sentido horario (negativo).
> **Hipótesis de Green:** D es una región regular (elemental en x y en y), su borde es cerrado y C^1 a trozos, y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, un abierto que contiene a D. Como el borde va en sentido horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 2x\,dA$.
> **Doble integral:** $D = \{-2 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 3\sqrt{(1 - (y + 1)^2)}\}$. $\iint_D 2x\,dA = \int_{-2}^{0} [x^2]_0^{3\sqrt{(1 - (y + 1)^2)}}\,dy = \int_{-2}^{0} 9(1 - (y + 1)^2)\,dy = 9\,[(y + 1) - \frac{(y + 1)^3}{3}]_{-2}^{0} = 9\,(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) = 12$. Entonces $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -12$.
> **Segmento:** S: (0, t), t de −2 a 0, con derivada (0, 1). $\vec{f}(0, t) = (t\,h(0), t)$, así que $\vec{f} \cdot (0, 1) = t$ y $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^{0} t\,dt = [\frac{t^2}{2}]_{-2}^{0} = -2$.
> **Resultado:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma \cup S} - \int_S = -12 - (-2) = \mathbf{-10}$.
> **Trampa:** la curva cerrada queda horaria, así que Green va con signo menos; si la tomás como positiva te da 14. Y el segmento se resta con el sentido que usaste para cerrar (de (0, −2) a (0, 0)).

Ejercicio 2. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (-z, 2, x)$ a través de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 5, y \geq 2, z \geq 0$
orientada de modo que las normales tengan segunda componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = \pi$ (con la normal saliente de la esfera, $\vec{N} = (x/y, 1, z/y)$).
>
> **Planteo:** Σ es la parte de la esfera de radio $\sqrt{5}$ con $y \geq 2$ y $z \geq 0$: la mitad de arriba de un casquete chico "mirando" al eje y positivo. Como el casquete es un gráfico sobre el plano xz, conviene escribir y en función de (x, z).
> **Proyección D (plano xz):** sobre la esfera, $y = \sqrt{(5 - x^2 - z^2)} \geq 2 \Leftrightarrow 5 - x^2 - z^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \leq 1$. Con $z \geq 0$: $\mathbf{D = \{x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}}$, un semidisco de radio 1 (no de radio $\sqrt{5}$).
> **Parametrización:** $\vec{X}(x, z) = (x, \sqrt{(5 - x^2 - z^2)}, z)$, $(x, z) \in D$. Es C^1 en D porque ahí $5 - x^2 - z^2 \geq 4 > 0$.
> Llamando $y = \sqrt{(5 - x^2 - z^2)}$: $\vec{X}_x = (1, -\frac{x}{y}, 0)$, $\vec{X}_z = (0, -\frac{z}{y}, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-\frac{x}{y}, -1, -\frac{z}{y})$.

Orientación: $X_x \times X_z$ tiene segunda componente $-1 < 0$: es la contraria a la pedida. Cambiamos el signo (equivale a tomar $\vec{X}_z \times \vec{X}_x$): $\vec{N} = \left(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}\right) = \frac{1}{y}(x, y, z)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. Es la normal saliente de la esfera.

$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $f(\vec{X}) = (-z, 2, x)$, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = -z\cdot\frac{x}{y} + 2\cdot 1 + x\cdot\frac{z}{y} = 2$. Los dos términos con raíz se cancelan.

Cuenta: $\Phi = \iint_D 2\,dx\,dz$. En polares del plano xz, $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le \pi$ ($z \ge 0$): $\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}[r^2]_0^1\,d\theta = \pi$.

Resultado: $\Phi = \pi$.

Control con Gauss: $\mathrm{div}\,\vec{f} = \partial(-z)/\partial x + \partial(2)/\partial y + \partial(x)/\partial z = 0$, y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. Cerramos Σ con la tapa T: $y = 2$, $x^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$ (normal saliente $(0, -1, 0)$) y el piso P: $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 5$, $y \ge 2$ (normal saliente $(0, 0, -1)$). Queda un sólido V acotado con frontera cerrada orientada hacia afuera, y en Σ esa normal es la saliente de la esfera, la misma que usamos. Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_T + \Phi_P = \iiint_V 0\,dV = 0$. En T: $\vec{f}\cdot\hat{n} = -2$ y el área es la del semidisco, $\Phi_T = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$. En P: $\vec{f}\cdot\hat{n} = -x$, y P es simétrico respecto de $x = 0$, así que $\Phi_P = 0$. Entonces $\Phi_\Sigma = \pi$ ✓.

Trampa: usar $\vec{X}_x \times \vec{X}_z$ sin mirar el signo da $-\pi$. Y proyectar sobre el disco de radio $\sqrt{5}$ en lugar del de radio 1 (la condición $y \ge 2$ es la que recorta).

Ejercicio 3. Sea H el cuerpo que ocupa la región de $\mathbb{R}^3$ encerrada entre las superficies de ecuaciones $z = \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$ y $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$.

Calcule la masa de H suponiendo que la densidad de masa en cada punto P es proporcional a la distancia de P al plano xy.

Respuesta: $M = \mathbf{12\pi k} \approx 37{,}7k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).

Planteo: la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xy es $|z|$, y en H vale $z \ge 0$, así que $\delta = kz$ con $k > 0$ y $M = \iiint_H kz\,dV$.

El sólido: $z = \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$ es la mitad de arriba del elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (semiejes $\sqrt{6}$ en x y $\sqrt{12}$ en y y en z); $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ es la hoja de arriba de un cono elíptico con vértice en el origen. Las dos superficies encierran la región de los puntos que están por encima del cono y por debajo del elipsoide: $z \in [\sqrt{(x^2 + 2y^2)}, \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}]$.

Dónde se cortan: sobre el cono $z^2 = x^2 + 2y^2$; reemplazando en el elipsoide, $2x^2 + y^2 + (x^2 + 2y^2) = 12 \iff 3x^2 + 3y^2 = 12 \iff x^2 + y^2 = 4$. La curva de corte no es horizontal ($z^2 = x^2 + 2y^2$ varía entre 4 y 8 sobre ella), pero se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$: los coeficientes están cruzados a propósito para que eso pase.

Proyección: para (x, y) fijo, z va de $\sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ a $\sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$, y ese intervalo no es vacío si $x^2 + 2y^2 \le 12 - 2x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \le 4$. La sombra de H es el disco de radio 2 (no el borde del elipsoide).

Integral en z: $\int kz\,dz$ tiene primitiva $\frac{kz^2}{2}$; entre los dos límites las raíces desaparecen: $\frac{k[(12 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2)]}{2} = \frac{k(12 - 3x^2 - 3y^2)}{2}$. Por eso conviene cilíndricas: con esféricas las superficies no son esferas ni conos redondos y los límites se vuelven feos.

Polares en el disco: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $|J| = r$; $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. $M = k \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2)\,r\,dr\,d\theta$. En r: primitiva $6r^2 - \frac{3r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $24 - 12 = 12$. En θ: por 2π.

Resultado: $M = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 12 \cdot k = \mathbf{12\pi k} \approx 37{,}7k$.

Control por cortes horizontales: para cada z, el corte de H es $\{x^2 + 2y^2 \le z^2,\ 2x^2 + y^2 \le 12 - z^2\}$; integrando $z \cdot$ (área del corte) para $z \in [0, 2\sqrt{3}]$ numéricamente da $37{,}699 = 12\pi$ ✓.
Trampa: proyectar sobre todo el elipsoide en vez de sobre la intersección; y olvidarse el r del jacobiano (sin él la integral en r da $24 - 8 = 16$ y el resultado sale $16\pi k$).

Ejercicio 4. Halle la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + 3y + z,\ y,\ z^2 + x)$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones
$x^2 + y^2 + z = 2 \wedge 2x - 2y + z = 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

Respuesta: Recorriendo C en sentido antihorario visto desde arriba: circulación -12π. En sentido horario, 12π.

Planteo: C es cerrada (paraboloide ∩ plano) y no viene orientada: hay que elegir un sentido, dibujarlo y aplicar el teorema del rotor.
La curva: del plano, $z = 2y - 2x$. En el paraboloide: $x^2 + y^2 + 2y - 2x = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. C se proyecta en la circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 2, y está toda en el plano $2x - 2y + z = 0$.
Superficie elegida: el pedazo de ese plano que C encierra: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 2y - 2x)$, $(x, y) \in D = \{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \le 4\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, 2) = (2, -2, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
Sentido elegido (lo que va en el gráfico): antihorario visto desde arriba (desde z positivo).
Parametrización que lo respeta: $x = 1 + 2\cos t$, $y = -1 + 2\operatorname{sen} t$, $z = 2y - 2x = -4 + 4\operatorname{sen} t - 4\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. En el dibujo: el paraboloide cortado por el plano inclinado, la elipse con flechas girando antihorario mirada desde arriba y la normal $(2, -2, 1)$ hacia arriba.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (2, -2, 1)$.
Rotor: $P = x^2 + 3y + z$, $Q = y$, $R = z^2 + x$: $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q,\ \partial_z P - \partial_x R,\ \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 0,\ 1 - 1,\ 0 - 3) = (0, 0, -3)$.
Flujo del rotor: $\iint_D (0, 0, -3) \cdot (2, -2, 1)\, dxdy = -3 \cdot \text{Área}(D) = -3 \cdot 4\pi = -12\pi$.
Resultado: circulación = **-12π** en sentido antihorario visto desde arriba (12π en el otro).
Control (circulación directa): x^2dx, $y\,dy$, z^2dz son exactas y $z\,dx + x\,dz = d(xz)$; queda $\oint 3y\,dx = \int_0^{2\pi} 3(-1 + 2\operatorname{sen} t)(-2\operatorname{sen} t)\,dt = \int_0^{2\pi} (6\operatorname{sen} t - 12\operatorname{sen}^2 t)\,dt = -12\pi$ ✓.
Trampa: el resultado sin el dibujo del sentido vale la mitad: el signo depende de la orientación que declarás.

Ejercicio 5. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-2x + e^x y,\ -2y + e^x)$ a lo largo de la porción de línea de campo de $\vec{g}(x, y) = (e^{-x},\ 2ye^{-x} + 2e^{-x})$ que tiene por extremos los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, y_0)$, recorrida de B a A.

Respuesta: Línea de campo $y = e^{2x} - 1$, $y_0 = e^2 - 1$. Circulación de B a A $= e^4 - e^3 - 2e^2 + e + 2 \approx 24{,}45$.

Línea de campo: $\vec{g} = (e^{-x},\ 2ye^{-x} + 2e^{-x})$ es C^1 y su primera componente nunca se anula, así que las líneas de campo se escriben como gráficos $y = y(x)$ con $y' = \dfrac{g_2}{g_1} = \dfrac{2ye^{-x} + 2e^{-x}}{e^{-x}} = 2y + 2$.
Resolución de la EDO: es lineal: $y' - 2y = 2$. Multiplicando por e^{-2x}: $(y\,e^{-2x})' = 2e^{-2x} \Rightarrow y\,e^{-2x} = -e^{-2x}$

+ K ⇒ $y = Ke^{2x} - 1$. Por A = (0, 0): 0 = K − 1, K = 1, o sea $\mathbf{y = e^{2x} - 1}$. Control: $y' = 2e^{2x} = 2(y + 1)$ ✓ y y(0) = 0 ✓. En x = 1: $y_0 = e^2 - 1$, así que B = $(1, e^2 - 1)$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = -2x + e^x y$ y $Q = -2y + e^x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, y $P'_y = e^x = Q'_x$. Potencial: de $\phi'_x = P$, $\phi = -x^2 + ye^x + h(y)$; $\phi'_y = e^x + h'(y) = -2y + e^x \Rightarrow h = -y^2$. $\phi(x, y) = -x^2 - y^2 + ye^x$.

Cuenta: el arco se recorre de B a A, así que la circulación es $\phi(A) - \phi(B)$. $\phi(A) = 0$. $\phi(B) = -1 - (e^2 - 1)^2 + (e^2 - 1)e = -1 - e^4 + 2e^2 - 1 + e^3 - e = -e^4 + e^3 + 2e^2 - e - 2$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - \phi(B) = \mathbf{e^4 - e^3 - 2e^2 + e + 2} \approx 24{,}45$.

Trampa: el sentido es de B a A, o sea $\phi(A) - \phi(B)$. Y la línea de campo sale de $y' = g_2/g_1$ (tangente paralela a $\vec{g}$); si pedís $\vec{g} \cdot (1, y') = 0$ estás calculando las trayectorias ortogonales.

8/8/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$, donde $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}(x, y, z) = (e^{x^2} + z, 2yz, y^2 + e^{z^2} - x)$,
a lo largo del borde del triángulo de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 1) recorrido en el sentido A → C → B → A.

> **Respuesta:** $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1$ (en el sentido A → C → B → A).
>
> **Planteo:** $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$. El borde del triángulo es cerrado y ϕ no se conoce: Stokes con el triángulo como superficie.
> **La parte $\nabla\phi$:** $\phi \in C^2 \Rightarrow$ por Schwarz $\text{rot}(\nabla\phi) = \vec{0}$, así que $\text{rot}\,\vec{f} = \text{rot}\,\vec{g}$. (Equivalente: $\oint \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \phi(A) - \phi(A) = 0$ por ser una curva cerrada.)
> **Rotor:** $\vec{g} = (e^{x^2} + z, 2yz, y^2 + e^{z^2} - x)$: $\text{rot}\,\vec{g} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (2y - 2y, 1 - (-1), 0 - 0) = (0, 2, 0)$.
> **Superficie elegida:** el triángulo mismo, en el plano $x + y + z = 1$ (que contiene a A, B y C). $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, $\text{Área}(T) = \frac{1}{2}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\phi \in C^2 \Rightarrow \nabla\phi \in C^1$, y $\vec{g}$ es C^1); Σ plana, regular, orientable; borde poligonal cerrado, suave a trozos.
> **Orientación compatible:** regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con los dedos siguiendo A → C → B el pulgar da $(C - A) \times (B - A) = (-1, 0, 1) \times (-1, 1, 0) = (-1, -1, -1)$: la normal compatible apunta hacia el origen (hacia abajo). Mirado desde arriba, la proyección (1, 0) → (0, 0) → (0, 1) es horaria, lo que confirma la normal hacia abajo. Hay que usar $\vec{n} = -(1, 1, 1)$, opuesta a la de la parametrización.
>
> **Flujo del rotor:** $\iint_T (0, 2, 0) \cdot (-1, -1, -1)\, dxdy = -2 \cdot \text{Área}(T) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.
>
> **Resultado:** $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-1}$.
> **Control (circulación directa de $\vec{g}$):** con $E = \int_0^1 e^{s^2}\, ds$ (no elemental, pero se cancela). A → C: $(1 - t, 0, t)$, $\vec{r}' = (-1, 0, 1)$: $\int_0^1 [e^{t^2} - e^{(1-t)^2} - 1]\, dt = E - E - 1 = -1$. C → B: $(0, t, 1 - t)$, $\vec{r}' = (0, 1, -1)$: $\int_0^1 [2t(1 - t) - t^2 - e^{(1-t)^2}]\, dt = (1 - 1) - E = -E$. B → A: $(t, 1 - t, 0)$, $\vec{r}' = (1, -1, 0)$: $\int_0^1 e^{t^2}\, dt = E$. Total $-1 - E + E = -1$ ✓.
> **Trampa:** usar la normal (1, 1, 1) de la parametrización sin mirar el sentido A → C → B da +1. El sentido del enunciado no es el "natural" A → B → C.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva perteneciente a la familia de curvas $\mathcal{G}$ que es ortogonal a la familia $\mathcal{F}$: $y = k(x - 1)^4$, $k \in \mathbb{R}$, y tal que $(1, 1) \in \Gamma$. Sea D la región acotada del plano de borde Γ. Calcule $\iint_D x\, dxdy$.

> **Respuesta:** Γ: $(x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ (elipse de centro (1, 0), semiejes 2 y 1). $\iint_D x\, dxdy = 2\pi$.
>
> **EDO de $\mathcal{F}$:** de $y = k(x - 1)^4$ sale $k = \frac{y}{(x - 1)^4}$ ($x \neq 1$). Derivando: $y' = 4k(x - 1)^3 = \frac{4y}{x - 1}$.
>
> **Familia ortogonal $\mathcal{G}$:** pendiente opuesta e inversa, $y' = -\frac{x - 1}{4y}$. Separando: $4y\, dy = -(x - 1)\, dx \Rightarrow 2y^2 =$

$-\frac{(x-1)^2}{2} + c \Rightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = C$. Por (1, 1): $C = 0 + 4 = 4$. **Γ: $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$**, o sea $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$. Control: la tangente a $\mathscr{F}$ tiene dirección $(x-1, 4y)$ y la de Γ $(4y, -(x-1))$; su producto escalar es $4y(x-1) - 4y(x-1) = 0$ ✓. (El punto (1, 1) no está en ninguna curva de $\mathscr{F}$, que en $x = 1$ pasan todas por (1, 0), pero la EDO ortogonal es regular ahí porque $y \neq 0$, y da $y' = 0$: tangente horizontal.)

La región: Γ es una elipse acostada de centro (1, 0), semieje 2 en x y 1 en y: corta al eje x en (–1, 0) y (3, 0) y llega a (1, ±1). D es su interior, $D = \{(x-1)^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Cambio de variables: $x = 1 + 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$, así que $dxdy = 2r\,dr\,d\theta$.

Cuenta: $\iint_D x\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r\cos\theta)\,2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 2r\,dr + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 4r^2\,dr = 2\pi \cdot [r^2]_0^1 + [\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} \cdot \frac{4}{3} = 2\pi + 0$.

Resultado: $\iint_D x\,dxdy = \mathbf{2\pi}$.

Control: $\bar{x} \cdot$ área $= 1 \cdot (\pi \cdot 2 \cdot 1) = 2\pi$, y en cartesianas $\int_{-1}^{3} x \cdot 2\sqrt{1 - (x-1)^2/4}\,dx$ también da 2π ✓.

Trampa: la constante C sale del punto (1, 1), no del (1, 0). Y el jacobiano es $2r$: con r solo da π.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie $\Sigma : x^2 + z^2 = 4$, $0 \leq z$, $0 \leq y \leq \sqrt{(4 - x^2)}$.

Respuesta: $A(\Sigma) = 8$.

Planteo: $x^2 + z^2 = 4$ es un cilindro circular de radio 2 con eje en el eje y. $z \geq 0$ se queda con la mitad de arriba. Sobre Σ, con $z \geq 0$, vale $\sqrt{(4 - x^2)} = z$, así que la condición $0 \leq y \leq \sqrt{(4 - x^2)}$ es $0 \leq y \leq z$: Σ es la parte del medio cilindro comprendida entre los planos $y = 0$ e $y = z$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y\|\,d\theta\,dy$.

Parametrización: $\vec{X}(\theta, y) = (2\cos\theta, y, 2\operatorname{sen}\theta)$.

Dominio D: $z \geq 0$ da $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, o sea $0 \leq \theta \leq \pi$. La condición sobre y queda $0 \leq y \leq 2\operatorname{sen}\theta$. $D = \{0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 2\operatorname{sen}\theta\}$.

Vector normal: $\vec{X}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 0)$. $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y = (-2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)$. $\|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y\| = \sqrt{(4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta)} = 2$ (constante, nunca se anula).

Cuenta: $A = \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} 2\,dy\,d\theta$. Integral en y: primitiva $2y$, da $4\operatorname{sen}\theta$. Integral en θ: primitiva $-4\cos\theta$, entre 0 y π da $-4(-1) - (-4) = 8$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{8}$.

Control (otra parametrización): $\vec{X}(x, y) = (x, y, \sqrt{(4 - x^2)})$, con $-2 < x < 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{(4 - x^2)}$. Ahí $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)}}, 0, 1\right)$, de norma $\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{4 - x^2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{(4 - x^2)}}$. $A = \int_{-2}^{2} \sqrt{(4 - x^2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{(4 - x^2)}}\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx = 8$ ✓.

Trampa: la segunda parametrización no es C^1 en $x = \pm 2$ (la norma explota y la integral es impropia); funciona porque se simplifica, pero la de (θ, y) es la limpia. Y el cilindro no se proyecta sobre el plano xz: ahí se ve como una semicircunferencia, de área 0.

Ejercicio 4. Halle el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x - y) + x, \varphi(x - y) + z^2, 2z)$, con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a través de la frontera de
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$.
Indique en un gráfico la orientación considerada en el cálculo.

Respuesta: $\Phi = 45\pi/2$ con normal saliente de M.

Planteo: $x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$, así que M es el sólido dentro de ese cilindro, entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$. ∂M es cerrada (piso, pared cilíndrica y techo): Gauss.
Orientación: normal saliente de M. En el gráfico: techo con flechas hacia arriba, piso hacia abajo y pared hacia afuera del cilindro.
Hipótesis: $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, así que $\varphi(x-y)$ es C^1 (composición de C^1) y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. M es acotado y su frontera es suave a trozos. En el disco $x^2 + y^2 \le 4$, entonces $9 - x^2 - y^2 \ge 5 > 0$: el techo siempre queda por encima del piso.
Divergencia (regla de la cadena): $\partial/\partial x\,[\varphi(x-y) + x] = \varphi'(x-y) + 1$; $\partial/\partial y\,[\varphi(x-y) + z^2] = -\varphi'(x-y)$; $\partial/\partial z\,(2z) = 2$. Suma: $\nabla \cdot \vec{f} = 3$, φ desaparece.
Volumen: en polares el disco es $0 \le r \le 2\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. $\text{vol}(M) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [9r^2/2 - r^4/4]_0^{2\cos\theta}\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (18\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\, d\theta$. Con $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\cos^4\theta = 3/8 + (\cos 2\theta)/2 + (\cos 4\theta)/8$, las primitivas son $\theta/2 + (\text{sen}\, 2\theta)/4$ y $3\theta/8 + (\text{sen}\, 2\theta)/4 + (\text{sen}\, 4\theta)/32$; entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ dan $\pi/2$ y $3\pi/8$. $\text{vol}(M) = 18 \cdot \pi/2 - 4 \cdot 3\pi/8 = 9\pi - 3\pi/2 = 15\pi/2$.
Resultado: $\Phi = \iiint_M 3\, dV = 3 \cdot 15\pi/2 =$ **$45\pi/2$**.
Trampa: la derivada de $\varphi(x-y)$ respecto de y es $-\varphi'(x-y)$; si perdés ese signo no se cancela nada y el ejercicio no sale. Y el disco $x^2 + y^2 \le 2x$ es $r \le 2\cos\theta$ con θ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no $r \le 2$.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = (2y^2, 2x^2 + g(y))$, con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_0^1 g(t)dt = 2$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C: $y - x^4 = 0$, $0 \le x \le 1$. Suponga que el sentido de recorrido de C es de (0, 0) a (1, 1).

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 32/9$.
Planteo: $\vec{f}$ no es de gradientes: $Q'_x - P'_y = 4x - 4y \neq 0$, así que no alcanza con mirar los extremos. Tampoco conocemos g, sólo su integral. Separamos $\vec{f} = (2y^2, 2x^2) + (0, g(y))$.
La parte con g: $(0, g(y)) = \nabla G$ con $G(y) = \int_0^y g(s)\, ds$ (G es C^2 porque g es C^1), así que su circulación de (0, 0) a (1, 1) es $G(1) - G(0) = \int_0^1 g = 2$, por cualquier camino.
Parametrización de C: $\vec{X}(t) = (t, t^4)$, $0 \le t \le 1$, que va de (0, 0) a (1, 1) como pide el enunciado; $\vec{X}'(t) = (1, 4t^3)$.
La otra parte: $(2y^2, 2x^2)$ sobre $\vec{X}(t)$ es $(2t^8, 2t^2)$; producto con $\vec{X}'$: $2t^8 + 8t^5$. $\int_0^1 (2t^8 + 8t^5)\, dt = \frac{2}{9} + \frac{8}{6} = \frac{2}{9} + \frac{12}{9} = \frac{14}{9}$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{14}{9} + 2 = \mathbf{\frac{32}{9}}$. (Si lo hacés todo junto, el término con g es $\int_0^1 g(t^4) \cdot 4t^3\, dt$, y con $u = t^4$ da $\int_0^1 g(u)\, du = 2$.)
Control con Green: cerrando C con el segmento S de (1, 1) a (0, 0) sobre $y = x$, la curva cerrada encierra $D = \{0 \le x \le 1, x^4 \le y \le x\}$ recorrida en sentido positivo ($\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$). $\iint_D (4x - 4y)\, dA = \frac{2}{9}$. Sobre S: $\vec{X} = (1 - t, 1 - t)$, la parte $(2y^2, 2x^2)$ da $-\frac{4}{3}$ y la parte con g da -2, total $-\frac{10}{3}$. Entonces $\int_C = \frac{2}{9} + \frac{10}{3} = \frac{32}{9}$ ✓.
Trampa: querer usar potencial para todo $\vec{f}$ (no es de gradientes), o tratar de averiguar g: no hace falta, sólo se usa $\int_0^1 g = 2$.

1/8/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean Γ la curva de ecuación $\vec{X} = (2\cos(t), 1 + \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi, 0]$ y sea $\vec{f}(x, y) = (3x^2y + y, e^{y^5} + x^3)$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 20 - \pi \approx 16{,}86$.
>
> **La curva:** $x = 2\cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$: elipse de centro $(0, 1)$, semiejes 2 y 1. Con $t \in [-\pi, 0]$ es $\operatorname{sen} t \le 0$, o sea $y \le 1$: la **mitad inferior**. Arranca en $t = -\pi$ en $(-2, 1)$, pasa en $t = -\pi/2$ por $(0, 0)$ y termina en $(2, 1)$: va de izquierda a derecha por abajo, **sentido antihorario**.
> **Por qué Green:** sobre el arco aparece $e^{(1+\operatorname{sen} t)^5}\cos t$, sin primitiva elemental; igual no hace falta integrarlo, porque es la derivada de $G(1 + \operatorname{sen} t)$ con $G' = e^{y^5}$ y el arco empieza y termina en $y = 1$ (aporta 0). Green lo muestra sin pensarlo: ese término no entra en el rotor.
> **Rotor escalar:** $P = 3x^2y + y$, $Q = e^{y^5} + x^3$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 3x^2$, $P'_y = 3x^2 + 1$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -1}$.
> **Cierre e hipótesis:** agrego el segmento S de $(2, 1)$ a $(-2, 1)$ sobre $y = 1$. $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple, C^1 a trozos, borde de $D = \{\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \le 1, y \le 1\}$ (región regular), recorrido en sentido antihorario (positivo); $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$. Green: $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (-1)\,dA = -\text{área}(D) = -\frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2} = -\pi$.
> **Segmento:** S: $(t, 1)$, t de 2 a -2, derivada $(1, 0)$. Sólo cuenta $P(t, 1) = 3t^2 + 1$: $\int_S = \int_2^{-2} (3t^2 + 1)\,dt = [t^3 + t]_2^{-2} = -10 - 10 = -20$.
> **Resultado:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\pi - (-20) = \mathbf{20 - \pi} \approx 16{,}86$.
> **Trampa:** el segmento va de $(2, 1)$ a $(-2, 1)$, o sea t decreciente: la integral es de 2 a -2 y da negativa.

Ejercicio 2. Halle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ para que el campo $\vec{f}(x, y) = \varphi(x)(e^y + 2xe^y, xe^y)$ cumpla simultáneamente lo siguiente:
1. $\vec{f}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para cierta ϕ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
2. $\vec{f}(0, 1) = (2, 0)$.
Una vez hallada φ halle todas las posibles funciones ϕ.

> **Respuesta:** $\varphi(x) = 2e^{2x-1}$; $\phi(x, y) = 2x\,e^{2x+y-1} + C$, con $C \in \mathbb{R}$.
>
> **Planteo:** $P = \varphi(x)(1 + 2x)e^y$ y $Q = \varphi(x)\,x\,e^y$; con $\varphi \in C^1$, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$.
> **Condición necesaria y suficiente:** si $\vec{f} = \nabla\phi$ con $\phi \in C^2$, por Schwarz $\phi''_{xy} = \phi''_{yx}$, o sea $P'_y = Q'_x$. Y al revés: como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y $\vec{f}$ es C^1, $P'_y = Q'_x$ en todo $\mathbb{R}^2$ alcanza para que $\vec{f}$ sea de gradientes.
> **La EDO:** $P'_y = \varphi(x)(1 + 2x)e^y$ y $Q'_x = (x\varphi'(x) + \varphi(x))e^y$. Igualando y simplificando $e^y \neq 0$: $x\varphi' + \varphi = \varphi + 2x\varphi \Leftrightarrow x(\varphi' - 2\varphi) = 0$ para todo x.
> **Resolución:** para $x \neq 0$ queda $\varphi' = 2\varphi$, lineal homogénea. Multiplicando por e^{-2x}: $(\varphi\,e^{-2x})' = 0$, así que $\varphi = K\,e^{2x}$ en cada semirrecta. En principio la constante podría ser distinta en $x > 0$ y en $x < 0$, pero φ es continua en 0 y los dos lados tienden a $\varphi(0)$, así que es la misma K: $\varphi(x) = K\,e^{2x}$ en todo $\mathbb{R}$ (en $x = 0$ la ecuación es $0 = 0$ y se cumple sola). Control: $x(\varphi' - 2\varphi) = x(2Ke^{2x} - 2Ke^{2x}) = 0$ ✓.
> **Condición 2:** $\vec{f}(0, 1) = \varphi(0)(e + 0, 0 \cdot e) = (Ke, 0) = (2, 0) \Rightarrow K = 2/e$. $\mathbf{\varphi(x) = 2e^{2x-1}}$.

Potenciales: $f(x, y) = (2(1 + 2x)e^{2x + y - 1}, 2x\, e^{2x + y - 1})$. De $\phi'_y = 2x\, e^{2x + y - 1}$ sale $\phi = 2x\, e^{2x + y - 1} + h(x)$. Derivando en x: $\phi'_x = (2 + 4x)e^{2x + y - 1} + h'(x)$, que tiene que ser $2(1 + 2x)e^{2x + y - 1}$: $h' = 0$ y $h = C$.
Resultado: $\phi(x, y) = 2x\, e^{2x + y - 1} + C$, $C \in \mathbb{R}$ (en $\mathbb{R}^2$, que es conexo, dos potenciales del mismo campo difieren en una constante, así que no hay otras).
Trampa: no confundas φ (la función de x que se busca) con ϕ (el potencial). Y no "dividas por x" sin decir qué pasa en $x = 0$: ahí la ecuación es $0 = 0$ y lo que pega los dos lados es la continuidad de φ.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por las condiciones
$x + y^2 - 1 = 0$, $x \geq 0$, $0 \leq z \leq x$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2x, y + 1, z^2)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación de Σ que eligió para el cálculo.

Respuesta: Con $\vec{N} = (1, 2y, 0)$ (primera componente positiva, lejos del eje z): $\Phi = 8/3$. Con la opuesta, $-8/3$.

Planteo: $x = 1 - y^2$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z; su traza es una parábola con vértice (1, 0) abierta hacia x negativo. Como $x \geq 0$, $y^2 \leq 1$, o sea $-1 \leq y \leq 1$; y z va de 0 a $x = 1 - y^2$.
Parametrización: $\vec{X}(y, z) = (1 - y^2, y, z)$, $D = \{-1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\}$.
Normal: $\vec{X}_y = (-2y, 1, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_y \times \vec{X}_z = (1, 2y, 0)$.
Orientación elegida: la de $\vec{N} = (1, 2y, 0)$: primera componente $1 > 0$, hacia el lado convexo de la parábola (lejos del eje z; en (1, 0, z) es $\vec{i}$). En el gráfico: la "teja" parabólica entre $z = 0$ y el plano $z = x$, con flechas hacia afuera.
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2(1 - y^2), y + 1, z^2)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2 - 2y^2 + 2y^2 + 2y = 2 + 2y$.
Cuenta: $\Phi = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1 - y^2} (2 + 2y)\, dz\, dy = \int_{-1}^{1} (2 + 2y - 2y^2 - 2y^3)\, dy = \left[2y + y^2 - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (los términos impares se cancelan).
Resultado: $\Phi = \mathbf{8/3}$ con la normal elegida ($-8/3$ con la opuesta).
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 2 + 1 + 2z = 3 + 2z$. Sólido $W = \{-1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1 - y^2,\ 0 \leq z \leq x\}$, Σ es su cara exterior con normal saliente (1, 2y, 0). $\iiint (3 + 2z)\, dV = \iint (3x + x^2)\, dA = \frac{8}{5} + \frac{32}{105} = \frac{40}{21}$. Cara $z = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = -z^2 = 0$. Cara $z = x$ con normal saliente $(-1, 0, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2x + x^2$, $\iint (x^2 - 2x)\, dA = -\frac{16}{21}$. $\Phi = \frac{40}{21} + \frac{16}{21} = \frac{8}{3}$ ✓.
Trampa: el techo $z = x$ en Σ es $z = 1 - y^2$; integrar z hasta una constante es el error típico.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y, g(x, z), 3 + z)$, con $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, a través de porción de la superficie de ecuación $z = 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ que satisface la condición $z \geq 0$, orientada de modo que las normales tengan **tercera componente positiva**.

Respuesta: $\Phi = 44\pi/3$ (normales con tercera componente positiva).

Planteo: Σ: $z = 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $z \geq 0$, es la superficie lateral de un cono con vértice (0, 0, 2) y base el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ en $z = 0$ ($z \geq 0 \Leftrightarrow r \leq 2$). Está abierta abajo y g es desconocida: se cierra con la base B: $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, y se usa Gauss en el cono macizo $H = \{0 \leq z \leq 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}\}$.
Hipótesis del teorema: $g \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \vec{f} = (x^2 + y, g(x, z), 3 + z)$ es C^1 (de hecho C^2) en $\mathbb{R}^3$. $\Sigma \cup B$ es cerrada y suave a trozos (el vértice y la arista del borde son puntos y curvas, no molestan) y acota H.

Orientación: en Σ la normal con tercera componente positiva apunta hacia afuera de H (el cono macizo está debajo de Σ): coincide con la exterior. En B la exterior es $(0, 0, -1)$.
Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x(x^2 + y) + \partial_y g(x, z) + \partial_z(3 + z) = 2x + 0 + 1 = 2x + 1$. Ojo: g depende de x y de z pero no de y, por eso su derivada respecto de y es 0.
Triple integral: H es simétrico respecto del plano $x = 0$ y $2x$ es impar en x, así que $\iiint_H 2x\, dV = 0$ (en cilíndricas aparece $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$). Queda $\iiint_H 1\, dV$ = volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$. En cilíndricas: $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2 - r)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[r^2 - \frac{r^3}{3}]_0^2 = 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$.
Base: en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(3 + z) = -3$; $\Phi_B = -3\cdot 4\pi = -12\pi$.
Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{8\pi}{3} + 12\pi = \frac{44\pi}{3}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{44\pi}{3}}$.
Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 1)$, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$: $\vec{f}\cdot\vec{N} = \frac{x^3 + xy}{r} + \frac{y\, g(x, 2 - r)}{r} + 3 + z$. El primer término es impar en x y el segundo es impar en y (g no depende de y), así que integran 0 sobre el disco. Queda $\iint_{r\le 2} (3 + z)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (5 - r)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi(10 - \frac{8}{3}) = \frac{44\pi}{3}$ ✓.
Trampa: el flujo de la base es negativo (entra), así que al despejar se **suma** 12π; restar da $8\pi/3 - 12\pi$, que es incorrecto.

Ejercicio 5. Calcule
$\iiint_H y\, dxdydz$
siendo
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 2, y \ge 2\}$.

Respuesta: $\iiint_H y\, dxdydz = \pi$.

Planteo: integrar y sobre $H = \{x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 2, y \ge 2\}$.

El cuerpo: $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 2$ es un elipsoide centrado en el origen, de semiejes $2\sqrt{2}$ en y y $\sqrt{2}$ en x y en z; como x, z aparecen como $x^2 + z^2$, es de revolución alrededor del eje y. El plano $y = 2$ lo corta en $x^2 + 1 + z^2 = 2$, la circunferencia $x^2 + z^2 = 1$ (radio 1). H es el casquete del lado $y \ge 2$, entre $y = 2$ y la punta $y = 2\sqrt{2}$. Cada tajada $y = cte$ es el disco $x^2 + z^2 \le 2 - \frac{y^2}{4}$.

Coordenadas: cilíndricas con eje y: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = y$, jacobiano r ($dV = r\, dr\, d\theta\, dy$). Rangos: $2 \le y \le 2\sqrt{2}$, $0 \le r \le \sqrt{(2 - \frac{y^2}{4})}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Cuenta (por tajadas): la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(2 - \frac{y^2}{4})$. Queda $\pi\int_2^{2\sqrt{2}} y(2 - \frac{y^2}{4})\, dy$. Primitiva: $y^2 - \frac{y^4}{16}$. En $2\sqrt{2}$: $8 - 4 = 4$. En 2: $4 - 1 = 3$. Diferencia: 1.

Resultado: $\boldsymbol{\iiint_H y\, dV = \pi}$.

Control (otro orden): con r afuera: $0 \le r \le 1$ y $2 \le y \le 2\sqrt{(2 - r^2)}$. $2\pi\int_0^1 r[\frac{y^2}{2}]_2^{2\sqrt{(2 - r^2)}}\, dr = 2\pi\int_0^1 r(2 - 2r^2)\, dr = 2\pi(1 - \frac{1}{2}) = \pi$ ✓.

> **Trampa:** el eje del elipsoide es el y; las cilíndricas “de siempre” (eje z) no sirven acá. El semieje en y es $2\sqrt{2}$ (sale de $y^2/4 = 2$), no $\sqrt{2}$.

1/8/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule
$\iiint_H x\,dxdydz$
siendo

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 2, x \geq 2\}$.

> **Respuesta:** $\iiint_H x\,dxdydz = \pi$.
>
> **Planteo:** integrar x sobre $H = \{\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 2, x \geq 2\}$.
>
> **El cuerpo:** $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 2$ es un elipsoide centrado en el origen, de semiejes $2\sqrt{2}$ en x y $\sqrt{2}$ en y y en z; como y, z aparecen como $y^2 + z^2$, es de revolución alrededor del eje x. El plano $x = 2$ lo corta en $1 + y^2 + z^2 = 2$, la circunferencia $y^2 + z^2 = 1$ (radio 1). H es el casquete del lado $x \geq 2$, entre $x = 2$ y la punta $x = 2\sqrt{2}$. Cada tajada x = cte es el disco $y^2 + z^2 \leq 2 - \frac{x^2}{4}$.
>
> **Coordenadas:** cilíndricas con eje x: $y = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$, $x = x$, jacobiano r ($dV = r\,dr\,d\theta\,dx$). Rangos: $2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(2 - \frac{x^2}{4})}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
>
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(2 - \frac{x^2}{4})$. Queda $\pi\int_2^{2\sqrt{2}} x(2 - \frac{x^2}{4})\,dx$. Primitiva: $x^2 - \frac{x^4}{16}$. En $2\sqrt{2}$: $8 - \frac{64}{16} = 4$. En 2: $4 - 1 = 3$. Diferencia: 1.
>
> **Resultado:** $\iiint_H x\,dV = \pi$.
>
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 1$ (radio de la tapa) y $2 \leq x \leq 2\sqrt{(2 - r^2)}$. $2\pi\int_0^1 r[\frac{x^2}{2}]_2^{2\sqrt{(2 - r^2)}}\,dr = 2\pi\int_0^1 r(2 - 2r^2)\,dr = 2\pi(1 - \frac{1}{2}) = \pi$ ✓.
>
> **Trampa:** el eje del elipsoide es el x: si usás cilíndricas en x, y te quedan raíces feas y límites partidos. El semieje en x es $2\sqrt{2}$ (sale de $x^2/4 = 2$), no $\sqrt{2}$.

Ejercicio 2. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (g(y, z), y^2 + x, 3 + z)$, con $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, a través de porción de la superficie de ecuación $z = 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ que satisface la condición $z \geq 0$, orientada de modo que las normales tengan **tercera componente positiva**.

> **Respuesta:** $\Phi = 44\pi/3$ (normales con tercera componente positiva).
>
> **Planteo:** Σ: $z = 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $z \geq 0$, es la superficie lateral de un cono con vértice (0, 0, 2) y base el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ en $z = 0$ ($z \geq 0 \Leftrightarrow r \leq 2$). Está abierta abajo y g es desconocida: se cierra con la base B: $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, y se usa Gauss en el cono macizo $H = \{0 \leq z \leq 2 - \sqrt{(x^2 + y^2)}\}$.
> **Hipótesis del teorema:** $g \in C^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \vec{f} = (g(y, z), y^2 + x, 3 + z)$ es C^1 (de hecho C^2) en $\mathbb{R}^3$. Σ ∪ B es cerrada y suave a trozos (el vértice y la arista del borde son puntos y curvas, no molestan) y acota H.
> **Orientación:** en Σ la normal con tercera componente positiva apunta hacia afuera de H (el cono macizo está debajo de Σ): coincide con la exterior. En B la exterior es (0, 0, −1).
> **Divergencia:** $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x g(y, z) + \partial_y(y^2 + x) + \partial_z(3 + z) = 0 + 2y + 1 = 2y + 1$. Ojo: g depende de y y de z pero no de x, por eso su derivada respecto de x es 0.

Triple integral: H es simétrico respecto del plano y = 0 (cambiar y por –y lo deja igual) y 2y es impar en y, así que $\iiint_H 2y\,dV = 0$ (en cilíndricas aparece $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 0$). Queda $\iiint_H 1\,dV$ = volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$. En cilíndricas: $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2 - r)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi[r^2 - \frac{r^3}{3}]_0^2 = 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

Base: en z = 0 con normal (0, 0, –1): $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(3 + z) = -3$; $\Phi_B = -3\cdot 4\pi = -12\pi$.

Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{8\pi}{3} + 12\pi = \frac{44\pi}{3}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{44\pi}{3}}$.

Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 1)$, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$: $\vec{f}\cdot\vec{N} = \frac{x\,g(y, 2 - r)}{r} + \frac{y^3 + xy}{r} + 3 + z$. El primer término es impar en x (g no depende de x) y el segundo es impar en y o en x, así que integran 0 sobre el disco. Queda $\iint_{r\le 2}(3 + z)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (5 - r)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi(10 - \frac{8}{3}) = \frac{44\pi}{3}$ ✓.

Trampa: el flujo de la base es negativo (entra), así que al despejar se **suma** 12π; restar da 8π/3 – 12π, que es incorrecto.

Ejercicio 3.

Halle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ para que el campo
$\vec{f}(x, y) = \varphi(x)(e^y - 2xe^y, xe^y)$
cumpla simultáneamente lo siguiente:
1. $\vec{f}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para cierta ϕ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
2. $\vec{f}(0, 1) = (2, 0)$.
Una vez hallada φ halle todas las posibles funciones ϕ.

Respuesta: $\varphi(x) = 2e^{-2x-1}$; $\phi(x, y) = 2x\,e^{y-2x-1} + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Planteo: $P = \varphi(x)(1 - 2x)e^y$ y $Q = \varphi(x)\,x\,e^y$; con $\varphi \in C^1$, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Condición necesaria y suficiente: si $\vec{f} = \nabla\phi$ con $\phi \in C^2$, por Schwarz $\phi''_{xy} = \phi''_{yx}$, o sea $P'_y = Q'_x$. Y al revés: como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo y $\vec{f}$ es C^1, $P'_y = Q'_x$ en todo $\mathbb{R}^2$ alcanza para que $\vec{f}$ sea de gradientes.
La EDO: $P'_y = \varphi(x)(1 - 2x)e^y$ y $Q'_x = (x\varphi'(x) + \varphi(x))e^y$. Igualando y simplificando $e^y \neq 0$: $x\varphi' + \varphi = \varphi - 2x\varphi \Leftrightarrow x(\varphi' + 2\varphi) = 0$ para todo x.
Resolución: para $x \neq 0$ queda $\varphi' = -2\varphi$, lineal homogénea. Multiplicando por e^{2x}: $(\varphi\,e^{2x})' = 0$, así que $\varphi = K\,e^{-2x}$ en cada semirrecta. En principio la constante podría ser distinta en x > 0 y en x < 0, pero φ es continua en 0 y los dos lados tienden a $\varphi(0)$, así que es la misma K: $\varphi(x) = K\,e^{-2x}$ en todo $\mathbb{R}$ (en x = 0 la ecuación es 0 = 0 y se cumple sola). Control: $x(\varphi' + 2\varphi) = x(-2Ke^{-2x} + 2Ke^{-2x}) = 0$ ✓.
Condición 2: $\vec{f}(0, 1) = \varphi(0)(e - 0, 0\cdot e) = (Ke, 0) = (2, 0) \Rightarrow K = 2/e$. $\boldsymbol{\varphi(x) = 2e^{-2x-1}}$.
Potenciales: $\vec{f}(x, y) = (2(1 - 2x)e^{y-2x-1}, 2x\,e^{y-2x-1})$. De $\phi'_y = 2x\,e^{y-2x-1}$ sale $\phi = 2x\,e^{y-2x-1} + h(x)$. Derivando en x: $\phi'_x = (2 - 4x)e^{y-2x-1} + h'(x)$, que tiene que ser $2(1 - 2x)e^{y-2x-1}$: $h' = 0$ y $h = C$.
Resultado: $\boldsymbol{\phi(x, y) = 2x\,e^{y-2x-1} + C}$, $C \in \mathbb{R}$ (en $\mathbb{R}^2$, que es conexo, dos potenciales del mismo campo difieren en una constante, así que no hay otras).
Trampa: el signo de la primera componente ($e^y - 2xe^y$) es el que cambia el exponente: con el "+" del otro tema sale e^{2x}, acá sale e^{-2x}. No confundas φ (la función de x) con ϕ (el potencial).

Ejercicio 4.

Sea Σ la superficie definida por las condiciones
$y + x^2 - 1 = 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le y$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + 1, 2y, z^2)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación de Σ que eligió para el cálculo.

Respuesta: Con $\vec{N} = (2x, 1, 0)$ (segunda componente positiva, lejos del eje z): $\Phi = 8/3$. Con la opuesta, $-8/3$.

Planteo: $y = 1 - x^2$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z; su traza tiene vértice (0, 1) y abre hacia y negativo. Como $y \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$; z va de 0 a $y = 1 - x^2$.
Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 1 - x^2, z)$, $D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$.
Normal: $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$.
Orientación elegida: quiero la que se aleja del eje z (segunda componente positiva; en (0, 1, z) es $\vec{j}$), así que uso $\vec{N} = \vec{X}_z \times \vec{X}_x = (2x, 1, 0)$. En el gráfico: la "teja" parabólica entre $z = 0$ y el plano $z = y$, con flechas hacia afuera.
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (x + 1, 2(1 - x^2), z^2)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2x + 2 - 2x^2 = 2x + 2$.
Cuenta: $\Phi = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} (2x + 2)\, dz\, dx = \int_{-1}^{1} (2 + 2x - 2x^2 - 2x^3)\, dx = \left[2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
Resultado: $\Phi = \mathbf{8/3}$ con la normal elegida ($-8/3$ con la opuesta).
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 1 + 2 + 2z = 3 + 2z$. Sólido $W = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq y\}$. $\iiint (3 + 2z)\, dV = \iint (3y + y^2)\, dA = \frac{40}{21}$. Cara $z = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = -z^2 = 0$. Cara $z = y$ con normal saliente $(0, -1, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2y + y^2$, da $-\frac{16}{21}$. $\Phi = \frac{40}{21} + \frac{16}{21} = \frac{8}{3}$ ✓.
Trampa: $\vec{X}_x \times \vec{X}_z$ da la normal hacia el eje z; si no lo mirás, el signo queda cambiado respecto del dibujo.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva de ecuación $\vec{X} = (3\cos(t), 1 + \operatorname{sen}(t))$, $t \in [-\pi, 0]$ y sea $\vec{f}(x, y) = (6x^2y - y, e^{y^7} + 2x^3)$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

Respuesta: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 102 + 3\pi/2 \approx 106{,}71$.

La curva: $x = 3\cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{x^2}{9} + (y - 1)^2 = 1$: elipse de centro (0, 1), semiejes 3 y 1. Con $t \in [-\pi, 0]$, $y \leq 1$: **mitad inferior**, de $(-3, 1)$ a $(3, 1)$ pasando por $(0, 0)$: **sentido antihorario**.
Por qué Green: el término $e^{y^7}\, dy$ no tiene primitiva elemental, pero es exacto y el arco empieza y termina en $y = 1$: aporta 0; con Green desaparece solo.
Rotor escalar: $P = 6x^2y - y$, $Q = e^{y^7} + 2x^3$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 6x^2$, $P'_y = 6x^2 - 1$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = 1}$.
Cierre e hipótesis: agrego S de $(3, 1)$ a $(-3, 1)$ sobre $y = 1$. $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple, C^1 a trozos, borde antihorario (positivo) de la región regular $D = \{\frac{x^2}{9} + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq 1\}$; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$. Green: $\oint_{\Gamma \cup S} = \iint_D 1\, dA = \text{área}(D) = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 1}{2} = \frac{3\pi}{2}$.
Segmento: S: $(t, 1)$, t de 3 a -3; $dy = 0$, sólo $P(t, 1) = 6t^2 - 1$: $\int_S = \int_3^{-3} (6t^2 - 1)\, dt = [2t^3 - t]_3^{-3} = -51 - 51 = -102$.
Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{3\pi}{2} - (-102) = \mathbf{102 + 3\pi/2} \approx 106{,}71$.
Trampa: el exponente de e^{y^7} no importa: Q'_x no depende de él y en el segmento $dy = 0$.

11/7/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el área de la región D cuyo borde es la curva C de ecuación $\vec{X} = (t - t^2, t^3 - t^2)$, $0 \le t \le 1$, y gráfico
[figura]

> **Respuesta:** Área(D) = **1/60** (la parametrización va en sentido horario).
>
> **La curva:** $\vec{X}(0) = \vec{X}(1) = (0, 0)$: es cerrada. $x = t(1 - t) \ge 0$ e $y = -t^2(1 - t) \le 0$, así que vive en el cuarto cuadrante. Es simple: $x(t) = x(s)$ con $s \ne t$ obliga a $s = 1 - t$, y entonces $y(t) - y(1 - t) = t(1 - t)(1 - 2t) \ne 0$ salvo en $t = 1/2$ (que es $s = t$). Es C^1 (polinomial).
> **Orientación:** $t = 1/4$: $(3/16, -3/64)$; $t = 1/2$: $(1/4, -1/8)$; $t = 3/4$: $(3/16, -9/64)$. Sale del origen hacia la derecha pegada al eje ($y \approx -x^2$) y vuelve por debajo ($y \approx -x$): sentido **horario**.
> **Green para el área:** con $\vec{f} = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ y $Q'_x - P'_y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$: $\text{área}(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+}(x\,dy - y\,dx)$.
> **Cuenta:** $x' = 1 - 2t$, $y' = 3t^2 - 2t$. $x\,y' = (t - t^2)(3t^2 - 2t) = -3t^4 + 5t^3 - 2t^2$; y $x'\,y = (t^3 - t^2)(1 - 2t) = -2t^4 + 3t^3 - t^2$. Restando: $x\,y' - y\,x' = -t^4 + 2t^3 - t^2 = -t^2(1 - t)^2$. Entonces $\frac{1}{2}\int_0^1 -t^2(1 - t)^2\,dt = -\frac{1}{2}[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5}]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30} = -\frac{1}{60}$.
> **Lectura del signo:** la parametrización recorre ∂D en sentido horario, así que esta integral es $-$área. Área(D) $= \frac{1}{60}$. (Con $\oint x\,dy$ sola sale lo mismo: $\int_0^1 x\,y'\,dt = -\frac{1}{60}$.)
> **Control por franjas:** para $t \in [0, 1/2]$ la franja vertical en $x = t(1 - t)$ va de $y(1 - t)$ a $y(t)$ y mide $t(1 - t)(1 - 2t)$; con $dx = (1 - 2t)\,dt$ queda $\int_0^{1/2} t(1 - t)(1 - 2t)^2\,dt = \frac{1}{60}$ ✓.
>
> **Resultado: área = 1/60**.
> **Trampa:** si no mirás el sentido, el $-1/60$ parece un error de cuentas. No lo es: es la orientación horaria, y la respuesta se justifica diciéndolo.

Ejercicio 2. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas: $y = kx^9$, $k \in \mathbb{R}$, y sea Γ la porción de la curva de la familia ortogonal a $\mathscr{F}$ que pasa por $A = (-1, 0)$ y está contenida en el semiplano $y \ge 0$.
Calcule $\iint_D y\,dxdy$, siendo D la región del plano limitada por Γ y el eje x.

> **Respuesta:** Γ: mitad superior de $x^2 + 9y^2 = 1$. $D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{(1 - x^2)/3}\}$. $\iint_D y\,dxdy = 2/27$.
>
> **EDO de $\mathscr{F}$:** de $y = kx^9$, $k = \frac{y}{x^9}$ $(x \ne 0)$; derivando $y' = 9kx^8 = \frac{9y}{x}$.
> **Familia ortogonal:** $y' = -\frac{x}{9y}$, o en forma diferencial $x\,dx + 9y\,dy = 0$. Integrando: $\frac{x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + 9y^2 = C$. Por $A = (-1, 0)$: $C = 1$. La curva es la elipse $\mathbf{x^2 + 9y^2 = 1}$ (semiejes 1 en x y 1/3 en y). (En A es $y = 0$ y la forma $y' = -x/(9y)$ no está definida, pero la forma diferencial sí: la elipse tiene tangente vertical en A, perpendicular a la curva de $\mathscr{F}$ que pasa por A, que es $y = 0$ con $k = 0$ ✓.)
> **La región:** Γ es la mitad de arriba de esa elipse muy achatada, $\mathbf{y = \frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{3}}$, que va de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ pasando por $(0, 1/3)$. Con el eje x encierra la media elipse $D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{(1 - x^2)/3}\}$.

Cuenta (dy dx): $\iint_D y\,dx dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{(1-x^2)}/3} dx = \frac{1}{18}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{18}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{18}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{27}$.

Resultado: $\iint_D y\,dx dy$ = **2/27** ≈ 0,074.

Control con polares elípticas: $x = r\cos\theta$, $y = \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{3}$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$; jacobiano $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta/3 & r\cos\theta/3 \end{pmatrix} = \frac{r}{3}$. $\int_0^{\pi}\int_0^{1} \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{3}\cdot\frac{r}{3}\,dr\,d\theta = \frac{1}{9}\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1} = \frac{1}{9}\cdot 2\cdot\frac{1}{3} = 2/27$ ✓.

Trampa: el 9 de x^9 termina como coeficiente de y^2 ($x^2 + 9y^2$), no como exponente. Y el techo es $\sqrt{(1-x^2)}/3$: al elevarlo al cuadrado queda el 1/9.

Ejercicio 3. Sean Γ la curva de ecuación $\vec{X} = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ y sea
$\vec{f}(x, y, z) = (e^{z^2}, x + y^3, \varphi(x) - x^2)$,
con $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada utilizando el teorema de Stokes.

Respuesta: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \pi$.

La curva: $x = \cos t$, $y = \mathrm{sen}\,t \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, y $z = 2\cos t = 2x$. Γ es la elipse que corta el plano **z = 2x** en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cerrada ($t \in [0, 2\pi]$).
Rotor: $\vec{f} = (P, Q, R) = (e^{z^2}, x + y^3, \varphi(x) - x^2)$. Es C^1 en $\mathbb{R}^3$ porque φ es C^1 y lo demás es C^∞. $\mathrm{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 0, 2z\,e^{z^2} - (\varphi'(x) - 2x), 1 - 0) =$ **$(0, 2z\,e^{z^2} - \varphi'(x) + 2x, 1)$**.
Superficie elegida: Σ: $z = 2x$ con $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$, el trozo de plano dentro del cilindro, cuyo borde es Γ. Stokes vale con cualquier superficie regular de borde Γ; elijo ésta porque su normal no tiene componente y, que es justo la componente del rotor donde está la φ desconocida.
Hipótesis de Stokes: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un trozo de plano (regular, orientable) y Γ es una curva cerrada simple y suave.
Orientación compatible: la parametrización proyectada, (cos t, sen t), gira en sentido antihorario mirando desde arriba. Con los dedos de la mano derecha siguiendo ese giro, el pulgar apunta a z positivo, así que la normal es la de componente z positiva: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2, 0, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo: $(\mathrm{rot}\,\vec{f})\cdot\vec{n} = 0\cdot(-2) + (2z\,e^{z^2} - \varphi'(x) + 2x)\cdot 0 + 1\cdot 1 =$ **1**. $\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\,\vec{f})\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_D 1\,dx\,dy =$ área del disco unitario = **π** (en polares: $\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}[r^2/2]_0^{1}\,d\theta = \pi$).
Resultado: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} =$ **π**, con la orientación de la parametrización.
Trampa: el ejercicio pide Stokes, y la clave es elegir la superficie cuya normal mata la componente del rotor con φ′. Con otra superficie del mismo borde el resultado es el mismo, pero φ′ aparece en la cuenta y no la conocés. Y el sentido de $\vec{n}$ (z positivo) no es una elección: lo fija la parametrización antihoraria.

Ejercicio 4. Sea Σ la porción del paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ que satisface las condiciones: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$.
Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z - y)$ a través de Σ orientada de modo tal que las normales tengan **tercera componente negativa**.

Respuesta: $\Phi = 1/6$ (con $\vec{N} = (2x, 2y, -1)$).

Planteo: Σ es el gráfico de $z = x^2 + y^2$ sobre el triángulo $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. $\vec{X}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in T$.
Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, 2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (-2x, -2y, 1)$.
Orientación: tercera componente $1 > 0$, opuesta a la pedida. **Cambio el signo**: $\vec{N} = (2x, 2y, -1)$, tercera componente $-1 < 0$ ✓.
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 2(x^2 + y^2) - y)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + y = y$.
Cuenta: $\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-x} y \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = [-\frac{(1-x)^3}{6}]_0^1 = \frac{1}{6}$.
Resultado: $\Phi = \mathbf{1/6}$.
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 1 + 1 + 2 = 4$. Cierro con el sólido $W = \{(x, y) \in T, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$: Σ es su techo y la normal saliente ahí es la de arriba (la opuesta a la pedida). $\iiint 4 \, dV = 4 \iint_T (x^2 + y^2) \, dA = \frac{2}{3}$. Fondo $z = 0$ $(-\vec{k})$: $\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = y$, da $\frac{1}{6}$. Caras $x = 0$ e $y = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{i}) = -x = 0$, $\vec{f} \cdot (-\vec{j}) = -y = 0$. Cara $x + y = 1$ con normal saliente $(1, 1, 0)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = x + y = 1$, y la integral es $\int_0^1 (x^2 + (1-x)^2) \, dx = \frac{2}{3}$. Techo saliente: $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$; con normal hacia abajo, $\frac{1}{6}$ ✓.
Trampa: usar la normal $(-2x, -2y, 1)$ que sale "sola" del producto vectorial: da $-1/6$.

Ejercicio 5. Calcule la masa del cuerpo H limitado superior e inferiormente por, respectivamente, las superficies de ecuaciones
$\Sigma_1 : z - x^2 - 2y^2 = 16$ y $\Sigma_2 : 3x^2 + 4y^2 + 4x - z = 0$.
Suponga que la densidad de masa en el punto P es proporcional al cuadrado de la distancia de P al plano xz.

Respuesta: $M = 243\pi k/2$ ($\approx 381{,}7\ k$).

Planteo: $M = \iiint_H \delta \, dV$, con H entre Σ_2 (abajo) y Σ_1 (arriba).
Las superficies: Σ_1: $z = 16 + x^2 + 2y^2$, paraboloide elíptico con vértice $(0, 0, 16)$ que abre hacia arriba. Σ_2: $z = 3x^2 + 4y^2 + 4x = 3(x + 2/3)^2 + 4y^2 - 4/3$, otro paraboloide elíptico que abre hacia arriba, más cerrado, con vértice $(-2/3, 0, -4/3)$. Como Σ_2 crece más rápido, termina pasando a Σ_1 y encierran un cuerpo acotado.
Dónde se cortan: $16 + x^2 + 2y^2 = 3x^2 + 4y^2 + 4x$ equivale a $2x^2 + 4x + 2y^2 = 16$, o sea $x^2 + 2x + y^2 = 8$, $(x + 1)^2 + y^2 = 9$. La proyección de H es **el disco de centro $(-1, 0)$ y radio 3**. Altura: $\Sigma_1 - \Sigma_2 = 16 - 2x^2 - 4x - 2y^2 = 2[9 - (x + 1)^2 - y^2] \geq 0$ en el disco (en el centro: $\Sigma_1 = 17$ y $\Sigma_2 = -1$, así que efectivamente Σ_1 va arriba).
Densidad: la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xz es $|y|$, así que $\delta(x, y, z) = ky^2$, con $k > 0$.
Coordenadas: cilíndricas corridas al centro, $x = -1 + r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$, $\Sigma_2 \leq z \leq \Sigma_1$. Como δ no depende de z, la integral en z da $y^2 \cdot (\text{altura}) = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot 2(9 - r^2)$.
Cuenta: $M = k \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot 2(9 - r^2) \, r \, dr \, d\theta = 2k(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta)(\int_0^3 (9r^3 - r^5) \, dr)$. Primitiva de $\operatorname{sen}^2\theta$: $\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$, en $[0, 2\pi]$ da π. Primitiva de $9r^3 - r^5$: $\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}$, entre 0 y 3: $\frac{729}{4} - \frac{729}{6} = \frac{729}{12} = \frac{243}{4}$. $M = 2k \cdot \pi \cdot \frac{243}{4}$.

Resultado: $\mathbf{M = \frac{243\pi k}{2}}$.

Control (cartesianas, otro orden): con $u = x + 1$, $M = k\iint_{u^2 + y^2 \le 9} y^2(18 - 2u^2 - 2y^2)\,du\,dy$. Primero en u, entre $\pm\sqrt{(9 - y^2)}$: $2(18 - 2y^2)\sqrt{(9 - y^2)} - \frac{4}{3}(9 - y^2)^{3/2} = \frac{8}{3}(9 - y^2)^{3/2}$. Después en y, con $y = 3\,\text{sen}\,t$: $\frac{8}{3}\cdot 9\cdot 27\cdot 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^4 t\,dt = 1944\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{243\pi}{2}$ ✓.

Trampa: la distancia al plano xz es $|y|$ (la variable que **no** está en el nombre del plano), no $|z|$ ni $\sqrt{(x^2 + z^2)}$; y la proyección está corrida a (–1, 0), así que polares centradas en el origen no describen el disco.

4/7/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea Γ la curva de ecuaciones
$x^2 + y^2 - z = 0 \wedge z - 2y = 3$
y sea $\vec{f}(x, y, z) = (y + g(x^2), x, z^2 + 2x)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Elija una orientación para Γ, indíquela claramente en un gráfico y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva.

> **Respuesta:** Con Γ antihoraria vista desde arriba: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16\pi$. En el otro sentido, -16π.
>
> **La curva:** de $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y + 3$: $x^2 + y^2 = 2y + 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4$. Γ es la curva cerrada en la que el plano corta al paraboloide; se proyecta sobre la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 2.
> **Rotor:** $\vec{f} = (P, Q, R) = (y + g(x^2), x, z^2 + 2x)$. Es C^1 en $\mathbb{R}^3$: $g(x^2)$ es composición de funciones C^1, y lo demás es polinómico. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$ **$(0 - 0, 0 - 2, 1 - 1) = (0, -2, 0)$**.
> **Superficie elegida:** el trozo del plano $z = 2y + 3$ que queda dentro del paraboloide: $z = 2y + 3$ sobre el disco D de centro $(0, 1)$ y radio 2 (área 4π). El casquete del paraboloide tiene el mismo borde y también serviría, pero el plano tiene normal constante y el rotor es constante: la cuenta sale sola.
> **Hipótesis de Stokes:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un trozo de plano (regular, orientable) y Γ es una curva cerrada simple y suave.
> **Orientación elegida (el gráfico):** Γ recorrida en sentido antihorario mirando desde arriba (desde z positivo). Con los dedos de la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, -2, 1)$, integrando en $dx\,dy$.
> **Flujo:** $(\text{rot}\,\vec{f}) \cdot \vec{n} = 0 + (-2)(-2) + 0 = 4$. $\iint_D (4)\,dx\,dy = 4 \cdot \text{área}(D) = 4 \cdot 4\pi =$ **16π** (en polares centradas: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2/2]_0^2\,d\theta = 4\pi$).
> **Resultado:** con Γ antihoraria vista desde arriba, $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} =$ **16π**; con la orientación contraria cambia el signo.
> **Trampa:** la g desconocida no molesta: $g(x^2)$ está en P y sólo depende de x, mientras que en el rotor P aparece derivada respecto de y y de z. (En la cuenta directa ese término también se va, porque es una diferencial exacta de una sola variable sobre una curva cerrada, pero hay que verlo; con Stokes ni aparece.) Ojo también con la normal: el -2 de $\vec{n}$ es el que pesa, con $(0, 0, 1)$ daría 0.

Ejercicio 2. Sea C la linea de campo de $\vec{f}(x, y) = (-y, 4x)$ que pasa por el punto $(0, -2)$ y sea D la región acotada del plano cuyo borde es C. Calcule
$\iint_D x^2\,dxdy$.

> **Respuesta:** C: $4x^2 + y^2 = 4$ (elipse de semiejes 1 en x y 2 en y). $\iint_D x^2\,dxdy = \pi/2$.
>
> **Planteo:** primero hay que encontrar C (es la solución de una EDO) y recién después integrar sobre el interior de C.
> **Línea de campo (EDO):** una línea de campo cumple $\vec{X}'(t) = \vec{f}(\vec{X}(t))$, o sea $x' = -y$, $y' = 4x$. Dividiendo, $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{-y}$, de variables separables: $y\,dy = -4x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -2x^2 + k \Rightarrow 4x^2 + y^2 = c$. Por $(0, -2)$: $c = 0 + 4 = 4$. Entonces **C: $4x^2 + y^2 = 4$**, o sea $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Control: sobre las trayectorias $\frac{d}{dt}(4x^2 + y^2) = 8x \cdot (-y) + 2y \cdot 4x = 0$, así que $4x^2 + y^2$ se conserva.
> **La región:** C es una elipse centrada en el origen, parada: corta al eje x en $(\pm 1, 0)$ y al eje y en $(0, \pm 2)$. D es su interior, $D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$, simétrico respecto de los dos ejes.

Cambio de variables: $x = r\cos\theta$, $y = 2r\,\text{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (la condición $4x^2 + y^2 \le 4$ pasa a $4r^2 \le 4$, o sea $r \le 1$). Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos^2\theta + 2r\,\text{sen}^2\theta = 2r$.

La transformación es C^1 y biyectiva salvo en $r = 0$ (un punto, área nula), así que $dxdy = 2r\,dr\,d\theta$.

Cuenta: $\iint_D x^2\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 2r^3\,dr\right)$. Primitiva de $\cos^2\theta$: $\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\text{sen}\,2\theta}{4}$, entre 0 y 2π da π. Primitiva de $2r^3$: $\dfrac{r^4}{2}$, entre 0 y 1 da $\dfrac{1}{2}$.

Resultado: $\iint_D x^2\,dxdy = \mathbf{\pi/2}$.

Control en cartesianas: para cada $x \in [-1, 1]$, y va de $-2\sqrt{(1 - x^2)}$ a $2\sqrt{(1 - x^2)}$, así que la integral es $\int_{-1}^{1} 4x^2\sqrt{(1 - x^2)}\,dx$; con $x = \text{sen}\,u$ queda $4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{sen}^2u\cos^2u\,du = 4\cdot\dfrac{\pi}{8} = \pi/2$ ✓.

Trampa: olvidarse del 2 del jacobiano da $\pi/4$, y usar polares comunes con $r \le 2$ integra sobre un círculo, no sobre la elipse.

Ejercicio 3. Sea H el cuerpo definido por $x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12$ y $z \ge \sqrt{(2x^2 + y^2)}$.

Calcule

$\iiint_H z\,dxdydz$.

Respuesta: $\iiint_H z\,dx\,dy\,dz = \mathbf{12\pi} \approx 37{,}7$.

Planteo: hay que calcular $\iiint_H z\,dV$.

El sólido: $x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12$ es el elipsoide macizo (semiejes $\sqrt{12}$ en x y en z, $\sqrt{6}$ en y); $z \ge \sqrt{(2x^2 + y^2)}$ es la parte de adentro (y arriba) de la hoja superior de un cono elíptico con vértice en el origen. H es la parte del elipsoide que queda dentro del cono: un cucurucho de base curva.

Dónde se cortan: sobre el cono $z^2 = 2x^2 + y^2$; reemplazando en el elipsoide, $x^2 + 2y^2 + (2x^2 + y^2) = 12 \iff 3x^2 + 3y^2 = 12 \iff x^2 + y^2 = 4$. La curva de corte no es horizontal ($z^2 = 2x^2 + y^2$ varía entre 4 y 8 sobre ella), pero se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$: los coeficientes están cruzados a propósito para que eso pase.

Proyección: para (x, y) fijo, z va de $\sqrt{(2x^2 + y^2)}$ a $\sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}$, y ese intervalo no es vacío si $2x^2 + y^2 \le 12 - x^2 - 2y^2 \iff x^2 + y^2 \le 4$. La sombra de H es el disco de radio 2 (no el borde del elipsoide).

Integral en z: $\int z\,dz$ tiene primitiva $\dfrac{z^2}{2}$; entre los dos límites las raíces desaparecen: $\dfrac{[(12 - x^2 - 2y^2) - (2x^2 + y^2)]}{2} = \dfrac{(12 - 3x^2 - 3y^2)}{2}$. Por eso conviene cilíndricas: con esféricas las superficies no son esferas ni conos redondos y los límites se vuelven feos.

Polares en el disco: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J| = r$; $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. $\iiint_H z\,dV = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2)\,r\,dr\,d\theta$. En r: primitiva $6r^2 - \dfrac{3r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $24 - 12 = 12$. En θ: por 2π.

Resultado: $\iiint_H z\,dV = \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 12 = \mathbf{12\pi} \approx 37{,}7$.

Control por cortes horizontales: para cada z, el corte de H es $\{2x^2 + y^2 \le z^2,\ x^2 + 2y^2 \le 12 - z^2\}$; integrando $z \cdot$ (área del corte) para $z \in [0, 2\sqrt{3}]$ numéricamente da $37{,}699 = 12\pi$ ✓.

Trampa: proyectar sobre todo el elipsoide en vez de sobre la intersección; y olvidarse el r del jacobiano (sin él la integral en r da $24 - 8 = 16$ y el resultado sale 16π).

Ejercicio 4. Sea Γ la curva que se obtiene al unir el segmento $\bar{A}\bar{B}$ ($A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$) con el arco de curva que va desde B a $C = (0, -1)$ definido por
$x + y^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y^2 + e^{y^2}, y^2 + 2xye^{y^2})$ a lo largo de Γ recorrida de A a C.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -5/6$.
>
> **La curva:** Γ va de $A = (0, 1)$ a $B = (1, 0)$ por el segmento y de B a $C = (0, -1)$ por la parábola $x = 1 - y^2$ ($y \leq 0$).
> **Rotor escalar:** $P = y^2 + e^{y^2}$, $Q = y^2 + 2xy\, e^{y^2}$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 2y\, e^{y^2}$, $P'_y = 2y + 2y\, e^{y^2}$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -2y}$.
> **Cierre:** agrego S, el segmento de $C = (0, -1)$ a $A = (0, 1)$ sobre el eje y. $A \to B \to C \to A$ baja por la derecha y sube por el eje y: es el borde de D en **sentido horario**, con $D = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\} \cup \{-1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$.
> **Hipótesis de Green:** D es regular, su borde es cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D (-2y)\, dA = 2\iint_D y\, dA$.
> **Doble integral:** $\iint_D y\, dA = \int_0^1 y(1 - y)\, dy + \int_{-1}^0 y(1 - y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$. Así $\oint_{\Gamma \cup S} = -\frac{1}{6}$.
> **Segmento:** S: $(0, t)$, t de -1 a 1, derivada $(0, 1)$; $Q(0, t) = t^2$, así que $\int_S = \int_{-1}^1 t^2\, dt = \frac{2}{3}$.
> **Resultado:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \mathbf{-5/6}$.
> **Control directo:** $e^{y^2}\, dx + 2xy\, e^{y^2}\, dy = d(x\, e^{y^2})$, que vale 0 en A y en C. Queda $\int y^2\, dx + y^2\, dy$: en AB ($x = t$, $y = 1 - t$) da $\int (1 - t)^2(1 - 1)\, dt = 0$; en el arco ($x = 1 - y^2$, $dx = -2y\, dy$, y de 0 a -1) da $\int_0^{-1} (-2y^3 + y^2)\, dy = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -5/6$ ✓.
> **Trampa:** $A \to B \to C \to A$ gira en sentido horario; si aplicás Green con signo más te da $1/6 - 2/3 = -1/2$, que está mal.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ que satisface las condiciones: $0 \leq y, z \leq 4$. Calcule el área de Σ.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = \frac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{12} \approx 18{,}09$.
>
> **Planteo:** $z - x^2 - y^2 = 0$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con vértice en el origen y abierto hacia arriba. Σ es la parte con $0 \leq y$ y $z \leq 4$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r^2)$.
> **Dominio D:** $z \leq 4$ es $r^2 \leq 4$, o sea $0 \leq r \leq 2$. $Y \geq 0$ es $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, o sea $0 \leq \theta \leq \pi$. $D = [0, 2] \times [0, \pi]$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2 \operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ ($r \geq 0$). Sólo se anula en $r = 0$, un punto que no aporta área.
> **Cuenta:** $A = \int_0^\pi \int_0^2 r\sqrt{(1 + 4r^2)}\, dr\, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\, dr$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 2 da $\frac{17^{3/2} - 1}{12} = \frac{17\sqrt{17} - 1}{12}$. Integral en θ: multiplica por π.
> **Resultado:** $A(\Sigma) = \mathbf{\frac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{12}} \approx 18{,}09$.
> **Control (cartesianas):** como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\, dx\, dy$ sobre el semidisco $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$;

integrado numéricamente da lo mismo ✓.

Trampa: $z \leq 4$ es $r \leq 2$, no $r \leq 4$: el radio es la raíz de la altura. Y no te olvides del factor r del módulo.

4/7/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea Σ la porción de la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ que satisface las condiciones: $0 \le y, z \le 9$. Calcule el área de Σ.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = \dfrac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{12} \approx 58{,}66$.
>
> **Planteo:** $z - x^2 - y^2 = 0$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con vértice en el origen y abierto hacia arriba. Σ es la parte con $0 \le y$ y $z \le 9$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| \, dr \, d\theta$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r^2)$.
> **Dominio D:** $z \le 9$ es $r^2 \le 9$, o sea $0 \le r \le 3$. $Y \ge 0$ es $\text{sen}\,\theta \ge 0$, o sea $0 \le \theta \le \pi$. $D = [0, 3] \times [0, \pi]$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\,\text{sen}\,\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ $(r \ge 0)$. Sólo se anula en $r = 0$, un punto que no aporta área.
> **Cuenta:** $A = \int_0^{\pi} \int_0^{3} r\sqrt{(1 + 4r^2)} \, dr \, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\,dr$, primitiva $\dfrac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\dfrac{37^{3/2} - 1}{12} = \dfrac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Integral en θ: multiplica por π.
> **Resultado:** $A(\Sigma) = \mathbf{\dfrac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{12}} \approx 58{,}66$.
> **Control (cartesianas):** como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\,dx\,dy$ sobre el semidisco $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$; integrado numéricamente da lo mismo ✓.
> **Trampa:** $z \le 9$ es $r \le 3$, no $r \le 9$: el radio es la raíz de la altura. Y no te olvides del factor r del módulo.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir el segmento $\bar{A}\bar{B}$ ($A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$) con el arco de curva que va de B a $C = (-1, 0)$ definido por
$x^2 + y = 1 \wedge x \le 0 \wedge y \ge 0$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (x^2 + 2xye^{x^2}, x^2 + e^{x^2})$ a lo largo de Γ recorrida de C a A.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 5/6$ (de C a A).
>
> **La curva:** recorrida de C a A: de $C = (-1, 0)$ a $B = (0, 1)$ por la parábola $y = 1 - x^2$ $(x \le 0)$ y de B a $A = (1, 0)$ por el segmento.
> **Rotor escalar:** $P = x^2 + 2xy\,e^{x^2}$, $Q = x^2 + e^{x^2}$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 2x + 2x\,e^{x^2}$, $P'_y = 2x\,e^{x^2}$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = 2x}$.
> **Cierre:** agrego S, el segmento de $A = (1, 0)$ a $C = (-1, 0)$ sobre el eje x. $C \to B \to A \to C$ sube por la izquierda, baja por la derecha y vuelve por abajo: borde de D en **sentido horario**, con $D = \{-1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1 - x^2\} \cup \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$.
> **Hipótesis de Green:** D regular, borde cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 2x\,dA$.
> **Doble integral:** $\iint_D 2x\,dA = \int_{-1}^{0} 2x(1 - x^2)\,dx + \int_0^{1} 2x(1 - x)\,dx = [x^2 - \dfrac{x^4}{2}]_{-1}^{0} + [x^2 - \dfrac{2x^3}{3}]_0^{1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6}$. Así $\oint_{\Gamma \cup S} = \dfrac{1}{6}$.
> **Segmento:** S: (t, 0), t de 1 a −1, derivada (1, 0); $P(t, 0) = t^2$: $\int_S = \int_1^{-1} t^2\,dt = -\dfrac{2}{3}$.
> **Resultado:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{6} - (-\dfrac{2}{3}) = \mathbf{5/6}$.
> **Control directo:** $2xy\,e^{x^2}\,dx + e^{x^2}\,dy = d(y\,e^{x^2})$, que vale 0 en C y en A. Queda $\int x^2\,dx + x^2\,dy$: en el arco

($y = 1 - x^2$, $dy = -2x\,dx$, x de −1 a 0) da $\int_{-1}^{0} (x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 5/6$; en BA ($dy = -dx$) da 0 ✓.

Trampa: el sentido pedido es de C a A (al revés del orden en que se describe la curva); con eso la curva cerrada queda horaria.

Ejercicio 3. Sea C la linea de campo de $\vec{f}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por el punto (−2, 0) y sea D la región acotada del plano cuyo borde es C. Calcule
$\iint_D y^2\,dxdy$.

Respuesta: C: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. $\iint_D y^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}$.

Línea de campo (EDO): $\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ da $x' = 4y$, $y' = -x$. Las trayectorias cumplen $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, separable: $4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c_0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = c$. Por (−2, 0): $c = 4$. Control: $\frac{d}{dt}(x^2 + 4y^2) = 2x \cdot 4y + 8y \cdot (-x) = 0$, así que $x^2 + 4y^2$ se conserva sobre la trayectoria; con el sistema completo sale $\vec{X}(t) = (-2\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, que da la vuelta entera (es periódica). En (−2, 0) la tangente es vertical ($\vec{f} = (0, 2)$), por eso $\frac{dy}{dx}$ no está definida ahí, pero la curva sí.

La región (dibujo): C es la elipse $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}} + \mathbf{y^2 = 1}$, centrada en el origen, con semieje 2 en x y 1 en y. Es cerrada, y D es su interior: $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$.

Cambio de variables (polares elípticas): $x = 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$. El integrando: $y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$.

Cuenta: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta = 2\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right)$. En r: $\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$. En θ: $\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$.

Resultado: $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \mathbf{\frac{\pi}{2}}$.

Control en cartesianas: $D = \{-1 \le y \le 1, |x| \le 2\sqrt{(1 - y^2)}\}$: $\int_{-1}^{1} y^2 \cdot 4\sqrt{(1 - y^2)}\,dy$, y con $y = \operatorname{sen} u$ queda $4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u\,du = 4 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ ✓.

Trampa: el jacobiano es 2r (producto de semiejes por r); con r solo da $\frac{\pi}{4}$. Y no confundas los semiejes: de $x^2 + 4y^2 = 4$ el semieje en x es 2 y el semieje en y es 1.

Ejercicio 4. Sea H el cuerpo definido por $2x^2 + y^2 + z^2 \le 12$ y $z \ge \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$.
Calcule
$\iiint_H z\,dxdydz$.

Respuesta: $\iiint_H z\,dx\,dy\,dz = \mathbf{12\pi} \approx 37{,}7$.

Planteo: hay que calcular $\iiint_H z\,dV$.
El sólido: $2x^2 + y^2 + z^2 \le 12$ es el elipsoide macizo (semiejes $\sqrt{6}$ en x y $\sqrt{12}$ en y y en z); $z \ge \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ es la parte de adentro (y arriba) de la hoja superior de un cono elíptico con vértice en el origen. H es la parte del elipsoide que queda dentro del cono: un cucurucho de base curva.
Dónde se cortan: sobre el cono $z^2 = x^2 + 2y^2$; reemplazando en el elipsoide, $2x^2 + y^2 + (x^2 + 2y^2) = 12$

$\iff 3x^2 + 3y^2 = 12 \iff x^2 + y^2 = 4$. La curva de corte no es horizontal ($z^2 = x^2 + 2y^2$ varía entre 4 y 8 sobre ella), pero se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$: los coeficientes están cruzados a propósito para que eso pase.

Proyección: para (x, y) fijo, z va de $\sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ a $\sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$, y ese intervalo no es vacío si $x^2 + 2y^2 \le 12 - 2x^2 - y^2 \iff x^2 + y^2 \le 4$. La sombra de H es el disco de radio 2 (no el borde del elipsoide).

Integral en z: $\int z\,dz$ tiene primitiva $\frac{z^2}{2}$; entre los dos límites las raíces desaparecen: $\frac{[(12 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2)]}{2} = \frac{(12 - 3x^2 - 3y^2)}{2}$. Por eso conviene cilíndricas: con esféricas las superficies no son esferas ni conos redondos y los límites se vuelven feos.

Polares en el disco: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J| = r$; $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. $\iiint_H z\,dV = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2)\,r\,dr\,d\theta$. En r: primitiva $6r^2 - \frac{3r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $24 - 12 = 12$. En θ: por 2π.

Resultado: $\iiint_H z\,dV = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 12 = \mathbf{12\pi} \approx 37{,}7$.

Control por cortes horizontales: para cada z, el corte de H es $\{x^2 + 2y^2 \le z^2,\ 2x^2 + y^2 \le 12 - z^2\}$; integrando $z \cdot$ (área del corte) para $z \in [0, 2\sqrt{3}]$ numéricamente da $37{,}699 = 12\pi$ ✓.

Trampa: proyectar sobre todo el elipsoide en vez de sobre la intersección; y olvidarse el r del jacobiano (sin él la integral en r da $24 - 8 = 16$ y el resultado sale 16π).

Ejercicio 5. Sea Γ la curva de ecuaciones

$x^2 + y^2 - z = 0 \wedge z - 2x = 3$

y sea $\vec{f}(x, y, z) = (y,\ x + g(y^2),\ z^2 + 2y)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Elija una orientación para Γ, indíquela claramente en un gráfico y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva.

Respuesta: Con Γ antihoraria vista desde arriba: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = -16\pi$. En el otro sentido, 16π.

La curva: de $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x + 3$: $x^2 + y^2 = 2x + 3 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 4$. Γ es la curva cerrada en la que el plano corta al paraboloide; se proyecta sobre la circunferencia de centro (1, 0) y radio 2.

Rotor: $\vec{f} = (P, Q, R) = (y,\ x + g(y^2),\ z^2 + 2y)$. Es C^1 en $\mathbb{R}^3$: $g(y^2)$ es composición de funciones C^1, y lo demás es polinómico. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = \mathbf{(2 - 0,\ 0 - 0,\ 1 - 1) = (2, 0, 0)}$.

Superficie elegida: el trozo del plano $z = 2x + 3$ que queda dentro del paraboloide: $z = 2x + 3$ sobre el disco D de centro (1, 0) y radio 2 (área 4π). El casquete del paraboloide tiene el mismo borde y también serviría, pero el plano tiene normal constante y el rotor es constante: la cuenta sale sola.

Hipótesis de Stokes: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un trozo de plano (regular, orientable) y Γ es una curva cerrada simple y suave.

Orientación elegida (el gráfico): Γ recorrida en sentido antihorario mirando desde arriba (desde z positivo). Con los dedos de la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x,\ -z'_y,\ 1) = (-2, 0, 1)$, integrando en dx dy.

Flujo: $(\text{rot}\,\vec{f})\cdot\vec{n} = 2\cdot(-2) + 0 + 0 = -4$. $\iint_D (-4)\,dx\,dy = -4 \cdot \text{área}(D) = -4 \cdot 4\pi = \mathbf{-16\pi}$ (en polares centradas: $\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2/2]_0^2\,d\theta = 4\pi$).

Resultado: con Γ antihoraria vista desde arriba, $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \mathbf{-16\pi}$; con la orientación contraria cambia el signo.

Trampa: la g desconocida no molesta: $g(y^2)$ está en Q y sólo depende de y, mientras que en el rotor Q aparece derivada respecto de x y de z. (En la cuenta directa ese término también se va, porque es una diferencial exacta de una sola variable sobre una curva cerrada, pero hay que verlo; con Stokes ni aparece.) Ojo también con la normal: el −2 de $\vec{n}$ es el que pesa, con (0, 0, 1) daría 0.

14/3/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. El borde de la región D está compuesto por el arco de curva C de ecuación vectorial $\vec{X} = (t - \text{sen}(t), \cos(t) - 1)$, $0 \le t \le 2\pi$, cuyo gráfico es
[figura]
y el segmento que une (0, 0) con (2π, 0). Halle $\iint_D y\,dxdy$.
Pista: Calcule la circulación de un campo adecuado.

> **Respuesta:** $\iint_D y\,dxdy = \mathbf{-5\pi/2}$ (negativa porque $y \le 0$ en D).
>
> **Planteo:** busco $\vec{f}$ con $Q'_x - P'_y = y$, para que $\iint_D y\,dxdy = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$. Tomo $\vec{\mathbf{f}} = \mathbf{(-\frac{y^2}{2}, 0)}$: $P'_y = -y$, $Q'_x = 0$, rotor y; es C^1 en $\mathbb{R}^2$.
> **La región:** $x(t) = t - \text{sen } t$ es creciente ($x' = 1 - \cos t \ge 0$, nula sólo en los extremos) e $y = \cos t - 1 \le 0$, con mínimo -2 en $t = \pi$. El arco es el gráfico de una función de x por debajo del eje: $D = \{0 \le x \le 2\pi, y_C(x) \le y \le 0\}$, compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos.
> **Orientación positiva:** antihoraria. Como el arco está *abajo*, recorrerlo de izquierda a derecha ya es antihorario: el arco con t **de 0 a 2π** y después el segmento de (2π, 0) a (0, 0).
> **El segmento:** $y = 0$, $P = 0$: no aporta.
> **El arco:** $\vec{X}' = (1 - \cos t, -\text{sen } t)$. $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -\frac{(\cos t - 1)^2}{2}(1 - \cos t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt$.
> Desarrollo: $1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t$, con primitivas t, sen t, $\frac{t}{2} + \frac{\text{sen } 2t}{4}$ y $\text{sen } t - \frac{\text{sen}^3 t}{3}$; entre 0 y 2π da $2\pi + 3\pi = 5\pi$. Circulación: $-\frac{5\pi}{2}$.
> **Resultado:** $\iint_D y\,dxdy = \mathbf{-5\pi/2}$. Tiene sentido que sea negativa: en D es $y \le 0$. Es el espejo del arco por arriba, que da 5π/2.
> **Trampa:** copiar el sentido del arco de arriba (t de 2π a 0) da +5π/2, imposible para una función negativa en D. El sentido se decide mirando de qué lado queda la región.

Ejercicio 2. Sea Σ la porción de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante y satisface las condiciones $y - x \ge 0$ y $z - y \le 0$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (3 - 2y, 2x, z^2 + y^3)$ a través de Σ orientada de modo tal que el versor normal tenga segunda componente positiva.

> **Respuesta:** Φ = 27/4 (con $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0)$, saliente del cilindro, que es la orientación pedida).
>
> **Planteo:** Σ está sobre el cilindro de radio 3 y eje z. Parametrizo en cilíndricas: $\vec{X}(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, z)$.
> **Dominio de parámetros:** primer octante pide x, y, z ≥ 0. La condición $y - x \ge 0$ es $3\,\text{sen}\,\theta \ge 3\cos\theta$, que junto con x, y ≥ 0 da $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$. La condición $z - y \le 0$ es $z \le 3\,\text{sen}\,\theta$. Entonces $D = \{\pi/4 \le \theta \le \pi/2, 0 \le z \le 3\,\text{sen}\,\theta\}$.
> **Normal:** $\vec{X}_\theta = (-3\,\text{sen}\,\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0)$.
> **Orientación:** la segunda componente es $3\,\text{sen}\,\theta \ge 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ en todo D. Es la pedida (es la normal que sale del cilindro), así que no hay que cambiar el signo: $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0)$.
> **Producto escalar:** $\vec{f}(\vec{X}(\theta, z)) = (3 - 6\,\text{sen}\,\theta, 6\cos\theta, z^2 + 27\,\text{sen}^3\theta)$. Como $\vec{N}$ es horizontal, la tercera

componente no aporta: $\vec{f}\cdot\vec{N} = (3 - 6\operatorname{sen}\theta)\cdot 3\cos\theta + 6\cos\theta\cdot 3\operatorname{sen}\theta = 9\cos\theta - 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 9\cos\theta$.

Cuenta: $\Phi = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{3\operatorname{sen}\theta} 9\cos\theta\,dz\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 27\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$. Primitiva: $\frac{27\operatorname{sen}^2\theta}{2}$; entre $\pi/4$ y $\pi/2$: $\frac{27}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$.

Resultado: $\Phi = \mathbf{27/4}$.

Control con el versor: $\check{n} = (x, y, 0)/3$ y $d\sigma = 3\,d\theta\,dz$, así que $\vec{f}\cdot\check{n} = ((3 - 2y)x + 2xy)/3 = x$ y $\Phi = \iint_\Sigma x\,d\sigma = \int\int 3\cos\theta\cdot 3\,dz\,d\theta$, la misma integral. También lo crucé con Gauss cerrando el sólido con $z = 0$, $z = y$, $y = x$ y $x = 0$: da 27/4.

Trampa: el techo de z depende de θ ($z \le y = 3\operatorname{sen}\theta$); integrar z de 0 a 3 da otra cosa. Y la condición $y \ge x$ deja θ entre $\pi/4$ y $\pi/2$, no entre 0 y $\pi/4$.

Ejercicio 3. Sea $\vec{f}(x, y) = (yx + g(y)x, g(y)x^2)$, con $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(1, 0) = (1, 1)$. Halle g y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $g(y) = (1 + e^{2y})/2$; potenciales $U(x, y) = (x^2/4)(2y + e^{2y} + 1) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $g \in C^1$. Si $\vec{f}$ es de gradientes, $\vec{f} = \nabla U$ con U de clase C^2, y por Schwarz $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$: esa es la condición necesaria que da la ecuación para g.

La EDO: $P = yx + g(y)x$, $Q = g(y)x^2$. $P'_y = x + g'(y)x$; $Q'_x = 2g(y)x$. Igualando: $x(1 + g' - 2g) = 0$ para todo (x, y); con $x = 1$, $\mathbf{g' = 2g - 1}$.

Dato: $\vec{f}(1, 0) = (0 + g(0)\cdot 1, g(0)\cdot 1) = (g(0), g(0)) = (1, 1) \Rightarrow g(0) = 1$.

EDO lineal: $g' - 2g = -1$. Con factor integrante e^{-2y}: $(g\,e^{-2y})' = -e^{-2y} \Rightarrow g\,e^{-2y} = \frac{e^{-2y}}{2} + K \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2} + K\,e^{2y}$. Con $g(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda $\mathbf{g(y) = \frac{1 + e^{2y}}{2}}$.

Suficiencia: con esa g, $P'_y = Q'_x = x(1 + e^{2y})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (lo confirma el potencial que sigue).

Potencial: conviene empezar por Q: $U'_y = \frac{1 + e^{2y}}{2}x^2 \Rightarrow U = x^2(\frac{y}{2} + \frac{e^{2y}}{4}) + h(x)$. Derivando en x: $x(y + \frac{e^{2y}}{2}) + h'(x)$, que tiene que ser $P = xy + \frac{x}{2} + \frac{x\,e^{2y}}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{x}{2}$, $h = \frac{x^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{x^2}{4}(2y + e^{2y} + 1) + K$.

Resultado: $g(y) = (1 + e^{2y})/2$ y las funciones potenciales son $\mathbf{U(x, y) = \frac{x^2}{4}(2y + e^{2y} + 1) + K}$, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: en P'_y la $g(y)x$ se deriva a $g'(y)x$ (g depende de y), y "todas las funciones potenciales" pide la constante K ($\mathbb{R}^2$ es conexo, así que difieren en una constante).

Ejercicio 4. Calcule la circulación de
$\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + 2y, 2xy + e^{\cos(y)}, e^{z^2})$
a lo largo de la curva C definida por las ecuaciones
$x^2 + x + y^2 + z = 0 \wedge x + 2y + z = 0$,
orientada de modo tal que en el punto (0, 0, 0) el versor tangente a C tenga primera componente positiva.

Respuesta: $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = -2\pi$ (C recorrida en sentido antihorario visto desde arriba, que es el que pide el enunciado).

Planteo: C es cerrada y el campo trae $e^{\cos y}$ y e^{z^2}, que no tienen primitiva elemental; la cuenta directa sobre una parametrización de C sale sólo si uno ve qué partes son exactas. El camino natural es el

teorema del rotor (Stokes): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, con Σ una superficie cuyo borde sea C y $\vec{n}$ orientada de forma compatible.

La curva: de la segunda ecuación, $z = -x - 2y$. Reemplazando en la primera: $x^2 + x + y^2 - x - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$. C se proyecta sobre el plano xy en la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, y está toda contenida en el plano $x + 2y + z = 0$.

Superficie elegida: como C está en el plano $x + 2y + z = 0$, tomo Σ el pedazo de ese plano que C encierra: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, -x - 2y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$. Se puede elegir cualquier superficie regular y orientable con borde C (Stokes da lo mismo para todas); la plana es la más cómoda porque su normal es constante. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) = (1, 2, 1)$, que apunta hacia arriba (tercera componente positiva).

Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomios y exponenciales de funciones C^1); Σ es un trozo de plano, regular, simple y orientable; su borde C es una curva cerrada, simple y suave. Falta la orientación compatible.

Sentido de C: en $(0, 0, 0)$ el tangente es paralelo a $\nabla(x^2 + x + y^2 + z) \times \nabla(x + 2y + z) = (1, 0, 1) \times (1, 2, 1) = (-2, 0, 2)$. Con primera componente positiva, $\vec{T} \parallel (1, 0, -1)$. En la proyección, $(0, 0)$ es el punto más bajo de la circunferencia y ahí se avanza hacia x creciente: C se recorre en sentido **antihorario visto desde arriba** (desde z positivo).

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con C antihoraria vista desde arriba, el pulgar apunta hacia arriba: $\vec{n} \parallel (1, 2, 1)$, justo la que dio la parametrización, así que no hay que cambiarle el signo.

Rotor: con $P = y^2 + 2y$, $Q = 2xy + e^{\cos y}$, $R = e^{z^2}$: $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 0, 0 - 0, 2y - (2y + 2)) = (0, 0, -2)$. Las partes feas del campo desaparecen del rotor.

Flujo del rotor: $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (0, 0, -2) \cdot (1, 2, 1)\, dxdy = -2 \cdot \text{Área}(D) = -2 \cdot \pi$.

Resultado: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-2\pi}$.

Control (circulación directa): $(y^2 + 2y)dx + (2xy + e^{\cos y})dy + e^{z^2}dz = d(xy^2) + e^{\cos y}dy + e^{z^2}dz + 2y\,dx$; los tres primeros términos son diferenciales exactas (de funciones C^1), así que en una curva cerrada dan 0. Queda $\oint 2y\,dx$ con $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$ (antihoraria; en $t = 3\pi/2$ pasa por el origen con tangente $(1, 0, -1)$): $\int_0^{2\pi} 2(1 + \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\, dt = -2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt - 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = 0 - 2\pi = -2\pi$ ✓.

Trampa: tomar la normal hacia abajo (o leer el sentido como horario) cambia el signo, y el signo es la mitad del ejercicio. Tampoco hace falta parametrizar C en 3D: el plano que la contiene ya da la superficie.

Ejercicio 5. Sea D el cuerpo sólido que ocupa la región definida por las condiciones $7x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2 \wedge x \ge 0$.

Calcule la masa de D suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano yz.

Respuesta: $M = \dfrac{64k}{15} \approx 4{,}27k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).

Planteo: la distancia de (x, y, z) al plano yz es $|x|$. En D vale $x \ge 0$, así que la densidad es $\delta = kx$ con $k > 0$, y $M = \iiint_D kx\, dV$.

El sólido: $z = 7x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico que abre hacia arriba con vértice en el origen; $z = 8 - x^2 - y^2$ es un paraboloide circular que abre hacia abajo con vértice $(0, 0, 8)$. D es lo que queda por encima del primero y por debajo del segundo, y el semiespacio $x \ge 0$ se queda con una mitad.

Dónde se cortan: $7x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \iff 8x^2 + 2y^2 = 8 \iff x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. La curva de corte no está a altura constante (no es una circunferencia horizontal), pero su sombra en el plano xy es la elipse de semiejes 1 (sobre el eje x) y 2 (sobre el eje y). Adentro de esa elipse el techo está por encima del piso (en el origen, $0 \le 8$), afuera al revés, así que la proyección de D es D_{xy}: la media elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ con $x \ge 0$.

Integral en z: para $(x, y) \in D_{xy}$, z va de $7x^2 + y^2$ a $8 - x^2 - y^2$. Primitiva $kx \cdot z$, y queda $kx(8 - 8x^2 - 2y^2)$. Entonces $M = k \iint_{D_{xy}} x(8 - 8x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$.

Coordenadas elípticas (para que la elipse sea r constante): $x = r\cos\theta$, $y = 2r\,\text{sen}\,\theta$, con $|J| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = 2r\cos^2\theta + 2r\,\text{sen}^2\theta = 2r$. Queda $x^2 + \frac{y^2}{4} = r^2$, así que la elipse es $r \le 1$, y $x \ge 0$ es $\cos\theta \ge 0$, o sea $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. La altura: $8 - 8r^2\cos^2\theta - 8r^2\,\text{sen}^2\theta = 8(1 - r^2)$.

Cuenta: $M = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r\cos\theta \cdot 8(1 - r^2) \cdot 2r\, dr\, d\theta = 16k \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\right)$. En r: primitiva $\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}$, entre 0 y 1 da $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. En θ: primitiva sen θ, da $\text{sen}(\pi/2) - \text{sen}(-\pi/2) = 2$.

Resultado: $M = 16k \cdot 2 \cdot \frac{2}{15} = \mathbf{\frac{64k}{15}} \approx 4{,}27k$.

Control en cartesianas: $x \in [0, 1]$, $|y| \le 2\sqrt{(1 - x^2)}$. Integral en y de $x(8 - 8x^2 - 2y^2)$: primitiva $x(8(1 - x^2)y - \frac{2y^3}{3})$; entre $\pm 2\sqrt{(1 - x^2)}$ da $x(32(1 - x^2)^{3/2} - \frac{32}{3}(1 - x^2)^{3/2}) = \frac{64}{3}\, x(1 - x^2)^{3/2}$. Integral en x con $u = 1 - x^2$ ($du = -2x\, dx$): $\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 u^{3/2}\, du = \frac{32}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{64}{15}$ ✓.

Trampa: en polares comunes la elipse no queda r = constante y los límites se complican; con las elípticas el jacobiano es 2r, no r (olvidarte el 2 te da la mitad). Y la densidad es la distancia a un plano, $|x|$, no la distancia a un eje ni al origen.

7/3/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ tal que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuaciones
$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \wedge 2z - y = 2$
sabiendo que $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (-x, y - 2z, 0)$. Indique claramente en un gráfico la orientación de C que eligió para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con C antihoraria vista desde arriba (normal $(0, -1/2, 1)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.
>
> **Planteo:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$.
>
> **La curva:** $x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$, cilindro elíptico de centro $(1, 0)$ y semiejes 2 y 1; el plano es $2z - y = 2$, o sea $z = 1 + y/2$. C es una elipse cerrada: $\vec{X}(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t, 1 + \frac{\operatorname{sen} t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$.
>
> **Parte de gradiente:** $\phi \in C^2$ y C cerrada: $\oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \mathbf{0}$.
>
> **Superficie elegida:** Σ: $z = 1 + y/2$ con $(x, y) \in D = \{(x-1)^2 + 4y^2 \leq 4\}$, el trozo de plano encerrado por C. Se puede usar cualquier superficie regular con borde C; ésta tiene normal constante. Área de $D = \pi \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$.
>
> **Hipótesis de Stokes:** $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es regular y orientable (trozo de plano) y C es cerrada, simple y suave.
>
> **Orientación elegida (el gráfico):** la elipse en el plano inclinado, más alta del lado $y > 0$ (pasa por $(1, 1, 3/2)$) y más baja del lado $y < 0$ (pasa por $(1, -1, 1/2)$), con flechas en sentido antihorario mirando desde arriba: de $(3, 0, 1)$ a $(1, 1, 3/2)$, a $(-1, 0, 1)$, a $(1, -1, 1/2)$. Regla de la mano derecha: los dedos siguen ese giro y el pulgar apunta a z positivo, así que $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, -1/2, 1)$, integrando en dx dy.
>
> **Flujo del rotor:** sobre Σ, $y - 2z = y - 2 - y = -2$, así que $\nabla \times \vec{g} = (-x, -2, 0)$ y $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = 0 + (-2)(-1/2) + 0 = 1$. $\iint_\Sigma (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_D 1\, dx\, dy = \text{área}(D) = \mathbf{2\pi}$ (con $x = 1 + 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2]_0^1\, d\theta = 2\pi$).
>
> **Resultado:** con C antihoraria vista desde arriba, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + 2\pi = \mathbf{2\pi}$ (-2π con el otro sentido).
>
> **Trampa:** la componente y del rotor depende de z; si no reemplazás $z = 1 + y/2$ antes de integrar no ves que el integrando es constante. Y no olvides el $-1/2$ de la normal: con $(0, 0, 1)$ te daría 0.

Ejercicio 2. Calcule el volumen de la porción de la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio 2 que está contenida en el cilindro sólido definido por $x^2 + z^2 \leq 1$.

> **Respuesta:** $V = 32\pi/3 - 4\sqrt{3}\,\pi = (4\pi/3)(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74$.
>
> **Planteo:** el sólido es $B \cap C$, con B: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ (bola de radio 2) y C: $x^2 + z^2 \leq 1$, un cilindro circular macizo de radio 1 **cuyo eje es el eje y** (la variable que falta en la ecuación es la del eje). $V = \iiint_{B \cap C} dV$.
>
> **Cómo es:** el cilindro atraviesa la bola a lo largo del eje y. La superficie cilíndrica corta a la esfera donde $x^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o sea $y^2 = 3$: dos circunferencias de radio 1 en los planos $y = \pm\sqrt{3}$. Para $|y| \leq \sqrt{3}$ el sólido es un tramo de cilindro; para $\sqrt{3} \leq |y| \leq 2$ son dos casquetes esféricos (ahí las tapas las pone la esfera). Es simétrico respecto del plano $y = 0$.
>
> **Coordenadas:** cilíndricas con eje y: $x = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, $y = y$. Es el cambio cilíndrico de siempre con

los papeles de las variables cambiados, así que |jacobiano| = r. Rangos: $x^2 + z^2 = r^2 \le 1$ da $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$; la bola da $r^2 + y^2 \le 4$, o sea $-\sqrt{(4 - r^2)} \le y \le \sqrt{(4 - r^2)}$ (con $r \le 1$ esa raíz vale al menos $\sqrt{3}$, siempre hay segmento).

Cuenta: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{(4-r^2)}}^{\sqrt{(4-r^2)}} r \, dy \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{(4 - r^2)} \, dr$. Primitiva de $2r\sqrt{(4 - r^2)}$: $-\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2}$, entre 0 y 1: $-\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 8) = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$. Entonces $V = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.

Resultado: $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74}$. Control de tamaño: el cilindro de radio 1 y largo 4 tiene $4\pi \approx 12{,}57$, y la bola le recorta las puntas: da un poco menos, razonable.

Control por rebanadas: cortando con planos $y = c$, la sección es el disco $x^2 + z^2 \le$ mín$(1, 4 - c^2)$: área π si $|c| \le \sqrt{3}$, y $\pi(4 - c^2)$ si $\sqrt{3} \le |c| \le 2$. $V = 2[\int_0^{\sqrt{3}} \pi \, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \pi(4 - y^2) \, dy] = 2\pi[\sqrt{3} + (8 - \frac{8}{3}) - (4\sqrt{3} - \sqrt{3})] = 2\pi(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}) = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi$ ✓.

Trampa: usar cilíndricas de eje z ($x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$) cuando el cilindro tiene eje y; o poner y entre -2 y 2 para todo r, sin ver que la esfera recorta los extremos.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$z = x^2 \wedge x \ge 0 \wedge z \le 9 \wedge -1 \le y \le 1$.
Calcule la integral del campo escalar $h(x, y, z) = xy^2$ sobre Σ.

Respuesta: $\iint_\Sigma h \, dS = \frac{37\sqrt{37} - 1}{18} \approx 12{,}45$.

Planteo: $z = x^2$ es un cilindro parabólico (la parábola del plano xz trasladada paralela al eje y). $\iint_\Sigma h \, dS = \iint_D h(\vec{X}(x, y)) \, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| \, dx \, dy$.

Parametrización: $X(x, y) = (x, y, x^2)$.

Dominio D: $z \le 9$ es $x^2 \le 9$ y con $x \ge 0$ queda $0 \le x \le 3$; además $-1 \le y \le 1$. $D = [0, 3] \times [-1, 1]$.

Vector normal: $\vec{X}_x = (1, 0, 2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 0)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (-2x, 0, 1)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| = \sqrt{(1 + 4x^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Integrando: $h(\vec{X}(x, y)) = xy^2$, así que la integral es $\int_0^3 \int_{-1}^1 xy^2 \sqrt{(1 + 4x^2)} \, dy \, dx$, y como D es un rectángulo y el integrando es producto de una función de x por una de y, se separa.

Cuenta: integral en y: primitiva $\frac{y^3}{3}$, entre -1 y 1 da $\frac{2}{3}$. Integral en x: $\int_0^3 x\sqrt{(1 + 4x^2)} \, dx$, con $w = 1 + 4x^2$, $dw = 8x \, dx$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Producto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$.

Resultado: $\iint_\Sigma h \, dS = \mathbf{\frac{37\sqrt{37} - 1}{18}} \approx 12{,}45$.

Control (otra parametrización): con (z, y): $\vec{X}(z, y) = (\sqrt{z}, y, z)$, $0 \le z \le 9$, $-1 \le y \le 1$, norma $\sqrt{(1 + \frac{1}{4z})}$ y $h = \sqrt{z}\, y^2$; integrado numéricamente da 12,4479 ✓.

Trampa: y^2 es par, así que la integral en y no se anula por simetría (da 2/3). Y el cilindro no se proyecta sobre el plano xz: los parámetros son x e y.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(x)y^2, yx + \varphi(x)y)$, con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, un campo que cumple simultáneamente las condiciones:

1. $\int_C \vec{f}.d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada suave a trozos C contenida en $\mathbb{R}^2$;
2. $\vec{f}(0, 1) = (1, 1)$.

Halle φ y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva Γ suave a trozos con punto inicial (0, 1) y punto final (0, 0).

> **Respuesta:** $\varphi(x) = (1 + e^{2x})/2$; $U = (y^2/4)(2x + e^{2x} + 1)$; circulación = $-1/2$.
>
> **Condición 1 ⇔ gradiente:** que la circulación sea 0 sobre toda curva cerrada suave a trozos equivale a que $\vec{f}$ sea campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ (independencia del camino). $\vec{f}$ es C^1 porque $\varphi \in C^1$, así que, si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.
>
> **La EDO:** $P = \varphi(x)y^2$, $Q = yx + \varphi(x)y$. $P'_y = 2\varphi(x)y$; $Q'_x = y + \varphi'(x)y$. Igualando: $y(\varphi' + 1 - 2\varphi) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, $\boldsymbol{\varphi' = 2\varphi - 1}$.
>
> **Dato:** $\vec{f}(0, 1) = (\varphi(0)\cdot 1, 0 + \varphi(0)\cdot 1) = (\varphi(0), \varphi(0)) = (1, 1) \Rightarrow \varphi(0) = 1$.
>
> **EDO lineal:** $\varphi' - 2\varphi = -1$. Con factor integrante e^{-2x}: $(\varphi\, e^{-2x})' = -e^{-2x} \Rightarrow \varphi\, e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{2} + K \Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2} + K\, e^{2x}$. Con $\varphi(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1 + e^{2x}}{2}}$.
>
> **Suficiencia:** con esa φ, $P'_y = Q'_x = y(1 + e^{2x})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (además lo confirma el potencial que sigue).
>
> **Potencial:** $U'_x = \frac{1 + e^{2x}}{2} y^2 \Rightarrow U = y^2(\frac{x}{2} + \frac{e^{2x}}{4}) + h(y)$. Derivando en y: $y(x + \frac{e^{2x}}{2}) + h'(y)$, que tiene que ser $Q = xy + \frac{y}{2} + \frac{y\, e^{2x}}{2} \Rightarrow h'(y) = \frac{y}{2}$, $h = \frac{y^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{y^2}{4}(2x + e^{2x} + 1) + K$.
>
> **Circulación:** como $\vec{f} = \nabla U$ en $\mathbb{R}^2$, la circulación sobre cualquier Γ suave a trozos de (0, 1) a (0, 0) depende sólo de los extremos: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(0, 0) - U(0, 1) = 0 - \frac{1}{4}(0 + 1 + 1) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$.
>
> **Trampa:** no se conoce Γ y no hace falta: ese es el punto de que el campo sea de gradientes. El orden es U(final) − U(inicial); al revés da +1/2. Y ojo con P'_y: φ(x) no depende de y, pero y^2 sí (sale 2φy).

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie abierta definida por las condiciones

$z - x^2 - y^2 = 0$, $z \le 4$

y sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ del cual se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f})(x, y, z) = 2z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y que $f_3(x, y, 4) = 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde f_3 es la tercera componente de $\vec{f}$.

Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$, siendo $\check{n}(x, y, z)$ el versor normal a Σ en (x, y, z) que apunta hacia el eje z.

> **Respuesta:** $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = -116\pi/3$ (con $\check{n}$ hacia el eje z).
>
> **Planteo:** Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \le 4$: **no es cerrada** (su borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 4$). No se conoce $\vec{f}$, sólo su divergencia y su tercera componente en $z = 4$: no hay forma de hacer el flujo directo, así que la cierro con la tapa T: $z = 4$, $x^2 + y^2 \le 4$, y uso Gauss en el sólido M: $x^2 + y^2 \le z \le 4$.
>
> **Orientación:** en Σ, la normal que apunta hacia el eje z tiene la dirección de $(-2x, -2y, 1)$: su parte horizontal $(-2x, -2y)$ apunta al eje (en el vértice es (0, 0, 1)). Esa normal **entra** a M (M es lo de adentro del cuenco). La exterior de M es la opuesta, con la dirección de $(2x, 2y, -1)$, y en la tapa la exterior es (0, 0, 1).
>
> **Hipótesis de Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato); $\partial M = \Sigma \cup T$ es cerrada y suave a trozos. Con normal exterior: $\iint_{\Sigma,\,ext} + \iint_T = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$, con $\nabla\cdot\vec{f} = 2z$.

Triple: en cilíndricas, $0 \le r \le 2$, $r^2 \le z \le 4$: $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 2z \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$. En z, primitiva z^2: $16 - r^4$. En r: $\int_0^2 (16 - r^4)\, r \, dr = [8r^2 - \frac{r^6}{6}]_0^2 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$. En θ: $128\pi/3$.

Tapa: en T, $\check{n} = (0, 0, 1)$ y $\vec{f} \cdot \check{n} = f_3(x, y, 4) = 1$ (dato), así que $\iint_T$ = área = 4π.

Despeje: $\iint_{\Sigma,\, ext} = 128\pi/3 - 4\pi = 116\pi/3$.

Resultado: con ň hacia el eje z (la interior), $\boldsymbol{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = -116\pi/3}$.

Control: un campo que cumple los dos datos es $\vec{f} = (0, 0, z^2 - 15)$. Su flujo directo con $(-2x, -2y, 1)\, dA$ es $\iint ((x^2 + y^2)^2 - 15)\, dA = 2\pi\int_0^2 (r^4 - 15)\, r \, dr = 2\pi(\frac{64}{6} - 30) = -116\pi/3$ ✓.

Trampa: "hacia el eje z" es la normal interior del cuenco, no la exterior: si te olvidás de cambiar el signo, la respuesta sale con el signo opuesto. Y el dato de f_3 en $z = 4$ sirve sólo para la tapa: no lo uses sobre el paraboloide.

7/3/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen de la porción de la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio 2 que está contenida en el cilindro sólido definido por $y^2 + z^2 \leq 1$.

> **Respuesta:** $V = 32\pi/3 - 4\sqrt{3}\,\pi = (4\pi/3)(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74$.
>
> **Planteo:** el sólido es $B \cap C$, con B: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ (bola de radio 2) y C: $y^2 + z^2 \leq 1$, un cilindro circular macizo de radio 1 **cuyo eje es el eje x** (la variable que falta en la ecuación es la del eje). $V = \iiint_{B\cap C} dV$.
> **Cómo es:** el cilindro atraviesa la bola a lo largo del eje x. La superficie cilíndrica corta a la esfera donde $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o sea $x^2 = 3$: dos circunferencias de radio 1 en los planos $x = \pm\sqrt{3}$. Para $|x| \leq \sqrt{3}$ el sólido es un tramo de cilindro; para $\sqrt{3} \leq |x| \leq 2$ son dos casquetes esféricos (ahí las tapas las pone la esfera). Es simétrico respecto del plano $x = 0$.
> **Coordenadas:** cilíndricas con eje x: $y = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, $x = x$. Es el cambio cilíndrico de siempre con los papeles de las variables cambiados, así que $|\text{jacobiano}| = r$. Rangos: $y^2 + z^2 = r^2 \leq 1$ da $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; la bola da $r^2 + x^2 \leq 4$, o sea $-\sqrt{(4 - r^2)} \leq x \leq \sqrt{(4 - r^2)}$ (con $r \leq 1$ esa raíz vale al menos $\sqrt{3}$, siempre hay segmento).
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{(4-r^2)}}^{\sqrt{(4-r^2)}} r\,dx\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{(4 - r^2)}\,dr$. Primitiva de $2r\sqrt{(4 - r^2)}$: $-\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2}$, entre 0 y 1: $-\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 8) = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$. Entonces $V = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.
> **Resultado:** $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74}$. Control de tamaño: el cilindro de radio 1 y largo 4 tiene $4\pi \approx 12{,}57$, y la bola le recorta las puntas: da un poco menos, razonable.
> **Control por rebanadas:** cortando con planos $x = c$, la sección es el disco $y^2 + z^2 \leq \text{mín}(1, 4 - c^2)$: área π si $|c| \leq \sqrt{3}$, y $\pi(4 - c^2)$ si $\sqrt{3} \leq |c| \leq 2$. $V = 2[\int_0^{\sqrt{3}} \pi\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \pi(4 - x^2)\,dx] = 2\pi[\sqrt{3} + (8 - \frac{8}{3}) - (4\sqrt{3} - \sqrt{3})] = 2\pi(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}) = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi$ ✓.
> **Trampa:** usar cilíndricas de eje z ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$) cuando el cilindro tiene eje x; o poner x entre -2 y 2 para todo r, sin ver que la esfera recorta los extremos.

Ejercicio 2. Sea $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ tal que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuaciones
$4x^2 + y^2 - 2y = 3 \wedge 2z - x = 2$
sabiendo que $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x - 2z, -y, 0)$. Indique claramente en un gráfico la orientación de C que eligió para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con C antihoraria vista desde arriba (normal $(-1/2, 0, 1)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.
>
> **Planteo:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$.
>
> **La curva:** $4x^2 + y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow 4x^2 + (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$: cilindro elíptico de centro $(0, 1)$, semiejes 1 (en x) y 2 (en y). El plano es $2z - x = 2$, o sea $z = 1 + x/2$. C es una elipse cerrada: $\vec{X}(t) = (\cos t, 1 + 2\operatorname{sen} t, 1 + \frac{\cos t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$.

Parte de gradiente: $\phi \in C^2$ y C cerrada: $\oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \mathbf{0}$.
Superficie elegida: Σ: $z = 1 + x/2$ con $(x, y) \in D = \{4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$, el trozo de plano encerrado por C (cualquier superficie regular con borde C sirve; ésta tiene normal constante). Área de $D = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$.
Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un trozo de plano regular y orientable, C es cerrada, simple y suave.
Orientación elegida (el gráfico): la elipse sobre el plano inclinado, más alta del lado $x > 0$ (pasa por (1, 1, 3/2)) y más baja del lado $x < 0$ (pasa por (–1, 1, 1/2)), con flechas en sentido antihorario mirando desde arriba: de (1, 1, 3/2) a (0, 3, 1), a (–1, 1, 1/2), a (0, –1, 1). Regla de la mano derecha: los dedos siguen ese giro, el pulgar queda hacia z positivo, así que $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-1/2, 0, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo del rotor: sobre Σ, $x - 2z = x - 2 - x = -2$, así que $\nabla \times \vec{g} = (-2, -y, 0)$ y $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = (-2)(-1/2) + 0 + 0 = 1$. $\iint_\Sigma (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_D 1\, dx\, dy = \text{área}(D) = \mathbf{2\pi}$ (con $x = r\cos\theta$, $y = 1 + 2r\,\text{sen}\,\theta$, jacobiano 2r: $\int_0^{2\pi} [r^2]_0^1\, d\theta = 2\pi$).
Resultado: con C antihoraria vista desde arriba, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{2\pi}$ (-2π en el otro sentido).
Trampa: la primera componente del rotor tiene z: reemplazá $z = 1 + x/2$ antes de integrar. Y fijate que el área de la elipse es $\pi \cdot a \cdot b$ con los semiejes (1 y 2), no con los cuadrados (1 y 4).

Ejercicio 3. Sea $\vec{f}(x, y) = (yx + \varphi(y)x, \varphi(y)x^2)$, con $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, un campo que cumple simultáneamente las condiciones:
1. $\int_C \vec{f}.d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada suave a trozos C contenida en $\mathbb{R}^2$;
2. $f(1, 0) = (1, 1)$.
Halle φ y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva Γ suave a trozos con punto inicial (1, 0) y punto final (0, 0).

Respuesta: $\varphi(y) = (1 + e^{2y})/2$; $U = (x^2/4)(2y + e^{2y} + 1)$; circulación $= -1/2$.

Condición 1 ⇔ gradiente: que la circulación sea 0 sobre toda curva cerrada suave a trozos equivale a que $\vec{f}$ sea campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ (independencia del camino). $\vec{f}$ es C^1 porque $\varphi \in C^1$, así que, si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.
La EDO: $P = yx + \varphi(y)x$, $Q = \varphi(y)x^2$. $P'_y = x + \varphi'(y)x$; $Q'_x = 2\varphi(y)x$. Igualando: $x(1 + \varphi' - 2\varphi) = 0$ para todo (x, y); con $x = 1$, $\boldsymbol{\varphi' = 2\varphi - 1}$.
Dato: $\vec{f}(1, 0) = (0 + \varphi(0)\cdot 1, \varphi(0)\cdot 1) = (\varphi(0), \varphi(0)) = (1, 1) \Rightarrow \varphi(0) = 1$.
EDO lineal: $\varphi' - 2\varphi = -1$. Con factor integrante e^{-2y}: $(\varphi\, e^{-2y})' = -e^{-2y} \Rightarrow \varphi\, e^{-2y} = \frac{e^{-2y}}{2} + K \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2} + K\, e^{2y}$. Con $\varphi(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda $\boldsymbol{\varphi(y) = \frac{1 + e^{2y}}{2}}$.
Suficiencia: con esa φ, $P'_y = Q'_x = x(1 + e^{2y})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (lo confirma el potencial que sigue).
Potencial: conviene empezar por Q: $U'_y = \frac{1 + e^{2y}}{2}x^2 \Rightarrow U = x^2(\frac{y}{2} + \frac{e^{2y}}{4}) + h(x)$. Derivando en x: $x(y + \frac{e^{2y}}{2}) + h'(x)$, que tiene que ser $P = xy + \frac{x}{2} + \frac{x\, e^{2y}}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{x}{2}$, $h = \frac{x^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{x^2}{4}(2y + e^{2y} + 1) + K$.
Circulación: como $\vec{f} = \nabla U$ en $\mathbb{R}^2$, la circulación sobre cualquier Γ suave a trozos de (1, 0) a (0, 0) depende sólo de los extremos: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(0, 0) - U(1, 0) = 0 - \frac{1}{4}(0 + 1 + 1) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$.
Trampa: no se conoce Γ y no hace falta: ese es el punto de que el campo sea de gradientes. El orden es U(final) – U(inicial); al revés da +1/2.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie abierta definida por las condiciones

$z - x^2 - y^2 = 0,\ z \le 9$

y sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ del cual se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f})(x, y, z) = 3z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y que $f_3(x, y, 9) = 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde f_3 es la tercera componente de $\vec{f}$.

Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$, siendo $\check{n}(x, y, z)$ el versor normal a Σ en (x, y, z) que apunta hacia el eje z.

> **Respuesta:** $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = -720\pi$ (con $\check{n}$ hacia el eje z).
>
> **Planteo:** Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \le 9$: **no es cerrada** (su borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en $z = 9$). No se conoce $\vec{f}$, sólo su divergencia y su tercera componente en $z = 9$: no hay forma de hacer el flujo directo, así que la cierro con la tapa T: $z = 9$, $x^2 + y^2 \le 9$, y uso Gauss en el sólido M: $x^2 + y^2 \le z \le 9$.
>
> **Orientación:** en Σ, la normal que apunta hacia el eje z tiene la dirección de $(-2x, -2y, 1)$: su parte horizontal $(-2x, -2y)$ apunta al eje (en el vértice es $(0, 0, 1)$). Esa normal **entra** a M (M es lo de adentro del cuenco). La exterior de M es la opuesta, con la dirección de $(2x, 2y, -1)$, y en la tapa la exterior es $(0, 0, 1)$.
>
> **Hipótesis de Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato); $\partial M = \Sigma \cup T$ es cerrada y suave a trozos. Con normal exterior: $\iint_{\Sigma,\,ext} + \iint_T = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$, con $\nabla\cdot\vec{f} = 3z$.
>
> **Triple:** en cilíndricas, $0 \le r \le 3$, $r^2 \le z \le 9$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2}^9 3z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z, primitiva $\frac{3}{2}z^2$: $\frac{3}{2}(81 - r^4)$. En r: $\frac{3}{2}\int_0^3 (81 - r^4)\, r\, dr = \frac{3}{2}\left[\frac{81r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right]_0^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{729}{2} - \frac{729}{6}\right) = \frac{729}{2}$. En θ: 729π.
>
> **Tapa:** en T, $\check{n} = (0, 0, 1)$ y $\vec{f} \cdot \check{n} = f_3(x, y, 9) = 1$ (dato), así que $\iint_T$ = área $= 9\pi$.
>
> **Despeje:** $\iint_{\Sigma,\,ext} = 729\pi - 9\pi = 720\pi$.
>
> **Resultado:** con $\check{n}$ hacia el eje z (la interior), $\boldsymbol{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = -720\pi}$.
>
> **Control:** un campo que cumple los dos datos es $\vec{f} = \left(0, 0, \frac{3}{2}z^2 - \frac{241}{2}\right)$. Su flujo directo con $(-2x, -2y, 1)\, dA$ es $2\pi\int_0^3 \left(\frac{3}{2}r^4 - \frac{241}{2}\right) r\, dr = 2\pi\left(\frac{729}{4} - \frac{2169}{4}\right) = -720\pi$ ✓.
>
> **Trampa:** "hacia el eje z" es la normal interior del cuenco, no la exterior: si te olvidás de cambiar el signo, la respuesta sale con el signo opuesto. Y el dato de f_3 en $z = 9$ sirve sólo para la tapa: no lo uses sobre el paraboloide.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie definida por

$z = y^2 \wedge y \ge 0 \wedge z \le 9 \wedge -1 \le x \le 1.$

Calcule la integral del campo escalar $h(x, y, z) = x^2y$ sobre Σ.

> **Respuesta:** $\iint_\Sigma h\, dS = \dfrac{37\sqrt{37} - 1}{18} \approx 12{,}45$.
>
> **Planteo:** $z = y^2$ es un cilindro parabólico (la parábola del plano yz trasladada paralela al eje x). $\iint_\Sigma h\, dS = \iint_D h(\vec{X}(x, y))\, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\|\, dx\, dy$.
>
> **Parametrización:** $X(x, y) = (x, y, y^2)$.
>
> **Dominio D:** $z \le 9$ es $y^2 \le 9$ y con $y \ge 0$ queda $0 \le y \le 3$; además $-1 \le x \le 1$. $D = [-1, 1] \times [0, 3]$.
>
> **Vector normal:** $\vec{X}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 2y)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (0, -2y, 1)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| = \sqrt{(1 + 4y^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.
>
> **Integrando:** $h(\vec{X}(x, y)) = x^2y$, así que la integral es $\int_0^3 \int_{-1}^1 x^2y\, \sqrt{(1 + 4y^2)}\, dx\, dy$, que se separa porque D es un rectángulo.

Cuenta: integral en x: primitiva $\frac{x^3}{3}$, entre -1 y 1 da $\frac{2}{3}$. Integral en y: $\int_0^3 y\sqrt{(1+4y^2)}\,dy$, con $w = 1 + 4y^2$, $dw = 8y\,dy$, primitiva $\frac{1}{12}(1+4y^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37\sqrt{37}-1}{12}$. Producto: $\frac{2}{3}\cdot\frac{37\sqrt{37}-1}{12}$.

Resultado: $\iint_\Sigma h\,dS = \mathbf{\frac{37\sqrt{37}-1}{18}} \approx 12{,}45$ (es el mismo ejercicio que el tema 1 con los papeles de x e y intercambiados).

Control (otra parametrización): con (x, z): $\vec{X}(x, z) = (x, \sqrt{z}, z)$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le z \le 9$, norma $\sqrt{(1+\frac{1}{4z})}$ y $h = x^2\sqrt{z}$; integrado numéricamente da 12,4479 ✓.

Trampa: x^2 es par, así que la integral en x no se anula por simetría (da 2/3). Y el cilindro no se proyecta sobre el plano yz: los parámetros son x e y.

28/2/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea Σ la porción del cilindro parabólico de ecuación $y + x^2 = 3$ cuyos puntos (x, y, z) satisfacen las condiciones

$$0 \le x \le \frac{y}{2} \wedge 0 \le z \le y.$$

Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, 2y, z)$ a través de Σ orientada de modo que las normales tengan segunda componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = 16$ (con $\vec{N} = (2x, 1, 0)$).
>
> **Planteo:** $y + x^2 = 3$ es el cilindro parabólico $y = 3 - x^2$ (generatrices paralelas al eje z). Sobre Σ la condición $x \le y/2$ es $2x \le 3 - x^2$, o sea $x^2 + 2x - 3 \le 0$, $(x + 3)(x - 1) \le 0$, $x \in [-3, 1]$. Con $x \ge 0$ queda **$0 \le x \le 1$**, y ahí $y = 3 - x^2 \in [2, 3] > 0$, así que $0 \le z \le y$ tiene sentido.
> **Parametrización:** $\vec{X}(x, z) = (x, 3 - x^2, z)$, con $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le z \le 3 - x^2\}$.
> **Normal:** $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$.
> **Orientación:** esa tiene segunda componente $-1 < 0$, es la opuesta a la pedida. **Cambio el orden**: $\vec{N} = \vec{X}_z \times \vec{X}_x = (2x, 1, 0)$, segunda componente $1 > 0$ ✓.
> **Producto escalar:** $\vec{f}(\vec{X}) = (x, 2(3 - x^2), z)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 6 - 2x^2 = 6$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^1 \int_0^{3 - x^2} 6 \, dz \, dx = 6 \int_0^1 (3 - x^2) \, dx = 6 \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$.
> **Resultado:** $\Phi = \mathbf{16}$.
> **Control con Gauss:** $\operatorname{div} \vec{f} = 4$. El sólido es $W = \{x \ge 0, 2x \le y \le 3 - x^2, 0 \le z \le y\}$ y Σ es su cara exterior con normal $(2x, 1, 0)$ (saliente). $\iiint 4 \, dV = 4 \int_0^1 \int_{2x}^{3 - x^2} y \, dy \, dx = \frac{176}{15}$. Caras: $z = 0$ y $x = 0$ dan 0 ($\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = -z$, $\vec{f} \cdot (-\vec{i}) = -x$); $z = y$ con normal saliente $(0, -1, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2y + y = -y$, da $-\frac{44}{15}$; $y = 2x$ con normal saliente $(2, -1, 0)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x - 4x = -2x$, $\int_0^1 \int_0^{2x} -2x \, dz \, dx = -\frac{4}{3}$. $\Phi = \frac{176}{15} + \frac{44}{15} + \frac{20}{15} = 16$ ✓.
> **Trampa:** la condición $x \le y/2$ hay que leerla sobre Σ (reemplazando $y = 3 - x^2$); ahí sale el tope $x = 1$.

Ejercicio 2. Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2 + 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (e^{x^2}, x + \varphi(y), y + \varphi(z))$ a lo largo de C orientada según la parametrización dada, sabiendo que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \pi$ (con la orientación de la parametrización, antihoraria vista desde arriba).
>
> **Planteo:** C es cerrada ($\vec{X}(0) = \vec{X}(2\pi)$) y φ es desconocida: teorema del rotor.
> **Dónde vive C:** $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 2 + 2 \operatorname{sen} t = 2 + 2y$. C está en el plano **$z = 2 + 2y$** y se proyecta en $x^2 + y^2 = 1$.
> **Superficie elegida:** $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 2 + 2y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$, el pedazo de plano que C encierra. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, 2) = (0, -2, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\varphi \in C^1 \Rightarrow \vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido de C:** la proyección $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ gira antihoraria: C es **antihoraria vista desde arriba**.
> **Orientación compatible:** regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde

arriba ⇒ n hacia arriba, n ∥ (0, −2, 1).
Rotor: P = e^{x^2}, Q = x + φ(y), R = y + φ(z): rot $\vec{f}$ = ($\partial_y R - \partial_z Q$, $\partial_z P - \partial_x R$, $\partial_x Q - \partial_y P$) = (1 − 0, 0 − 0, 1 − 0) = (1, 0, 1).
Flujo del rotor: $\iint_D$ (1, 0, 1) · (0, −2, 1) dxdy = $\iint_D$ 1 dxdy = π.
Resultado: $\oint_C \vec{f} \cdot ds$ = **π**.
Control (circulación directa): e^{x^2}dx, φ(y)dy y φ(z)dz son exactas; queda $\oint$ x dy + y dz = $\int_0^{2\pi}$ [cos t · cos t + sen t · 2 cos t] dt = π + 0 = π ✓.
Trampa: e^{x^2} asusta pero sólo depende de x: no tiene rotor ni circula en una curva cerrada.

Ejercicio 3. Sea Γ la porción de la linea del campo $\vec{f}(x, y)$ = (4y, −x) contenida en el semiplano y ≥ 0 que pasa por el punto A = (0, 1). Calcule la circulación de $\vec{g}(x, y)$ = ($5x^4 + 2xy$, $3y^2 + x^2$) a lo largo de Γ recorrida de modo tal que el versor tangente a la curva en A correspondiente a esa orientación tenga primera componente positiva.

Respuesta: Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$, y ≥ 0, recorrida de (−2, 0) a (2, 0) pasando por (0, 1). Con φ = $x^5 + x^2y + y^3$, la circulación es φ(2, 0) − φ(−2, 0) = 32 − (−32) = 64.

Línea de campo: es una curva cuyo vector tangente es paralelo a $\vec{f}$ en cada punto: x′ = 4y, y′ = −x (en forma de EDO, dy/dx = −x/(4y), separable: 4y dy = −x dx). Multiplicando la primera por x y la segunda por 4y y sumando: xx′ + 4yy′ = 4xy − 4xy = 0, o sea $(x^2 + 4y^2)' = 0$ ⇒ **$x^2 + 4y^2 = C$** (las líneas son elipses). Por A = (0, 1): C = 4.
El arco: Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$ con y ≥ 0, la media elipse de extremos (−2, 0) y (2, 0). Parametrización: $\vec{X}(t)$ = (−2cos t, sen t), t ∈ [0, π].
Orientación: en A = (0, 1) (t = π/2) el tangente es $\vec{X}'(\pi/2) = (2\text{sen } t, \cos t)|_{\pi/2}$ = (2, 0), de primera componente positiva: es la pedida, y va de (−2, 0) a (2, 0) por arriba. (Coincide con el sentido del campo: $\vec{f}$(A) = (4, 0).)
¿Es de gradientes? $\vec{g}$ = ($5x^4 + 2xy$, $3y^2 + x^2$) es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 2x = P'_y$.
Potencial: $\varphi'_x = 5x^4 + 2xy \Rightarrow \varphi = x^5 + x^2y + h(y)$; $\varphi'_y = x^2 + h' = 3y^2 + x^2 \Rightarrow h = y^3$. **$\varphi = x^5 + x^2y + y^3$**.
Circulación: φ(2, 0) − φ(−2, 0) = 32 − (−32) = **64**.
Trampa: $(-2)^5 = -32$, así que no se cancela: da 64, no 0. Y la orientación la fija el tangente en A, no "antihorario por costumbre" (antihorario daría −64).

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z)$ = ($ax^3 + y$, $ay^3 + x$, −z). Hallar el valor de a ∈ $\mathbb{R}$ para que el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera del cuerpo
H = {(x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$: $\sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 1$}
sea −2π/3, si ∂H se orienta de modo que las normales apunten hacia afuera de H.

Respuesta: a = −10/9.

Planteo: H = {$\sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 1$} es el cono macizo con vértice en el origen, altura 1 y tapa el disco $x^2 + y^2 \le 1$ en z = 1. ∂H es cerrada: Gauss.
Hipótesis: $\vec{f}$ = ($ax^3 + y$, $ay^3 + x$, −z) es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$ para todo a; H es acotado y ∂H (cono + tapa) es suave a trozos; normal exterior, como pide el enunciado.
Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = 3ax^2 + 3ay^2 - 1 = 3ar^2 - 1$.
Triple (cilíndricas, r ≤ z ≤ 1, 0 ≤ r ≤ 1): $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 (3ar^2 - 1)\, r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 (3ar^3 - r)(1 - r)\, dr = 2\pi \int_0^1 (3ar^3 - 3ar^4 - r + r^2)\, dr = 2\pi\, [3ar^4/4 - 3ar^5/5 - r^2/2 + r^3/3]_0^1 = 2\pi\, (3a/20 - 1/6) = 3a\pi/10 - \pi/3$.
Ecuación: 3aπ/10 − π/3 = −2π/3 ⇔ 3aπ/10 = −π/3 ⇔ **a = −10/9**.
Control directo: con a = −10/9, tapa z = 1 con normal (0, 0, 1): $\vec{f} \cdot k$ = −1, flujo −π; cono con normal

saliente (hacia abajo y afuera): $\pi/3$; total $-2\pi/3$ ✓.
Trampa: no te olvides del jacobiano r (el integrando es $(3ar^2 - 1)\,r$) ni de que z va de r a 1, no de 0 a 1.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la curva de ecuación $\vec{X} = (t, 1 - t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, contenida en el primer octante. Calcular la masa de un alambre con la forma de C suponiendo que la densidad de masa lineal en cada punto P es proporcional a la distancia de P al plano yz.

Respuesta: C: $t \in [0, 1]$. $M = 13k/12$, con $\delta = k|x|$ ($k > 0$ la constante de proporcionalidad).

Planteo: la masa de un alambre es $M = \int_C \delta\, ds = \int \delta(\vec{X}(t))\, \|\vec{X}'(t)\|\, dt$, con $\vec{X}$ una parametrización regular de C.
Parametrización y tramo: la curva ya viene dada: $\vec{X}(t) = (t, 1 - t^2, t^2)$. El primer octante es $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: $x = t \geq 0$; $y = 1 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$; $z = t^2 \geq 0$ vale siempre. La intersección es $t \in [0, 1]$, y C va de $(0, 1, 0)$ a $(1, 0, 1)$.
Densidad: la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano yz ($x = 0$) es $|x|$. Entonces $\delta(x, y, z) = k|x|$, con $k > 0$ la constante de proporcionalidad. Sobre C, $x = t \geq 0$, así que $\delta(\vec{X}(t)) = kt$.
Rapidez: $\vec{X}'(t) = (1, -2t, 2t)$, $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(1 + 4t^2 + 4t^2)} = \sqrt{(1 + 8t^2)}$. $\vec{X}$ es C^1, inyectiva ($x = t$) y $\vec{X}'$ nunca se anula (su primera componente es 1): es una parametrización regular de C.
Cuenta: $M = \int_0^1 kt\,\sqrt{(1 + 8t^2)}\, dt$. Con $u = 1 + 8t^2$, $du = 16t\, dt$, la primitiva es $\frac{k}{24}(1 + 8t^2)^{3/2}$ (control: su derivada es $\frac{k}{24} \cdot \frac{3}{2}(1 + 8t^2)^{1/2} \cdot 16t = kt\sqrt{(1 + 8t^2)}$). Entre 0 y 1: $\frac{k}{24}(9^{3/2} - 1) = \frac{k}{24}(27 - 1) = \frac{26k}{24}$.
Resultado: $M = \mathbf{13k/12}$ (k la constante de proporcionalidad de la densidad).
Trampa: la distancia al plano yz es $|x|$ (la coordenada que falta en el nombre del plano). No confundas con la distancia al eje x, que es $\sqrt{(y^2 + z^2)}$. Y el tramo lo fijan juntas $x \geq 0$ e $y \geq 0$: si integrás en $t \in [-1, 1]$ sumás un pedazo que no está en el primer octante.

14/2/23, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D la región compacta de $\mathbb{R}^2$ limitada por el arco de curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (\cos^3(t), \text{sen}^2(t))$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
y los segmentos de extremos (0, 0), (0, 1) y (0, 0), (1, 0).
Calcule $\iint_D x\,dxdy$ mediante la circulación a lo largo de ∂D de un campo $\vec{f}$ adecuado.

> **Respuesta:** $\iint_D x\,dxdy$ = **1/8**.
>
> **La región:** $x = \cos^3 t$, $y = \text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - x^{2/3}$, con x de 1 a 0 cuando t va de 0 a π/2. El arco une (1, 0) con (0, 1) y $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^{2/3}\}$: compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos (arco más dos segmentos de los ejes).
>
> **Campo adecuado:** quiero $Q'_x - P'_y = x$. Tomo $\vec{f} = (0, \frac{x^2}{2})$, C^1 en $\mathbb{R}^2$: $Q'_x = x$, $P'_y = 0$. Por Green, $\iint_D x\,dA = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
> **Orientación positiva:** de (0, 0) a (1, 0) por el eje x, de (1, 0) a (0, 1) por el arco (t de 0 a π/2, que ya es el sentido antihorario) y de (0, 1) a (0, 0) por el eje y.
> **Segmentos:** sobre el eje x, dy = 0: $\int Q\,dy = 0$. Sobre el eje y, x = 0 y Q = 0: aporta 0.
> **Arco:** $\vec{X}' = (-3\cos^2 t \,\text{sen}\, t, 2\,\text{sen}\, t \cos t)$. $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^6 t}{2} \cdot 2\,\text{sen}\, t \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^7 t\,\text{sen}\, t\,dt$
> $= [-\frac{\cos^8 t}{8}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$.
>
> **Resultado:** $\iint_D x\,dxdy$ = **1/8**. Control directo: $\int_0^1 x(1 - x^{2/3})\,dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^{8/3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ ✓.
>
> **Trampa:** elegí el campo para que los segmentos de los ejes se anulen solos. Con $\vec{f} = (-y^2/2, 0)$, por ejemplo, el rotor sería y y no x: el campo se ajusta a la función que se integra.

Ejercicio 2. Sea C la curva cerrada dada por las ecuaciones
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - z = 0 \wedge 2x + 4y + z = 4$.
Calcule la circulación del campo
$\vec{f}(x, y, z) = (y + \varphi(x + 3y), z + \varphi(x + 3y), x + \varphi(x + 3y))$
a lo largo de C recorrida de modo tal que el vector tangente a C en P = (2, 0, 0) tenga segunda componente positiva. Suponga que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -28\pi$ (C antihoraria vista desde arriba, como pide el enunciado).
>
> **Planteo:** φ es desconocida, así que no se puede parametrizar e integrar a ciegas. Teorema del rotor con la superficie que haga desaparecer a φ.
> **La curva:** del plano, $z = 4 - 2x - 4y$. En la primera ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - (4 - 2x - 4y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. C se proyecta en la circunferencia de radio 2 centrada en el origen y está toda en el plano $2x + 4y + z = 4$.
> **Superficie elegida:** $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 4 - 2x - 4y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, -4) = (2, 4, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\varphi \in C^1 \Rightarrow \vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido de C:** P = (2, 0, 0) se proyecta en (2, 0), el punto de más a la derecha de $x^2 + y^2 = 4$. Con $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\, t$, $z = 4 - 4\cos t - 8\,\text{sen}\, t$, en t = 0 el tangente es (0, 2, −8): segunda componente

positiva, como se pide. Así que C es **antihoraria vista desde arriba**.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow$ $\vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (2, 4, 1)$.
Rotor: $P = y + \varphi(u)$, $Q = z + \varphi(u)$, $R = x + \varphi(u)$, con $u = x + 3y$ ($\partial_x u = 1$, $\partial_y u = 3$, $\partial_z u = 0$): $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (3\varphi'(u) - 1, 0 - (1 + \varphi'(u)), \varphi'(u) - (1 + 3\varphi'(u))) = (3\varphi' - 1, -1 - \varphi', -1 - 2\varphi')$.
Rotor por la normal: $(3\varphi' - 1)\cdot 2 + (-1 - \varphi')\cdot 4 + (-1 - 2\varphi')\cdot 1 = (6 - 4 - 2)\varphi' - 2 - 4 - 1 = \mathbf{-7}$. Los φ' se cancelan justo por haber elegido este plano: $(2, 4, 1) = (1, 3, 0) + (1, 1, 1)$, y la parte de φ en el rotor es $\varphi' \cdot (1, 3, 0) \times (1, 1, 1)$, perpendicular a esos dos vectores.
Flujo del rotor: $\iint_D -7 \, dxdy = -7 \cdot \text{Área}(D) = -7 \cdot 4\pi = -28\pi$.
Resultado: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-28\pi}$.
Control (circulación directa): sobre C, $dz = -2dx - 4dy$, así que $dx + dy + dz = -(dx + 3dy) = -du$ y la parte $\varphi(u)(dx + dy + dz) = -\varphi(u)\, du$ es exacta (da 0). Queda $\oint y\, dx + z\, dy + x\, dz = \oint (y - 2x)\, dx + (4 - 6x - 4y)\, dy$, y por Green en D: $\iint_D (-6 - 1)\, dxdy = -28\pi$ ✓.
Trampa: tomar como superficie el paraboloide (la otra ecuación): el teorema vale igual, pero los φ' no se cancelan punto a punto y la cuenta se traba. El plano es la elección que la cátedra busca.

Ejercicio 3. Sea D el cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el plano de ecuación $z - y = 2$ e inferiormente por la superficie de ecuación $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - xz, z^2 - 3yz, x^2 - z^2)$ a través de ∂D orientada de modo que las normales apunten hacia al interior de D.

Respuesta: $\Phi = 96\pi$ con normales hacia el interior de D (el flujo saliente es -96π).

Planteo: $D = \{(x, y, z): \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \le z \le y + 2\}$. ∂D es cerrada (un pedazo del plano arriba, el cono elíptico abajo). Gauss da el flujo saliente; el pedido es con normales hacia el interior, o sea el opuesto.
Hipótesis: $\vec{f}$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; D es acotado (se ve en la proyección) y ∂D es suave a trozos (el vértice del cono es un punto aislado).
Divergencia: $\partial(y^2 - xz)/\partial x + \partial(z^2 - 3yz)/\partial y + \partial(x^2 - z^2)/\partial z = -z - 3z - 2z = -6z$.
Proyección: hace falta $\sqrt{(x^2 + 2y^2)} \le y + 2$. Elevando al cuadrado: $x^2 + 2y^2 \le y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \le 8$, disco K de centro $(0, 2)$ y radio $2\sqrt{2}$. En K es $y \ge 2 - 2\sqrt{2} > -2$, así que $y + 2 > 0$ y elevar fue legítimo.
Triple: $\iiint_D z\, dV = \iint_K [z^2/2]_{\sqrt{(x^2 + 2y^2)}}^{y + 2}\, dA = \tfrac{1}{2} \iint_K ((y + 2)^2 - x^2 - 2y^2)\, dA = \tfrac{1}{2} \iint_K (8 - x^2 - (y - 2)^2)\, dA$. Con $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta$ (jacobiano r): $\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \pi\, [4r^2 - r^4/4]_0^{2\sqrt{2}} = \pi\,(32 - 16) = 16\pi$.
Flujo saliente: $\iiint_D -6z\, dV = -6 \cdot 16\pi = -96\pi$.
Resultado: con normales hacia el interior de D, $\Phi = \mathbf{96\pi}$.
Trampa: $(y + 2)^2 - (x^2 + 2y^2)$ es exactamente $8 - x^2 - (y - 2)^2$: usá polares **corridas** al centro $(0, 2)$, no centradas en el origen. Y no te olvides del cambio de signo final por la normal entrante.

Ejercicio 4. Sea C la curva ortogonal a la familia de curvas $xy = k$, $k \in \mathbb{R}$, que pasa por el punto $(1, 0)$, y sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ limitada por la curva C y la recta $x = \sqrt{2}$.
Calcule la masa de la placa que ocupa la región D cuya densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje y.

Respuesta: C: $x^2 - y^2 = 1$ (rama derecha, $x = \sqrt{(1 + y^2)}$). $D = \{1 \le x \le \sqrt{2}, |y| \le \sqrt{(x^2 - 1)}\}$. $M = \dfrac{2k}{3}$.

EDO de la familia: derivando $xy = k$ respecto de x (con $y = y(x)$) queda $y + xy' = 0$, o sea $y' = -\frac{y}{x}$. Así se elimina la constante k.

EDO de las ortogonales: en cada punto la pendiente de la ortogonal es la opuesta de la inversa: $y' = -1 / (-\frac{y}{x}) = \frac{x}{y}$. Es de variables separables: $y\,dy = x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_0 \Rightarrow x^2 - y^2 = c$.

La que pasa por (1, 0): $1 - 0 = c$, $c = 1$. C: $\mathbf{x^2 - y^2 = 1}$. Es una hipérbola con dos ramas; la que pasa por $(1, 0)$ es la derecha, $x = \sqrt{(1 + y^2)}$ (vértice en $(1, 0)$, abierta hacia la derecha). En $(1, 0)$ la pendiente $\frac{x}{y}$ no está definida porque la tangente es vertical: si se plantea como $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ con $x(0) = 1$ sale lo mismo, $x = \sqrt{(1 + y^2)}$.

Control de ortogonalidad: las normales son $\nabla(xy) = (y, x)$ y $\nabla(x^2 - y^2) = (2x, -2y)$; su producto escalar es $2xy - 2xy = 0$, así que las curvas se cortan en ángulo recto ✓.

La región (dibujo): la recta $x = \sqrt{2}$ corta a C: $x = \sqrt{2}$ da $y^2 = 2 - 1 = 1$, $y = \pm 1$: puntos $(\sqrt{2}, 1)$ y $(\sqrt{2}, -1)$. D es el "casquete" de la rama derecha: lo que queda entre el vértice $(1, 0)$ y la cuerda vertical $x = \sqrt{2}$ que une $(\sqrt{2}, -1)$ con $(\sqrt{2}, 1)$. La rama izquierda no interviene ($x = \sqrt{2}$ no la corta y no encierra nada acotado con ella).

Densidad: La distancia al eje y es $|x| = x$ (en D, $x \geq 1$), $\delta = kx$.

Cuenta (primer orden): $D = \{1 \leq x \leq \sqrt{2},\ -\sqrt{(x^2 - 1)} \leq y \leq \sqrt{(x^2 - 1)}\}$. En y: $\int kx\,dy = kx \cdot 2\sqrt{(x^2 - 1)}$. En x: $M = k\int_1^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{(x^2 - 1)}\,dx$; con $u = x^2 - 1$, $du = 2x\,dx$, u de 0 a 1: $k\int_0^1 \sqrt{u}\,du = k[\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^1 = \frac{2k}{3}$.

Resultado: $M = \mathbf{\frac{2k}{3}}$.

Control en el otro orden: $D = \{-1 \leq y \leq 1,\ \sqrt{(1 + y^2)} \leq x \leq \sqrt{2}\}$: $\int kx\,dx = k[\frac{x^2}{2}]_{\sqrt{(1 + y^2)}}^{\sqrt{2}} = k\frac{1 - y^2}{2}$, y $\int_{-1}^{1} k\frac{1 - y^2}{2}\,dy = \frac{k}{2}[y - \frac{y^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{k}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2k}{3}$ ✓.

Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ en la EDO *sin* la constante k; si se deja k adentro no se obtiene una familia. Además la distancia al eje y es $|x|$ (no $|y|$).

Ejercicio 5. Sea Γ el arco de la curva de ecuación $\vec{X} = (t\cos(\pi t), t\,\mathrm{sen}(\pi t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, contenido en la bola de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (ye^{xy} + yz + 1, xe^{xy} + xz, xy)$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [-1, 1]$, de $A = (1, 0, -1)$ a $B = (-1, 0, 1)$. Con $U = e^{xy} + xyz + x$, la circulación es $U(B) - U(A) = 0 - 2 = -2$.

El arco: $\|\vec{X}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t) + t^2\mathrm{sen}^2(\pi t) + t^2 = 2t^2$. Estar en la bola de radio $\sqrt{2}$ es $2t^2 \leq 2$, o sea $-1 \leq t \leq 1$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi), -\mathrm{sen}(-\pi), -1) = (1, 0, -1)$ y $\vec{X}(1) = (\cos\pi, \mathrm{sen}\,\pi, 1) = (-1, 0, 1)$. Según la parametrización, Γ va de $A = (1, 0, -1)$ a $B = (-1, 0, 1)$. (Con la bola abierta, $t \in (-1, 1)$ y la integral es la misma.)

¿Es de gradientes? $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = x - x = 0$; $P'_z - R'_x = y - y = 0$; $Q'_x - P'_y = (e^{xy} + xye^{xy} + z) - (e^{xy} + xye^{xy} + z) = 0$. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.

Potencial: $U'_z = xy \Rightarrow U = xyz + h(x, y)$. $U'_x = yz + h'_x = ye^{xy} + yz + 1 \Rightarrow h = e^{xy} + x + k(y)$. $U'_y = xz + xe^{xy} + k'(y) = xe^{xy} + xz \Rightarrow k' = 0$. $\mathbf{U = e^{xy} + xyz + x}$.

Circulación: $U(B) = e^0 + 0 - 1 = 0$; $U(A) = e^0 + 0 + 1 = 2$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = U(B) - U(A) = \mathbf{-2}$.

> **Trampa:** el recorte por la bola da $|t| \leq 1$ (no hay que pensar en vueltas), y $X(-1)$ tiene $x = -\cos(-\pi) = +1$. Invertir los extremos cambia el signo.

14/2/23, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el plano de ecuación $z - x = 2$ e inferiormente por la superficie de ecuación $z = \sqrt{(2x^2 + y^2)}$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - xz, z^2 - 3yz, y^2 - z^2)$ a través de ∂D orientada de modo que las normales apunten hacia al interior de D.

> **Respuesta:** $\Phi = 96\pi$ con normales hacia el interior de D (el flujo saliente es -96π).
>
> **Planteo:** $D = \{(x, y, z): \sqrt{(2x^2 + y^2)} \le z \le x + 2\}$. ∂D es cerrada (un pedazo del plano arriba, el cono elíptico abajo). Gauss da el flujo saliente; el pedido es con normales hacia el interior, o sea el opuesto.
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; D es acotado (se ve en la proyección) y ∂D es suave a trozos (el vértice del cono es un punto aislado).
> **Divergencia:** $\partial(y^2 - xz)/\partial x + \partial(z^2 - 3yz)/\partial y + \partial(y^2 - z^2)/\partial z = -z - 3z - 2z = -6z$.
> **Proyección:** hace falta $\sqrt{(2x^2 + y^2)} \le x + 2$. Elevando al cuadrado: $2x^2 + y^2 \le x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 \le 8$, disco K de centro (2, 0) y radio $2\sqrt{2}$. En K es $x \ge 2 - 2\sqrt{2} > -2$, así que $x + 2 > 0$ y elevar fue legítimo.
> **Triple:** $\iiint_D z\, dV = \iint_K [z^2/2]_{\sqrt{(2x^2 + y^2)}}^{x + 2}\, dA = \tfrac{1}{2} \iint_K ((x + 2)^2 - 2x^2 - y^2)\, dA = \tfrac{1}{2} \iint_K (8 - (x - 2)^2 - y^2)\, dA$. Con $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (jacobiano r): $\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} (8 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \pi\, [4r^2 - r^4/4]_0^{2\sqrt{2}} = \pi\,(32 - 16) = 16\pi$.
> **Flujo saliente:** $\iiint_D -6z\, dV = -6 \cdot 16\pi = -96\pi$.
> **Resultado:** con normales hacia el interior de D, $\Phi =$ **96π**.
> **Trampa:** $(x + 2)^2 - (2x^2 + y^2)$ es exactamente $8 - (x - 2)^2 - y^2$: usá polares **corridas** al centro (2, 0), no centradas en el origen. Y no te olvides del cambio de signo final por la normal entrante.

Ejercicio 2. Sea D la región compacta de $\mathbb{R}^2$ limitada por el arco de curva de ecuación vectorial

$$\vec{X} = (\cos^2(t), \mathrm{sen}^3(t)),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

y los segmentos de extremos (0, 0), (0, 1) y (0, 0), (1, 0).
Calcule $\iint_D y\, dxdy$ mediante la circulación a lo largo de ∂D de un campo $\vec{f}$ adecuado.

> **Respuesta:** $\iint_D y\, dxdy =$ **1/8**.
>
> **La región:** $x = \cos^2 t = 1 - \mathrm{sen}^2 t = 1 - y^{2/3}$ e $y = \mathrm{sen}^3 t$, con y de 0 a 1 cuando t va de 0 a $\pi/2$. El arco une (1, 0) con (0, 1) y $D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1 - y^{2/3}\}$: compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos.
> **Campo adecuado:** quiero $Q'_x - P'_y = y$. Tomo $\vec{f} = \left(-\frac{y^2}{2}, 0\right)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$: $P'_y = -y$, $Q'_x = 0$. Por Green, $\iint_D y\, dA = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
> **Orientación positiva:** de (0, 0) a (1, 0) por el eje x, de (1, 0) a (0, 1) por el arco con t de 0 a $\pi/2$, y de (0, 1) a (0, 0) por el eje y.
> **Segmentos:** sobre el eje x, $y = 0$ y $P = 0$: aporta 0. Sobre el eje y, $dx = 0$: aporta 0.
> **Arco:** $\vec{X}' = (-2\cos t\,\mathrm{sen}\,t, 3\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)$. $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\mathrm{sen}^6 t}{2}\right)(-2\cos t\,\mathrm{sen}\,t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^7 t\cos t\, dt = \left[\frac{\mathrm{sen}^8 t}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$.
> **Resultado:** $\iint_D y\, dxdy =$ **1/8**. Control directo: $\int_0^1 y(1 - y^{2/3})\, dy = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ ✓.

> **Trampa:** el signo menos del campo: con $\vec{f} = (y^2/2, 0)$ el rotor da $-y$ y el resultado sale $-1/8$, negativo para una función positiva en D.

Ejercicio 3. Sea C la curva cerrada dada por las ecuaciones
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - z = 0 \wedge 4x + 2y + z = 4$.
Calcule la circulación del campo
$\vec{f}(x, y, z) = (z + \varphi(3x + y), x + \varphi(3x + y), y + \varphi(3x + y))$
a lo largo de C recorrida de modo tal que el vector tangente a C en P = (0, 2, 0) ten[ilegible] componente negativa. Suponga que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua.

> **Respuesta:** Leyendo "tenga primera componente negativa" (C antihoraria vista desde arriba): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 28\pi$. (Si fuera "tercera componente negativa", el sentido se invierte y da -28π.)
>
> En la foto del enunciado un dedo tapa la palabra que dice qué componente del tangente en P tiene que ser negativa. No puede ser "segunda" (en P el tangente es paralelo a (1, 0, −4), su segunda componente es 0). Se tomó "primera", que es lo que anotó quien resolvió este examen junto al enunciado; con "tercera" el resultado cambia de signo. **Planteo:** φ es desconocida: teorema del rotor con la superficie que la haga desaparecer.
> **La curva:** del plano, $z = 4 - 4x - 2y$. En la primera ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - (4 - 4x - 2y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. C se proyecta en la circunferencia de radio 2 centrada en el origen y está toda en el plano $4x + 2y + z = 4$.
> **Superficie elegida:** $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 4 - 4x - 2y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -4) \times (0, 1, -2) = (4, 2, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\varphi \in C^1 \Rightarrow \vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido de C:** en P = (0, 2, 0) el tangente es paralelo a $\nabla(x^2 + y^2 - 4x - 2y - z) \times \nabla(4x + 2y + z) = (-4, 2, -1) \times (4, 2, 1) = (4, 0, -16) \parallel (1, 0, -4)$. Con primera componente negativa, $\vec{T} \parallel (-1, 0, 4)$. (0, 2) es el punto más alto de $x^2 + y^2 = 4$ y ahí se avanza hacia x decreciente: C es **antihoraria vista desde arriba**.
> **Orientación compatible:** regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (4, 2, 1)$.
> **Rotor:** $P = z + \varphi(u)$, $Q = x + \varphi(u)$, $R = y + \varphi(u)$, con $u = 3x + y$ ($\partial_x u = 3$, $\partial_y u = 1$): $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (1 + \varphi'(u), 1 - 3\varphi'(u), (1 + 3\varphi'(u)) - \varphi'(u)) = (1 + \varphi', 1 - 3\varphi', 1 + 2\varphi')$.
> **Rotor por la normal:** $(1 + \varphi') \cdot 4 + (1 - 3\varphi') \cdot 2 + (1 + 2\varphi') \cdot 1 = (4 - 6 + 2)\varphi' + 4 + 2 + 1 = \mathbf{7}$. Los φ' se cancelan porque $(4, 2, 1) = (3, 1, 0) + (1, 1, 1)$.
> **Flujo del rotor:** $\iint_{\vec{D}} 7 \, dxdy = 7 \cdot 4\pi = 28\pi$.
> **Resultado:** $\oint_C \vec{f} \cdot ds = \mathbf{28\pi}$ (con "tercera componente negativa" sería -28π).
> **Control (circulación directa):** sobre C, $dz = -4dx - 2dy$, así que $dx + dy + dz = -(3dx + dy) = -du$ y $\varphi(u)(dx + dy + dz)$ es exacta. Queda $\oint z \, dx + x \, dy + y \, dz = \oint (4 - 4x - 6y) \, dx + (x - 2y) \, dy$, y por Green: $\iint_D (1 - (-6)) \, dxdy = 7 \cdot 4\pi = 28\pi$ ✓.
> **Trampa:** en P la segunda componente del tangente es 0: el sentido sólo lo decide la primera (o la tercera) componente.

Ejercicio 4. Sea Γ el arco de la curva de ecuación $\vec{X} = (t\cos(\pi t), t, t\,\mathrm{sen}(\pi t))$, $t \in \mathbb{R}$, contenido en la bola de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (ze^{xz} + yz + 1, xz, xy + xe^{xz})$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

> **Respuesta:** Γ corresponde a $t \in [-1, 1]$, de $A = (1, -1, 0)$ a $B = (-1, 1, 0)$. Con $U = e^{xz} + xyz + x$, la circulación es $U(B) - U(A) = 0 - 2 = -2$.
>
> **El arco:** $\|\vec{X}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t) + t^2 + t^2\mathrm{sen}^2(\pi t) = 2t^2$. Estar en la bola de radio $\sqrt{2}$ es $2t^2 \le 2$, o sea $-1 \le t \le 1$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi), -1, -\mathrm{sen}(-\pi)) = (1, -1, 0)$ y $\vec{X}(1) = (\cos\pi, 1, \mathrm{sen}\,\pi) = (-1, 1, 0)$. Con la orientación de la parametrización, Γ va de $A = (1, -1, 0)$ a $B = (-1, 1, 0)$. (Si la bola se toma abierta, $t \in (-1, 1)$ y la integral da lo mismo, porque el integrando es continuo en $[-1, 1]$.)
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (P, Q, R)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = x - x = 0$; $P'_z - R'_x = (e^{xz} + xze^{xz} + y) - (y + e^{xz} + xze^{xz}) = 0$; $Q'_x - P'_y = z - z = 0$. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** $U'_y = xz \Rightarrow U = xyz + h(x, z)$. $U'_x = yz + h'_x = ze^{xz} + yz + 1 \Rightarrow h'_x = ze^{xz} + 1 \Rightarrow h = e^{xz} + x + k(z)$. $U'_z = xy + xe^{xz} + k'(z) = xy + xe^{xz} \Rightarrow k' = 0$. **$U = e^{xz} + xyz + x$.**
> **Circulación:** $U(B) = e^0 + 0 - 1 = 0$; $U(A) = e^0 + 0 + 1 = 2$. $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = U(B) - U(A) = \mathbf{-2}$.
> **Trampa:** lo difícil es el recorte: la curva entera no entra en la bola, sólo $t \in [-1, 1]$; y ojo con $\cos(-\pi) = -1$ al evaluar $\vec{X}(-1)$. Hacerla directo con la parametrización es inmanejable: el potencial es el camino.

Ejercicio 5. Sea C la curva ortogonal a la familia de curvas $xy = k$, $k \in \mathbb{R}$, que pasa por el punto $(0, 1)$, y sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ limitada por la curva C y la recta $y = \sqrt{2}$.
Calcule la masa de la placa que ocupa la región D cuya densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** C: $y^2 - x^2 = 1$ (rama superior, $y = \sqrt{(1 + x^2)}$). D = $\{1 \le y \le \sqrt{2},\ |x| \le \sqrt{(y^2 - 1)}\}$. $M = \dfrac{2k}{3}$.
>
> **EDO de la familia:** derivando $xy = k$ respecto de x (con $y = y(x)$) queda $y + xy' = 0$, o sea $y' = -\dfrac{y}{x}$. Así se elimina la constante k.
> **EDO de las ortogonales:** en cada punto la pendiente de la ortogonal es la opuesta de la inversa: $y' = -1 / (-\dfrac{y}{x}) = \dfrac{x}{y}$. Es de variables separables: $y\,dy = x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + c_0 \Rightarrow x^2 - y^2 = c$.
> **La que pasa por (0, 1):** $0 - 1 = c$, $c = -1$, o sea $x^2 - y^2 = -1$. C: **$y^2 - x^2 = 1$**. Es una hipérbola con dos ramas; la que pasa por (0, 1) es la de arriba, $y = \sqrt{(1 + x^2)}$ (vértice en (0, 1), abierta hacia arriba).
> **Control de ortogonalidad:** las normales son $\nabla(xy) = (y, x)$ y $\nabla(x^2 - y^2) = (2x, -2y)$; su producto escalar es $2xy - 2xy = 0$, así que las curvas se cortan en ángulo recto ✓.
> **La región (dibujo):** la recta $y = \sqrt{2}$ corta a C: $y = \sqrt{2}$ da $x^2 = 2 - 1 = 1$, $x = \pm 1$: puntos $(-1, \sqrt{2})$ y $(1, \sqrt{2})$. D es el "casquete" de la rama de arriba: lo que queda entre el vértice (0, 1) y la cuerda horizontal $y = \sqrt{2}$ que une $(-1, \sqrt{2})$ con $(1, \sqrt{2})$. La rama de abajo no interviene.
> **Densidad:** La distancia al eje x es $|y| = y$ (en D, $y \ge 1$), $\delta = ky$.
> **Cuenta (primer orden):** D = $\{1 \le y \le \sqrt{2},\ -\sqrt{(y^2 - 1)} \le x \le \sqrt{(y^2 - 1)}\}$. En x: $\int ky\,dx = ky \cdot 2\sqrt{(y^2 - 1)}$. En y: $M = k\int_1^{\sqrt{2}} 2y\sqrt{(y^2 - 1)}\,dy$; con $u = y^2 - 1$, $du = 2y\,dy$, u de 0 a 1: $k\int_0^1 \sqrt{u}\,du = k[\dfrac{2}{3}u^{3/2}]_0^1 = \dfrac{2k}{3}$.
>
> **Resultado:** $M = \mathbf{\dfrac{2k}{3}}$.
>
> **Control en el otro orden:** D = $\{-1 \le x \le 1,\ \sqrt{(1 + x^2)} \le y \le \sqrt{2}\}$: $\int ky\,dy = k[\dfrac{y^2}{2}]_{\sqrt{(1 + x^2)}}^{\sqrt{2}} = k\dfrac{1 - x^2}{2}$, y

$\int_{-1}^{1} k\frac{1-x^2}{2}\,dx = \frac{k}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2k}{3}$ ✓.

Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ en la EDO *sin* la constante k; si se deja k adentro no se obtiene una familia. Además la distancia al eje x es $|y|$ (no $|x|$).

20/12/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule
$\iint_D x^2\,dxdy$,
siendo D la región del primer cuadrante cuyo borde está compuesto por las lineas de campo de $\vec{f}(x, y) = (x - 2, 2y)$ y $\vec{g}(x, y) = (y, -x)$ que pasan por (0, 2).

Respuesta: Líneas: $y = \frac{(x-2)^2}{2}$ $(0 \le x < 2)$ y $x^2 + y^2 = 4$. $D = \{0 \le x \le 2,\ \frac{(x-2)^2}{2} \le y \le \sqrt{(4 - x^2)}\}$. $\iint_D x^2\,dx\,dy = \pi - \frac{8}{15} \approx 2{,}608$.

Línea de campo de $\vec{f}$ por (0, 2): $\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ da $x' = x - 2$, $y' = 2y$. Las trayectorias cumplen $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-2}$, de variables separables: $\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x-2} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-2| + c \Rightarrow y = C(x-2)^2$. Por (0, 2): $2 = 4C$, $C = \frac{1}{2}$. Queda la parábola $\mathbf{y = \frac{(x-2)^2}{2}}$. Control: el vector tangente $(1, x - 2)$ es paralelo a $\vec{f} = (x - 2, (x - 2)^2)$ en cada punto ✓. La línea de campo es la rama con $x < 2$: en (2, 0) el campo se anula (punto de equilibrio) y la curva se acerca a él sin pasarlo.

Línea de campo de $\vec{g}$ por (0, 2): $x' = y$, $y' = -x$, o sea $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$, separable: $y\,dy = -x\,dx \Rightarrow x^2 + y^2 = c$. Por (0, 2): $c = 4$. Es la **circunferencia $x^2 + y^2 = 4$**. Control: $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2xy + 2y(-x) = 0$.

Dónde se cortan: reemplazando $y = \frac{(x-2)^2}{2}$ en $x^2 + y^2 = 4$, en el primer cuadrante las soluciones son (0, 2) y (2, 0) (en (2, 0): $4 + 0 = 4$ ✓).

La región (dibujo): las dos curvas salen de (0, 2) y llegan a (2, 0). El cuarto de circunferencia va por arriba (es cóncavo, se abomba hacia afuera) y la parábola va por abajo (es convexa, se hunde hacia el origen y llega tangente al eje x en (2, 0)). Por ejemplo en $x = 1$ la parábola vale $\frac{1}{2}$ y la circunferencia $\sqrt{3}$. D es la lúnula entre las dos: $D = \{0 \le x \le 2,\ \frac{(x-2)^2}{2} \le y \le \sqrt{(4 - x^2)}\}$.

Planteo: $\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^2 x^2[\sqrt{(4 - x^2)} - \frac{(x-2)^2}{2}]\,dx = I_1 - I_2$.

$I_1 = \int_0^2 x^2\sqrt{(4 - x^2)}\,dx$: con $x = 2\,\text{sen}\,u$, $dx = 2\cos u\,du$, u de 0 a $\pi/2$: $\int_0^{\pi/2} 4\,\text{sen}^2u \cdot 2\cos u \cdot 2\cos u\,du = 16\int \text{sen}^2u\cos^2u\,du = 4\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2u)\,du = 4[\frac{u}{2} - \frac{\text{sen}(4u)}{8}]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$. (Es $\iint x^2$ sobre el cuarto de disco; en polares: $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^2 r^3\,dr = \frac{\pi}{4} \cdot 4 = \pi$, coincide.)

$I_2 = \int_0^2 x^2\,\frac{(x-2)^2}{2}\,dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{1}{2}[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15}$.

Resultado: $\iint_D x^2\,dx\,dy = \mathbf{\pi - \frac{8}{15}} \approx 2{,}608$.

Control en el otro orden: despejando x de la parábola con $x \le 2$, $x = 2 - \sqrt{(2y)}$; $D = \{0 \le y \le 2,\ 2 - \sqrt{(2y)} \le x \le \sqrt{(4 - y^2)}\}$, y $\int_0^2 \int x^2\,dx\,dy$ da numéricamente 2,6083 ✓.

Trampa: la región es la lúnula entre las dos líneas, no el cuarto de disco ni lo que está bajo la parábola. Y al despejar la parábola para x va el signo menos, $x = 2 - \sqrt{(2y)}$, porque la rama es la de $x < 2$.

Ejercicio 2. Sea Σ el triángulo de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, −1, 0) y C = (0, 0, 1). Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + z, g(z))$ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ a lo largo del borde de Σ recorrido en el sentido A → B → C → A.

Respuesta: $\oint_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1$ (sentido A → B → C → A).

Rotor: $\vec{f} = (P, Q, R) = (x^2 + y, y^2 + z, g(z))$, C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato). $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 1, 0 - 0, 0 - 1) =$ **(−1, 0, −1)**. Fijate que g(z) no aporta: R sólo depende de z y en el rotor aparecen R'_y y R'_x.

El plano del triángulo: buscamos ax + by + cz = 1 por los tres puntos: A da a = 1, B da −b = 1, C da c = 1. Es **x − y + z = 1**, o sea z = 1 − x + y. La proyección D sobre xy es el triángulo (1, 0), (0, −1), (0, 0): $x \in [0, 1]$, $y \in [x - 1, 0]$, de área 1/2.

Superficie elegida: el mismo Σ, que tiene como borde la curva y normal constante.

Hipótesis de Stokes: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un triángulo plano (regular, orientable) y su borde es una poligonal cerrada simple, suave a trozos.

Orientación compatible (acá el sentido es dato): A → B → C proyectado es (1, 0) → (0, −1) → (0, 0), que mirando desde arriba gira en sentido *horario*. Con los dedos de la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta hacia abajo, así que la normal compatible es la de componente z negativa: $\vec{n} = -(-z'_x, -z'_y, 1) = -(1, -1, 1) =$ **(−1, 1, −1)**, integrando en dx dy. Control: (B − A) × (C − A) = (−1, −1, 0) × (−1, 0, 1) = (−1, 1, −1), la misma.

Flujo: $(\text{rot}\,\vec{f}) \cdot \vec{n} = (-1)(-1) + 0 + (-1)(-1) = 2$. $\iint_D 2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x-1}^0 2\,dy\,dx = \int_0^1 [2y]_{x-1}^0\,dx = \int_0^1 2(1 - x)\,dx = [2x - x^2]_0^1 =$ **1**.

Resultado: $\oint_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$ **1** en el sentido A → B → C → A.

Trampa: como B tiene y = −1, el recorrido A → B → C es horario visto desde arriba; si usás la normal "de siempre" (1, −1, 1) te da −1.

Ejercicio 3. Calcule el volumen de la región del espacio que se encuentra limitada por la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ y el plano $2x - 4y + z = 4$.

Respuesta: $V = 81\pi/2$ (≈ 127,23).

Planteo: la región está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4 - 2x + 4y$. Adentro de la curva donde se cortan, el plano queda arriba; $V = \iint_D$ (plano − paraboloide) dxdy, con D la proyección sobre el plano xy.

Dónde se cortan: $x^2 + y^2 = 4 - 2x + 4y$ equivale a $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$, o sea $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. La curva intersección es una elipse metida en el plano oblicuo, pero su proyección sobre xy es **la circunferencia de centro (−1, 2) y radio 3**, y eso es lo que importa para integrar. Altura: $(4 - 2x + 4y) - (x^2 + y^2) = 9 - (x + 1)^2 - (y - 2)^2$, positiva adentro del disco (en el centro (−1, 2) el plano está en 14 y el paraboloide en 5).

Coordenadas: cilíndricas corridas al centro, $x = -1 + r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r (la traslación no lo cambia). Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$, y z entre el paraboloide y el plano, lo que deja como altura $9 - r^2$.

Cuenta: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$. Primitiva: $\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 3: $\frac{81}{4}$. Por 2π.

Resultado: $\mathbf{V = \frac{81\pi}{2}} \approx 127{,}23$.

Control (cartesianas, otro orden): con $u = x + 1$, $w = y - 2$ la altura es $9 - u^2 - w^2$ sobre $u^2 + w^2 \le 9$. Primero en u, entre $\pm\sqrt{(9 - w^2)}$: $\frac{4}{3}(9 - w^2)^{3/2}$; después en w, con $w = 3 \operatorname{sen} t$: $108 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t \, dt = 108 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{81\pi}{2}$ ✓.

Trampa: creer que la intersección es una circunferencia horizontal a cierta altura y calcular un paraboloide "hasta z = constante": el plano es oblicuo. Lo que se usa es la proyección, y la altura plano − paraboloide.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (x - y\varphi(2xy),\ 3x - x\varphi(2xy) + y^2)$ con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4y^2 + 8y + x^2 = 0$ contenido en el semiplano $x \ge 0$ y recorrido de (0, 0) a (0, −2).

Respuesta: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -3\pi - 8/3 \approx -12{,}09$.

Planteo: $P = x - y\varphi(2xy)$, $Q = 3x - x\varphi(2xy) + y^2$; con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ ambas son C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Rotor escalar: $Q'_x = 3 - \varphi(2xy) - 2xy\,\varphi'(2xy)$ y $P'_y = -\varphi(2xy) - 2xy\,\varphi'(2xy)$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3}$. La parte con φ, $-\varphi(2xy)(y\,dx + x\,dy)$, es un gradiente (de $-\frac{1}{2}\Phi(2xy)$ con $\Phi' = \varphi$), por eso se va.

La curva: $4y^2 + 8y + x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + (y + 1)^2 = 1$: elipse de centro (0, −1), semiejes 2 en x y 1 en y, que pasa por (0, 0) y (0, −2). El arco $x \ge 0$ recorrido de (0, 0) a (0, −2) pasa por (2, −1): **sentido horario**.
Cierre e hipótesis: agrego el segmento S del eje y de (0, −2) a (0, 0). $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple, C^1 a trozos, y es el borde de la media elipse $D = \{\frac{x^2}{4} + (y + 1)^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, región regular; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$. El borde queda recorrido en sentido horario, así que $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 3\,dA = -3 \cdot \text{área}(D) = -3 \cdot \frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2} = -3\pi$.

Segmento: S: (0, t), t de −2 a 0. $\vec{f}(0, t) = (-t\varphi(0), t^2)$; con derivada (0, 1), $\int_S = \int_{-2}^{0} t^2\,dt = [\frac{t^3}{3}]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma \cup S} - \int_S = -3\pi - \frac{8}{3} = \mathbf{-3\pi - 8/3} \approx -12{,}09$.

Trampa: el término y^2 de Q es el único que sobrevive en el segmento (ahí x = 0 y dx = 0); si lo olvidás te queda −3π a secas.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f} = \nabla g + \vec{h}$ con $\vec{h}(x, y, z) = (x, y^2, 8 - z)$ y sea M el cuerpo definido por: $x^2 + y^2 + z^2 \le 10$ y $z \ge 1$.
Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de ∂M orientada de forma que las normales sean salientes, sabiendo que $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2y & -2x & 0 \\ -2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es su matriz hessiana.

Respuesta: $\nabla \cdot \vec{f} = -1$; flujo saliente $= -\text{vol}(M) = \pi(29 - 20\sqrt{10})/3 \approx -35{,}86$.

Planteo: M es el casquete de la bola de radio $\sqrt{10}$ que queda por encima del plano z = 1. Su frontera ∂M es una superficie cerrada, suave a trozos (casquete esférico + disco de la tapa en z = 1), y se pide normal saliente: es exactamente la situación del teorema de la divergencia.

Hipótesis de Gauss: $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, así que ∇g es C^1; $\vec{h}$ es polinomial. Entonces $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ y $\oiint_{\partial M} \vec{f} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \iiint_M \nabla \cdot \vec{f}\, dV$.

Divergencia: $\nabla \cdot (\nabla g) = g''_{xx} + g''_{yy} + g''_{zz}$ es la traza de Hg: $-2y + 1 + (-2) = -2y - 1$. $\nabla \cdot \vec{h} = 1 + 2y + (-1) = 2y$. Sumando, $\boldsymbol{\nabla \cdot \vec{f} = -1}$.

Región: la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ corta al plano $z = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$. En cilíndricas: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$, $1 \le z \le \sqrt{(10 - r^2)}$, con jacobiano r.

Cuenta: $\text{vol}(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\sqrt{(10 - r^2)} - 1)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $-\frac{1}{3}(10 - r^2)^{3/2} - \frac{r^2}{2}$. Entre 0 y 3: $(-\frac{1}{3} - \frac{9}{2}) - (-\frac{10\sqrt{10}}{3}) = \frac{10\sqrt{10}}{3} - \frac{29}{6}$. Por 2π: $\text{vol}(M) = \frac{\pi(20\sqrt{10} - 29)}{3}$.

Resultado: flujo $= \iiint_M (-1)\, dV = -\text{vol}(M) = \boldsymbol{\frac{\pi(29 - 20\sqrt{10})}{3} \approx -35{,}86}$.

Trampa: no hace falta hallar g: sólo se usa la traza de la hessiana (el laplaciano es la suma de la diagonal, no el determinante ni la suma de todo). Y no te olvides del término de $\vec{h}$.

13/12/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen de la región D definida por
$D : x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \wedge x \geq 2 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

> **Respuesta:** $V = 12\pi + 64/3$ (≈ 59,03).
>
> **Planteo:** D es un sólido cilíndrico vertical con piso $z = 0$ y techo en el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (que es ≥ 0 siempre, así que entre piso y techo nunca queda vacío). $V = \iint_B (x^2 + y^2)\, dxdy$, con B la base en el plano xy.
> **La base:** $x^2 - 4x + y^2 \leq 0$ equivale a $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4$: disco de centro (2, 0) y radio 2, que pasa por el origen. La condición $x \geq 2$ se queda con la mitad del disco del otro lado de el diámetro vertical $x = 2$, de (2, −2) a (2, 2). El sólido es medio cilindro circular vertical, cortado abajo por $z = 0$ y arriba por el paraboloide.
> **Coordenadas:** polares corridas al centro del disco, $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$; la traslación no cambia el jacobiano, que es r. Rangos: $0 \leq r \leq 2$; $x \geq 2$ equivale a $r\cos\theta \geq 0$, o sea $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$; $0 \leq z \leq x^2 + y^2 = (2 + r\cos\theta)^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta = r^2 + 4r\cos\theta + 4$.
> **Cuenta:** $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 (r^2 + 4r\cos\theta + 4)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $\frac{r^4}{4} + \frac{4}{3}r^3\cos\theta + 2r^2$, entre 0 y 2: $4 + \frac{32}{3}\cos\theta + 8 = 12 + \frac{32}{3}\cos\theta$. Primitiva en θ: $12\theta + (32/3)\,\text{sen}\,\theta$, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$: $12\pi + 64/3$.
> **Resultado:** $\mathbf{V = 12\pi + \frac{64}{3}} \approx 59{,}03$.
> **Control (polares en el origen):** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. La circunferencia es $r = 4\cos\theta$ y la recta $x = 2$ es $r = 2/\cos\theta$; se cortan donde $\cos^2\theta = 1/2$, $\theta = \pm\pi/4$ (los puntos $(2, \pm 2)$). Como $z \leq r^2$, $V = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{2/\cos\theta}^{4\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (64\cos^4\theta - \frac{4}{\cos^4\theta})\, d\theta$. Con $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}$, la primera da $64(\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}) = 12\pi + 32$; con primitiva $\text{tg}\,\theta + \frac{\text{tg}^3\theta}{3}$ la segunda da $4\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}$. $V = 12\pi + 32 - \frac{32}{3} = 12\pi + \frac{64}{3}$ ✓.
> **Trampa:** con polares corridas, $x^2 + y^2$ **no** es r^2 (hay que reemplazar la coordenada corrida); y en polares en el origen, tomar $0 \leq r \leq 4\cos\theta$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ es el disco entero (se pierde $x \geq 2$).

Ejercicio 2. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (4y^2 + 2xy - ye^{xy} + x^2,\ x^2 - xe^{xy} + y)$ a lo largo de la curva de ecuación $\vec{X} = (2\text{sen}(t), 2\cos(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, orientada según la parametrización dada.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 22$.
>
> **La curva:** $\vec{X}(t) = (2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$ cumple $x^2 + y^2 = 4$. $\vec{X}(0) = (0, 2)$ y $\vec{X}(\pi/2) = (2, 0)$, con $x, y \geq 0$: es el cuarto de circunferencia del primer cuadrante recorrido en **sentido horario**. No es cerrada, así que Green no se aplica directo: la cierro.
> **Cierre:** C_1: segmento de (2, 0) a (0, 0) sobre el eje x; C_2: segmento de (0, 0) a (0, 2) sobre el eje y. $C \cup C_1 \cup C_2$ es el borde de $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ recorrido en sentido horario (D queda a la derecha): orientación **negativa**.
> **Hipótesis del teorema:** $P = 4y^2 + 2xy - ye^{xy} + x^2$ y $Q = x^2 - xe^{xy} + y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (polinomios y exponenciales); D es una región regular y su borde es cerrado, simple y suave a trozos. Como está

recorrido al revés, Green da $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $P'_y = 8y + 2x - e^{xy} - xye^{xy}$, $Q'_x = 2x - e^{xy} - xye^{xy}$. $Q'_x - P'_y = -8y$ (se van las exponenciales).
Doble integral: en polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, jacobiano r, con $0 \le r \le 2$ y $0 \le \theta \le \pi/2$: $\iint_D (-8y)\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 -8r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = -8 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = -8 \cdot (8/3) \cdot 1 = -64/3$. Por la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1 \cup C_2} = +64/3$.
Segmentos: C_1: (t, 0), t de 2 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t^2$, así que $\int_{C_1} = \int_2^0 t^2\, dt = [t^3/3]_2^0 = -8/3$. C_2: (0, t), t de 0 a 2; $dx = 0$ y $Q(0, t) = t$, así que $\int_{C_2} = \int_0^2 t\, dt = [t^2/2]_0^2 = 2$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 64/3 - (-8/3) - 2 = \mathbf{22}$.
Trampa: la parametrización (2 sen t, 2 cos t) recorre la circunferencia en sentido horario (al revés de la usual). Si no lo mirás, el signo del término de Green sale cambiado y te da $-64/3 + 8/3 - 2 = -62/3$.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (z, x + y, 1)$ a través de la superficie
$\Sigma : x + y + z = 1 \wedge x + y \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$,
orientada de modo tal que la normal tenga tercera componente negativa.

Respuesta: $\Phi = -1$ (con $\vec{N} = (-1, -1, -1)$).

Planteo: Σ es el triángulo del plano $x + y + z = 1$ con $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$ (o sea, la cara inclinada del tetraedro del primer octante: $z = 1 - x - y \ge 0$ sale solo). Se parametriza como gráfico sobre el plano xy.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$, el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1). $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)$.
Orientación: (1, 1, 1) tiene tercera componente $1 > 0$, al revés de lo pedido. Cambiamos el signo: $\vec{N} = \mathbf{(-1, -1, -1)}$, tercera componente $-1 < 0$ ✓ (apunta hacia el origen, hacia adentro del tetraedro).
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $f(X) = (1 - x - y, x + y, 1)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = -(1 - x - y) - (x + y) - 1 = -2$ (fijate que da $-(x + y + z) - 1$ y en el plano $x + y + z = 1$). Es constante.
Cuenta: $\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-2)\, dy\, dx = \int_0^1 -2(1 - x)\, dx = [-2x + x^2]_0^1 = -1$.
Resultado: $\Phi = -1$.
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; cerramos con las tres caras coordenadas del tetraedro $V = \{x, y, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$ (volumen $\frac{1}{6}$). $\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 1 + 0 = 1$, así que $\iiint_V 1\, dV = \frac{1}{6}$. Caras con normal saliente: en $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -z$, $\iint -z = -\frac{1}{6}$; en $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -x$, $\iint -x = -\frac{1}{6}$; en $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -1$, $\iint -1 = -\frac{1}{2}$. Flujo saliente por el plano: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$. La normal pedida ($z < 0$) es la entrante al tetraedro, así que $\Phi = -1$ ✓.
Trampa: quedarse con (1, 1, 1) porque "sale natural" da el resultado con el signo cambiado. Y no reemplazar $z = 1 - x - y$ en $\vec{f}$ antes del producto escalar.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (2x^2y^2 + y^2 + 1, 2xy)$. Halle $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con continuidad para que $\vec{g}(x, y) = \mu(x)\vec{f}(x, y)$ cumpla simultáneamente las condiciones:
1. $\int_C \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva C cerrada y suave a trozos;
2. $\vec{g}(0, 0) = (2, 0)$.

Respuesta: $\mu(x) = 2e^{x^2}$.

Condición 1 ⇔ gradiente: circulación nula sobre toda curva cerrada (suave a trozos) equivale a que $\vec{g}$ sea de gradientes en $\mathbb{R}^2$. Como $\mu \in C^1$, $\vec{g}$ es C^1. Si $\vec{g} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$; recíprocamente, si $P'_y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, $\vec{g}$ es de gradientes.

La EDO: $P = \mu(x)(2x^2y^2 + y^2 + 1)$, $Q = 2xy\,\mu(x)$. $P'_y = \mu(4x^2y + 2y)$; $Q'_x = 2y\mu + 2xy\mu'$ (regla del producto, μ depende de x). Igualando, $4x^2y\mu = 2xy\mu'$, o sea $2xy(\mu' - 2x\mu) = 0$ para todo (x, y). Con $y = 1$ y $x \neq 0$ sale $\mu' = 2x\mu$, y por continuidad vale también en $x = 0$.
Resolución: $(\mu\, e^{-x^2})' = e^{-x^2}(\mu' - 2x\mu) = 0 \Rightarrow \mu(x) = K\, e^{x^2}$.
Condición 2: $\vec{g}(0, 0) = \mu(0)\cdot(0 + 0 + 1, 0) = (\mu(0), 0) = (2, 0) \Rightarrow K = 2$.
Resultado: $\mu(x) = 2e^{x^2}$, $\vec{g} = 2e^{x^2}(2x^2y^2 + y^2 + 1, 2xy)$. Control: $P'_y = Q'_x = 4y\, e^{x^2}(2x^2 + 1)$. Un potencial es $U = 2xy^2\, e^{x^2} + 2\int_0^x e^{s^2}\, ds$ (integral no elemental: por eso conviene justificar con simple conexidad).
Trampa: olvidarse del término $2xy\mu'$ al derivar Q respecto de x, o sumar la constante $(e^{x^2} + K)$ en lugar de multiplicarla.

Ejercicio 5. Sea Σ la parte de la frontera del trozo de cilindro sólido
$H : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 2$
que excluye las tapas inferior y superior del mismo. Calcule el flujo de
$\vec{f}(x, y, z) = (x\varphi(z) + \varphi(y), -y\varphi(z) + y, z + 1)$
a través de Σ orientada de modo que la normal apunte hacia el interior de H, bajo la suposición de que φ tiene derivada continua en $\mathbb{R}$.

Respuesta: $\nabla\cdot\vec{f} = 2$; flujo por Σ con normal hacia el interior de $H = -8\pi$ (no depende de φ).

Planteo: Σ es sólo la pared lateral $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$: **no es cerrada**. La cierro con las tapas T_1: $z = 2$ y T_0: $z = 0$ (discos $x^2 + y^2 \leq 4$); así $\Sigma \cup T_0 \cup T_1 = \partial H$, cerrada y suave a trozos.
Hipótesis de Gauss: φ tiene derivada continua, así que todas las componentes de $\vec{f} = (x\varphi(z) + \varphi(y), -y\varphi(z) + y, z + 1)$ (productos y composiciones de funciones C^1) son C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior: $\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\check{n}\, d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.
Divergencia: $\partial/\partial x(x\varphi(z) + \varphi(y)) = \varphi(z)$, $\partial/\partial y(-y\varphi(z) + y) = -\varphi(z) + 1$, $\partial/\partial z(z + 1) = 1$. Sumando, $\varphi(z)$ se cancela: $\mathbf{\nabla\cdot\vec{f} = 2}$.
Triple: $\iiint_H 2\, dV = 2 \cdot \mathrm{vol}(H) = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi$.
Tapas, con normal exterior: en T_1, $\check{n} = (0, 0, 1)$ y $\vec{f}\cdot\check{n} = f_3(x, y, 2) = 3$, así que el flujo es $3 \cdot$ área $= 3 \cdot 4\pi = 12\pi$. En T_0, $\check{n} = (0, 0, -1)$ y $\vec{f}\cdot\check{n} = -f_3(x, y, 0) = -1$, flujo $= -1 \cdot 4\pi = -4\pi$.
Lateral saliente: $16\pi - 12\pi - (-4\pi) = 8\pi$.
Resultado: con la normal hacia el interior de H, **flujo por $\Sigma = -8\pi$**.
Control por definición: en Σ, $x = 2\cos\theta$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\check{n}_{ext} = (x, y, 0)/2$ y $d\sigma = 2\, d\theta\, dz$, así que $\vec{f}\cdot\check{n}\, d\sigma = (x^2\varphi(z) + x\varphi(y) - y^2\varphi(z) + y^2)\, d\theta\, dz = (4\cos 2\theta\, \varphi(z) + 2\cos\theta\, \varphi(2\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4\,\mathrm{sen}^2\theta)\, d\theta\, dz$. Entre 0 y 2π el primero da 0, el segundo también (con Φ primitiva de φ, su primitiva es $\Phi(2\,\mathrm{sen}\,\theta)$, que vuelve al mismo valor) y el tercero da 4π; en z, $\int_0^2 4\pi\, dz = 8\pi$ ✓.
Trampa: aplicar Gauss directamente a Σ (que no es cerrada) da 16π, que está mal; hay que restar las tapas, con el signo de la de abajo bien puesto. Y al final, la normal pedida es la interior.

13/12/22, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen de la región D definida por
$D : x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \wedge y \geq 2 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

> **Respuesta:** $V = 12\pi + 64/3$ (≈ 59,03).
>
> **Planteo:** D es un sólido cilíndrico vertical con piso $z = 0$ y techo en el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (que es ≥ 0 siempre, así que entre piso y techo nunca queda vacío). $V = \iint_B (x^2 + y^2)\, dxdy$, con B la base en el plano xy.
> **La base:** $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ equivale a $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$: disco de centro (0, 2) y radio 2, que pasa por el origen. La condición $y \geq 2$ se queda con la mitad del disco del otro lado de el diámetro horizontal $y = 2$, de (−2, 2) a (2, 2). El sólido es medio cilindro circular vertical, cortado abajo por $z = 0$ y arriba por el paraboloide.
> **Coordenadas:** polares corridas al centro del disco, $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$; la traslación no cambia el jacobiano, que es r. Rangos: $0 \leq r \leq 2$; $y \geq 2$ equivale a $r\,\text{sen}\,\theta \geq 0$, o sea $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq z \leq x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + (2 + r\,\text{sen}\,\theta)^2 = r^2 + 4r\,\text{sen}\,\theta + 4$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{\pi} \int_0^{2} (r^2 + 4r\,\text{sen}\,\theta + 4)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $\frac{r^4}{4} + \frac{4}{3} r^3\,\text{sen}\,\theta + 2r^2$, entre 0 y 2: $4 + \frac{32}{3}\,\text{sen}\,\theta + 8 = 12 + \frac{32}{3}\,\text{sen}\,\theta$. Primitiva en θ: $12\theta - (32/3)\cos\theta$, entre 0 y π: $12\pi + 64/3$.
> **Resultado:** $\mathbf{V = 12\pi + \frac{64}{3}} \approx 59{,}03$.
> **Control (polares en el origen):** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. La circunferencia es $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ y la recta $y = 2$ es $r = 2/\text{sen}\,\theta$; se cortan donde $4\,\text{sen}\,\theta = 2/\text{sen}\,\theta$, $\text{sen}^2\theta = 1/2$, $\theta = \pi/4$ y $3\pi/4$ (los puntos (±2, 2)).
> Como $z \leq x^2 + y^2 = r^2$, $V = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{2/\text{sen}\,\theta}^{4\,\text{sen}\,\theta} r^3\, dr\, d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (64\,\text{sen}^4\theta - \frac{4}{\text{sen}^4\theta})\, d\theta$. Con $\text{sen}^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}$, la primera da $64(\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}) = 12\pi + 32$; con primitiva $-\text{cotg}\,\theta - \frac{\text{cotg}^3\theta}{3}$ la segunda da $4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$. $V = 12\pi + 32 - \frac{32}{3} = 12\pi + \frac{64}{3}$ ✓.
> **Trampa:** con polares corridas, $x^2 + y^2$ **no** es r^2 (hay que reemplazar la coordenada corrida); y en polares en el origen, tomar $0 \leq r \leq 4\,\text{sen}\,\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$ es el disco entero (se pierde $y \geq 2$).

Ejercicio 2. Sea Σ la parte de la frontera del trozo de cilindro sólido
$H : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge 0 \leq z \leq 3$
que excluye las tapas inferior y superior del mismo. Calcule el flujo de
$\vec{f}(x, y, z) = (-x\varphi(z) + x,\, y\varphi(z) + \varphi(x),\, z + 2)$
a través de Σ orientada de modo que la normal apunte hacia el interior de H, bajo la suposición de que φ tiene derivada continua en $\mathbb{R}$.

> **Respuesta:** $\nabla \cdot \vec{f} = 2$; flujo por Σ con normal hacia el interior de H = -27π (no depende de φ).
>
> **Planteo:** Σ es sólo la pared lateral $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 3$: **no es cerrada**. La cierro con las tapas T_1: $z = 3$ y T_0: $z = 0$ (discos $x^2 + y^2 \leq 9$); así $\Sigma \cup T_0 \cup T_1 = \partial H$, cerrada y suave a trozos.
> **Hipótesis de Gauss:** φ tiene derivada continua, así que todas las componentes de $\vec{f} = (-x\varphi(z) + x,\, y\varphi(z) + \varphi(x),\, z + 2)$ (productos y composiciones de funciones C^1) son C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior: $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}$

$d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot f\, dV$.
Divergencia: $\partial/\partial x(-x\varphi(z) + x) = -\varphi(z) + 1$, $\partial/\partial y(y\varphi(z) + \varphi(x)) = \varphi(z)$, $\partial/\partial z(z + 2) = 1$. Sumando, $\varphi(z)$ se cancela: $\vec{\nabla\cdot f} = \mathbf{2}$.
Triple: $\iiint_H 2\, dV = 2 \cdot \text{vol}(H) = 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 3 = 54\pi$.
Tapas, con normal exterior: en T_1, $\check{n} = (0, 0, 1)$ y $\vec{f} \cdot \check{n} = f_3(x, y, 3) = 5$, así que el flujo es $5 \cdot$ área $= 5 \cdot 9\pi = 45\pi$. En T_0, $\check{n} = (0, 0, -1)$ y $\vec{f} \cdot \check{n} = -f_3(x, y, 0) = -2$, flujo $= -2 \cdot 9\pi = -18\pi$.
Lateral saliente: $54\pi - 45\pi - (-18\pi) = 27\pi$.
Resultado: con la normal hacia el interior de H, **flujo por Σ = −27π**.
Control por definición: en Σ, $x = 3\cos\theta$, $y = 3\,\text{sen}\,\theta$, $\check{n}_{ext} = (x, y, 0)/3$ y $d\sigma = 3\, d\theta\, dz$, así que $\vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = (-x^2\varphi(z) + x^2 + y^2\varphi(z) + y\varphi(x))\, d\theta\, dz = (-9\cos 2\theta\, \varphi(z) + 9\cos^2\theta + 3\,\text{sen}\,\theta\, \varphi(3\cos\theta))\, d\theta\, dz$. Entre 0 y 2π el primero da 0, el tercero también (su primitiva es $-\Phi(3\cos\theta)$, con Φ primitiva de φ) y el segundo da 9π; en z, $\int_0^3 9\pi\, dz = 27\pi$ ✓.
Trampa: aplicar Gauss directamente a Σ (que no es cerrada) da 54π, que está mal; hay que restar las tapas, con el signo de la de abajo bien puesto. Y al final, la normal pedida es la interior.

Ejercicio 3. Sea $\vec{f}(x, y) = (2xy, 2x^2y^2 + x^2 + 1)$. Halle $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con continuidad para que $\vec{g}(x, y) = \mu(y)\vec{f}(x, y)$ cumpla simultáneamente las condiciones:
1. $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva C cerrada y suave a trozos;
2. $g(0, 0) = (0, 3)$.

Respuesta: $\mu(y) = 3e^{y^2}$ (con la condición 1 leída para $\vec{g}$; para $\vec{f}$ literal es imposible porque $\vec{f}$ no es de gradientes).

En la condición 1 está impreso $\vec{f}$; se resuelve con $\vec{g}$, que es lo único que tiene sentido (primer paso).
Lectura del enunciado: con $\vec{f}$ literal, la condición 1 no depende de μ y además es falsa: $P'_y = 2x$ y $Q'_x = 4xy^2 + 2x$ no coinciden, así que $\vec{f}$ no es de gradientes. Por eso se lee $\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$.
Condición 1 ⇔ gradiente: circulación nula sobre toda curva cerrada equivale a que $\vec{g}$ sea de gradientes en $\mathbb{R}^2$. Como $\mu \in C^1$, $\vec{g}$ es C^1. Si $\vec{g} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$; recíprocamente, si $P'_y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, $\vec{g}$ es de gradientes. Así que la condición 1 es exactamente $P'_y = Q'_x$.
La EDO: $P = 2xy\,\mu(y)$, $Q = \mu(y)(2x^2y^2 + x^2 + 1)$. $P'_y = 2x\mu + 2xy\mu'$ (regla del producto, μ depende de y); $Q'_x = \mu(4xy^2 + 2x)$. Igualando, $2xy\mu' = 4xy^2\mu$, o sea $2xy(\mu' - 2y\mu) = 0$ para todo (x, y). Con $x = 1$ e $y \neq 0$ sale $\mu' = 2y\mu$, y por continuidad de μ y μ′ vale también en $y = 0$.
Resolución: es lineal: $(\mu\, e^{-y^2})' = e^{-y^2}(\mu' - 2y\mu) = 0 \Rightarrow \mu\, e^{-y^2} = K \Rightarrow \mu(y) = K\, e^{y^2}$.
Condición 2: $\vec{g}(0, 0) = \mu(0)\cdot(0, 0 + 0 + 1) = (0, \mu(0)) = (0, 3) \Rightarrow \mu(0) = K = 3$.
Resultado: $\mu(y) = 3e^{y^2}$, $\vec{g} = 3e^{y^2}(2xy, 2x^2y^2 + x^2 + 1)$. Control: $P'_y = Q'_x = 6x\, e^{y^2}(1 + 2y^2)$. Un potencial es $U = 3x^2y\, e^{y^2} + 3\int_0^y e^{s^2}\, ds$; como esa integral no es elemental, la justificación natural es la de simple conexidad.
Trampa: derivar P respecto de y olvidándose de que μ también depende de y (falta el término $2xy\mu'$). Y la constante de $\mu' = 2y\mu$ multiplica (Ke^{y^2}), no se suma.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, 2, z)$ a través de la superficie
$\Sigma : x + y + z = 1 \wedge x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
orientada de modo tal que la normal tenga tercera componente negativa.

Respuesta: $\Phi = -3/2$ (con $\vec{N} = (-1, -1, -1)$).

Planteo: Σ es el triángulo del plano $x + y + z = 1$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ (o sea, la cara inclinada del tetraedro del primer octante: $z = 1 - x - y \geq 0$ sale solo). Se parametriza como gráfico sobre el plano xy.

Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$, el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)$.
Orientación: $(1, 1, 1)$ tiene tercera componente $1 > 0$, al revés de lo pedido. Cambiamos el signo: $\vec{N} = (-1, -1, -1)$, tercera componente $-1 < 0$ ✓ (apunta hacia el origen, hacia adentro del tetraedro).
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x + y, 2, 1 - x - y)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = -(x + y) - 2 - (1 - x - y) = -3$. Es constante.
Cuenta: $\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-3)\, dy\, dx = \int_0^1 -3(1 - x)\, dx = [-3x + \frac{3x^2}{2}]_0^1 = -\frac{3}{2}$.
Resultado: $\Phi = -3/2$.
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; cerramos con las tres caras coordenadas del tetraedro $V = \{x, y, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$ (volumen $\frac{1}{6}$). $\operatorname{div} \vec{f} = 1 + 0 + 1 = 2$, así que $\iiint_V 2\, dV = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Caras con normal saliente: en $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -y$, $\iint -y = -\frac{1}{6}$; en $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -2$, $\iint -2 = -1$; en $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -z = 0$. Flujo saliente por el plano: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{2}$. La normal pedida ($z < 0$) es la entrante al tetraedro, así que $\Phi = -\frac{3}{2}$ ✓.
Trampa: quedarse con $(1, 1, 1)$ porque "sale natural" da el resultado con el signo cambiado. Y no reemplazar $z = 1 - x - y$ en $\vec{f}$ antes del producto escalar.

Ejercicio 5. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y^2 - ye^{xy} + x, 4x^2 + 2xy - xe^{xy} + y^2)$ a lo largo de la curva de ecuación $\vec{X} = (2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, orientada según la parametrización dada.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -22$.
La curva: $\vec{X}(t) = (2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$: cuarto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, de $(0, 2)$ a $(2, 0)$, en **sentido horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: de $(2, 0)$ a $(0, 0)$ sobre el eje x; C_2: de $(0, 0)$ a $(0, 2)$ sobre el eje y. $C \cup C_1 \cup C_2$ es el borde de $D = \{x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$ en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = y^2 - ye^{xy} + x$ y $Q = 4x^2 + 2xy - xe^{xy} + y^2$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región regular con borde cerrado, simple y suave a trozos. Como el borde va al revés, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x = 8x + 2y - e^{xy} - xye^{xy}$, $P'_y = 2y - e^{xy} - xye^{xy}$. $Q'_x - P'_y = 8x$.
Doble integral: en polares (jacobiano r), $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$: $\iint_D 8x\, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 8r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = 8 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2} = 64/3$. Con la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1 \cup C_2} = -64/3$.
Segmentos: C_1: $(t, 0)$, t de 2 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t$: $\int_2^0 t\, dt = [t^2/2]_2^0 = -2$. C_2: $(0, t)$, t de 0 a 2; $dx = 0$ y $Q(0, t) = t^2$: $\int_0^2 t^2\, dt = 8/3$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -64/3 - (-2) - 8/3 = \mathbf{-22}$.
Trampa: el sentido horario de la parametrización y los signos al restar los segmentos: se resta la circulación de cada segmento *tal como lo recorriste* al cerrar.

16/8/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2x + z, -y + z^2, x^2 + z)$ a través de la frontera del cuerpo
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x^2 \wedge x^2 + y^2 \le 4 \wedge 0 \le y \le x\}$,
orientada de modo que las normales apunten hacia afuera de H.

> **Respuesta:** $\Phi = 3\pi - 2$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** la frontera de H es cerrada y se pide el flujo saliente: es Gauss directo, $\Phi = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (2x + z, -y + z^2, x^2 + z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es un sólido acotado cuya frontera es cerrada y suave a trozos (cinco caras: el piso $z = 0$, el techo $z = 4 - x^2$, los planos $y = 0$ e $y = x$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$), orientada con la normal exterior, que es justo la que pide el enunciado.
> **Divergencia:** $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x(2x + z) + \partial_y(-y + z^2) + \partial_z(x^2 + z) = 2 - 1 + 1 = 2$.
> **La región:** la sombra en el plano xy es $D = \{x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$. Como $y \ge 0$ e $y \le x$, el ángulo va de $\theta = 0$ (eje x) a $\theta = \pi/4$ (recta $y = x$): D es el sector $0 \le \theta \le \pi/4$, $0 \le r \le 2$. Encima de cada punto de D, z va de 0 a $4 - x^2$, que es ≥ 0 porque $|x| \le 2$ en D (el techo nunca queda por debajo del piso).
> **Cuenta:** $\Phi = \iiint_H 2\, dV = 2\iint_D (4 - x^2)\, dA = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^2 (4 - r^2\cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Interior: primitiva $2r^2 - \frac{r^4}{4}\cos^2\theta$, entre 0 y 2: $8 - 4\cos^2\theta$. Exterior: $\int_0^{\pi/4} (8 - 4\cos^2\theta)\, d\theta = [8\theta - 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta]_0^{\pi/4} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{3\pi}{2} - 1$ (usé $4\cos^2\theta = 2 + 2\cos 2\theta$).
>
> **Resultado: $\Phi = 2(\frac{3\pi}{2} - 1) = 3\pi - 2$.**
>
> **Gráfico:** la cuña de base en el sector de 45° entre el eje x y la recta $y = x$, cortada arriba por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$; las flechas normales salen del sólido en las cinco caras (en el piso apuntan hacia $(0, 0, -1)$, en el techo hacia arriba).
>
> **Control por caras:** calculando el flujo en cada cara con su normal exterior sale piso $-\frac{\pi}{2} - 1$, techo $4\pi + 4 + \frac{16\sqrt{2}}{3}$, plano $y = 0$: $-\frac{2048}{105}$, plano $y = x$: $-9 + \frac{814\sqrt{2}}{105}$, cilindro $\frac{2468}{105} - \frac{\pi}{2} - \frac{458\sqrt{2}}{35}$; la suma da $3\pi - 2$ ✓ (por eso conviene Gauss).
> **Trampa:** tomar el sector entero $0 \le \theta \le \pi/2$ (olvidando $y \le x$) o integrar $4 - y^2$ en vez de $4 - x^2$: el techo depende de x, que en polares es $r\cos\theta$.

Ejercicio 2. Halle la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 4x + 8y - 4 \wedge x \le 2\}$,
siendo la densidad de masa proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** D: mitad izquierda de la elipse $\frac{(x-2)^2}{4} + (y - 1)^2 \le 1$. $M = \pi k$.
>
> **Completar cuadrados:** $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 4 \le 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) \le 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 \le 4 \Rightarrow \mathbf{\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 \le 1}$.
> **La región (dibujo):** es una elipse de centro (2, 1) con semieje 2 en la dirección x y semieje 1 en la dirección y (ocupa $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$). La recta $x = 2$ es vertical y pasa por el centro: D es la **mitad izquierda** de la elipse, entre $x = 0$ y $x = 2$.

Densidad: La distancia al eje x es $|y|$; en D vale $0 \le y \le 2$, así que $\delta = ky$, $k > 0$.

Cambio de variables (polares elípticas): $x = 2 + 2r\cos\theta$, $y = 1 + r\operatorname{sen}\theta$, con $r \ge 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Así la desigualdad de la elipse queda $r^2 \le 1$. Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta = 2r$ (es $a \cdot b \cdot r$ con los semiejes). La condición $x \le 2$ es $2r\cos\theta \le 0$, o sea $\cos\theta \le 0$: $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Región transformada: el rectángulo $[0, 1] \times [\pi/2, 3\pi/2]$.

Cuenta: $M = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 k(1 + r\operatorname{sen}\theta) \cdot 2r\, dr\, d\theta$. En r: $k[r^2 + \dfrac{2r^3}{3}\operatorname{sen}\theta]_0^1 = k(1 + \dfrac{2}{3}\operatorname{sen}\theta)$. En θ: $k[\theta - \dfrac{2}{3}\cos\theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} = k\pi - \dfrac{2k}{3}(\cos\dfrac{3\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2}) = \pi k$.

Resultado: $M = \boldsymbol{\pi k}$.

Control: cartesianas, $D = \{0 \le y \le 2,\ 2 - 2\sqrt{(1 - (y - 1)^2)} \le x \le 2\}$: $\int_0^2 ky \cdot 2\sqrt{(1 - (y - 1)^2)}\, dy = \pi k$ ✓. También a ojo: la media elipse es simétrica respecto de $y = 1$, así que el y promedio es 1, y su área es $\dfrac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2} = \pi$; $M = k \cdot 1 \cdot \pi$ ✓.

Trampa: el jacobiano de las polares elípticas es $2r$ (el producto de los semiejes por r), no r: con r solo da la mitad. Además el semiplano $x \le 2$ corta por el centro, así que es media elipse (θ de $\pi/2$ a $3\pi/2$). Y la densidad es la distancia al eje *x*, o sea $|y|$.

Ejercicio 3. Sea $\vec{g}(x, y) = (2x^2 + 2y^2x + 1, 2y)$. Halle $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{f}(x, y) = \mu(x)\vec{g}(x, y)$ admita función potencial y $\vec{f}(0, 0) = (2, 0)$. Para la función μ hallada, calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ siendo C un arco de curva suave con punto inicial (0, 0) y punto final (0, 2).

Respuesta: $\mu(x) = 2e^{x^2}$; $\vec{f} = \nabla\varphi$ con $\varphi(x, y) = 2y^2e^{x^2} + 2xe^{x^2}$; $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(0, 2) - \varphi(0, 0) = 8$, para cualquier arco suave C de (0, 0) a (0, 2).

Planteo: $\vec{f} = (P, Q)$ con $P = \mu(x)(2x^2 + 2xy^2 + 1)$ y $Q = 2y\mu(x)$. Con $\mu \in C^1$, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo; ahí $\vec{f}$ admite función potencial si y sólo si $Q'_x = P'_y$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Derivadas cruzadas: $Q'_x = 2y\mu'(x)$; $P'_y = \mu(x) \cdot 4xy$. Igualando: $2y(\mu'(x) - 2x\mu(x)) = 0$ para todo (x, y). Tomando $y \ne 0$ queda la EDO $\boldsymbol{\mu' = 2x\mu}$.

EDO (variables separables): $\mu \equiv 0$ no sirve (daría $\vec{f}(0, 0) = \vec{0}$). Si $\mu \ne 0$: $\mu'/\mu = 2x \Rightarrow \ln|\mu| = x^2 + k \Rightarrow \mu(x) = Ce^{x^2}$.

Condición inicial: $\vec{f}(0, 0) = \mu(0) \cdot \vec{g}(0, 0) = \mu(0)(1, 0) = (\mu(0), 0) = (2, 0) \Rightarrow C = 2$. $\boldsymbol{\mu(x) = 2e^{x^2}}$ (control: $\mu' = 4xe^{x^2} = 2x \cdot \mu$).

Campo: $\vec{f}(x, y) = (2e^{x^2}(2x^2 + 2xy^2 + 1), 4ye^{x^2})$, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

Función potencial: $\varphi'_y = 4ye^{x^2} \Rightarrow \varphi = 2y^2e^{x^2} + h(x)$. Derivando en x: $\varphi'_x = 4xy^2e^{x^2} + h'(x)$, y tiene que dar $4xy^2e^{x^2} + (4x^2 + 2)e^{x^2}$; así $h'(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} = (2xe^{x^2})'$ y $h(x) = 2xe^{x^2}$. $\boldsymbol{\varphi(x, y) = 2y^2e^{x^2} + 2xe^{x^2}}$: exhibirla prueba que $\vec{f}$ es de gradientes.

Circulación: $\vec{f} = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$ y C es un arco suave de (0, 0) a (0, 2), así que no depende del camino: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(0, 2) - \varphi(0, 0) = 2 \cdot 4 \cdot e^0 + 0 - 0 = \boldsymbol{8}$.

Trampa: la condición es $\vec{f}(0, 0) = (2, 0)$, no $\mu(0) = 2$ de casualidad: sale de $\mu(0) \cdot \vec{g}(0, 0)$ con $\vec{g}(0, 0) = (1, 0)$. Y C no se necesita: sólo sus extremos.

Ejercicio 4. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie abierta Σ definida por las condiciones

$x + y + 2z = 4 \wedge x + y \le 2 \wedge y \ge x \wedge x \ge 0$

y orientada de modo que el versor normal apunte hacia z^+.

Respuesta: $\Phi = 2$ (con $\vec{N} = (1/2, 1/2, 1)$, que apunta hacia z^+).

Planteo: Σ es un pedazo del plano $x + y + 2z = 4$. Las otras tres condiciones no tienen z, así que lo que hacen es recortar la proyección D de Σ sobre el plano xy. $\Phi = \iint_\Sigma \vec{f}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{f}(\vec{X}(x, y))\cdot(\vec{X}_x \times \vec{X}_y)\, dx\, dy$, con la normal orientada como pide el enunciado.

Proyección D: $x \geq 0$, $y \geq x$, $x + y \leq 2$. La recta $y = x$ corta a $x + y = 2$ en $(1, 1)$ y el eje $x = 0$ la corta en $(0, 2)$: D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 2)$. Como tipo I: $\mathbf{D = \{0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2 - x\}}$.

Parametrización: despejando z, $\vec{X}(x, y) = (x, y, \frac{4 - x - y}{2})$, $(x, y) \in D$, que es C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, -\frac{1}{2})$, $\vec{X}_y = (0, 1, -\frac{1}{2})$, $\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Orientación: la tercera componente de $\vec{N}$ es $1 > 0$, o sea que $\vec{N}$ apunta hacia z^+, que es lo pedido. Se usa tal cual, sin cambiar el signo.

$\vec{f}\cdot\vec{N}$: sobre Σ, $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, \frac{4 - x - y}{2})$, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{4 - x - y}{2} = 2$. Es constante.

Cuenta: $\Phi = \int_0^1 \int_x^{2 - x} 2\, dy\, dx = \int_0^1 2(2 - 2x)\, dx = [4x - 2x^2]_0^1 = 2$ (es 2 por el área de D, que vale 1).

Resultado: $\Phi = 2$.

Control: el versor normal es $\hat{n} = (1, 1, 2)/\sqrt{6}$ y sobre el plano $\vec{f}\cdot\hat{n} = (x + y + 2z)/\sqrt{6} = 4/\sqrt{6}$; el área de Σ es $\iint_D \|\vec{N}\|\, dx\, dy = 1\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$. Flujo $= (4/\sqrt{6})\cdot(\frac{\sqrt{6}}{2}) = 2$ ✓.

Trampa: no reemplazar z por $\frac{4 - x - y}{2}$ dentro de $\vec{f}$ antes del producto escalar (queda una integral en tres variables sobre una región de dos). Y dibujá D antes de poner límites: con $y \geq x$ y $x + y \leq 2$ la x llega sólo hasta 1, no hasta 2.

Ejercicio 5. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x^2z - y, x + y^3e^y, z^2)$ a lo largo de la porción de la curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ contenida en el semiespacio $y \geq 0$, donde

$\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z = 0 \wedge \Sigma_2 : x^2 + y^2 + z = 8$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido de la curva que considera en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo de $(2, 0, 4)$ a $(-2, 0, 4)$ por $(0, 2, 4)$ (antihorario visto desde arriba): $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 4\pi - 64/3 \approx -8{,}77$. En el sentido contrario, $64/3 - 4\pi$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x^2z - y$, $Q = x + y^3e^y$, $R = z^2$: $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

La curva: de Σ_1, $z = x^2 + y^2$; en Σ_2: $2(x^2 + y^2) = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, $z = 4$. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es la circunferencia de radio 2 en el plano $z = 4$, y C es su mitad con $y \geq 0$: un arco **abierto** de $(2, 0, 4)$ a $(-2, 0, 4)$ pasando por $(0, 2, 4)$.

Cerrar la curva: el teorema del rotor pide una curva cerrada, así que agrego el diámetro L de $(-2, 0, 4)$ a $(2, 0, 4)$. $C \cup L$ es el borde del semidisco S: $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $z = 4$, que es plano (suave, orientable, acotado); con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ vale el teorema en S.

Orientación: elijo C de $(2, 0, 4)$ a $(-2, 0, 4)$ pasando por $(0, 2, 4)$, o sea en sentido antihorario mirando desde arriba; para que $C \cup L$ sea una curva cerrada con ese sentido, L va de $(-2, 0, 4)$ a $(2, 0, 4)$. Regla de la mano derecha: la normal compatible de S es $\vec{n} = (0, 0, 1)$. En el gráfico: la semicircunferencia en el plano $z = 4$ con flecha de $(2, 0)$ hacia $(-2, 0)$ por arriba ($y > 0$) y el diámetro sobre el eje x con flecha hacia x creciente.

Rotor: $R'_y - Q'_z = 0$; $P'_z - R'_x = x^2 - 0 = x^2$; $Q'_x - P'_y = 1 - (-1) = 2$. **$\vec{rot}\,\vec{f} = (0, x^2, 2)$.**

Flujo: $\vec{rot}\,\vec{f}\cdot\vec{n} = 2$, constante: $\iint_S \vec{rot}\,\vec{f}\cdot\vec{n}\, dS = 2\cdot\text{área}(S) = 2\cdot 2\pi = 4\pi$.

Tramo agregado: L: $\vec{r}(t) = (t, 0, 4)$, $t \in [-2, 2]$, $\vec{r}' = (1, 0, 0)$. $\vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}' = P(t, 0, 4) = 4t^2$. Primitiva $4t^3/3$: $\int_{-2}^{2} 4t^2\, dt = [4t^3/3]_{-2}^{2} = 32/3 + 32/3 = 64/3$.

Cuenta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_L \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4\pi \Rightarrow \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4\pi - 64/3$.
Resultado: recorriendo de (2, 0, 4) a (–2, 0, 4) por (0, 2, 4): $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4\pi - 64/3} \approx -8{,}77$ (en el sentido contrario, $64/3 - 4\pi$).
Control directo: con $\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 4)$, $\theta \in [0, \pi]$, el término $y^3 e^y$ aporta $\int_0^{\pi} h(\text{sen}\,\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$ (con $u = \text{sen}\,\theta$, va de 0 a 0) y lo demás da lo mismo.
Trampa: C no es cerrada: aplicar el teorema del rotor directamente sobre la media circunferencia está mal. Hay que cerrarla, aplicar el teorema y restar la integral sobre el segmento agregado, recorrido en el sentido que le toca.

16/8/22, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie abierta Σ definida por las condiciones

$x + y + 2z = 4 \wedge x + y \leq 2 \wedge y \leq x \wedge y \geq 0$

y orientada de modo que el versor normal apunte hacia z^+.

> **Respuesta:** $\Phi = 2$ (con $\vec{N} = (1/2, 1/2, 1)$, que apunta hacia z^+).
>
> **Planteo:** Σ es un pedazo del plano $x + y + 2z = 4$. Las otras tres condiciones no tienen z, así que lo que hacen es recortar la proyección D de Σ sobre el plano xy. $\Phi = \iint_\Sigma \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{f}(\vec{X}(x, y)) \cdot (\vec{X}_x \times \vec{X}_y)\, dx\, dy$, con la normal orientada como pide el enunciado.
>
> **Proyección D:** $y \geq 0$, $y \leq x$, $x + y \leq 2$. La recta $y = x$ corta a $x + y = 2$ en $(1, 1)$ y el eje $y = 0$ la corta en $(2, 0)$: D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$. Conviene tipo II: **$D = \{0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 2 - y\}$**.
>
> **Parametrización:** despejando z, $\vec{X}(x, y) = \left(x, y, \frac{4 - x - y}{2}\right)$, $(x, y) \in D$, que es C^1. $\vec{X}_x = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{X}_y = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.
>
> **Orientación:** la tercera componente de $\vec{N}$ es $1 > 0$, o sea que $\vec{N}$ apunta hacia z^+, que es lo pedido. Se usa tal cual, sin cambiar el signo.
>
> **$\vec{f} \cdot \vec{N}$:** sobre Σ, $\vec{f}(\vec{X}) = \left(x, y, \frac{4 - x - y}{2}\right)$, así que $\vec{f} \cdot \vec{N} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{4 - x - y}{2} = 2$. Es constante.
>
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^1 \int_y^{2 - y} 2\, dx\, dy = \int_0^1 2(2 - 2y)\, dy = [4y - 2y^2]_0^1 = 2$ (es 2 por el área de D, que vale 1).
>
> **Resultado: $\Phi = 2$.**
>
> **Control:** el versor normal es $\hat{n} = (1, 1, 2)/\sqrt{6}$ y sobre el plano $\vec{f} \cdot \hat{n} = (x + y + 2z)/\sqrt{6} = 4/\sqrt{6}$; el área de Σ es $\iint_D \|\vec{N}\|\, dx\, dy = 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$. Flujo $= (4/\sqrt{6}) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 2$ ✓.
>
> **Trampa:** no reemplazar z por $\frac{4 - x - y}{2}$ dentro de $\vec{f}$ antes del producto escalar (queda una integral en tres variables sobre una región de dos). Y dibujá D antes de poner límites: en orden dy dx habría que partir en $x = 1$ porque el techo cambia ($y = x$ y después $y = 2 - x$); en orden dx dy sale de una.

Ejercicio 2. Halle la masa de la placa que ocupa la región del plano

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 8x + 4y - 4 \wedge y \leq 2\}$,

siendo la densidad de masa proporcional a la distancia del punto al eje y.

> **Respuesta:** D: mitad inferior de la elipse $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} \leq 1$. $M = \pi k$.
>
> **Completar cuadrados:** $4x^2 - 8x + y^2 - 4y + 4 \leq 0 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \leq 4 \Rightarrow 4(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow$ **$(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} \leq 1$**.
>
> **La región (dibujo):** es una elipse de centro $(1, 2)$ con semieje 1 en la dirección x y semieje 2 en la dirección y (ocupa $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$). La recta $y = 2$ es horizontal y pasa por el centro: D es la **mitad de abajo** de la elipse, entre $y = 0$ e $y = 2$.
>
> **Densidad:** La distancia al eje y es $|x|$; en D vale $0 \leq x \leq 2$, así que $\delta = kx$, $k > 0$.
>
> **Cambio de variables (polares elípticas):** $x = 1 + r \cos\theta$, $y = 2 + 2r \operatorname{sen}\theta$, con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Así la

desigualdad de la elipse queda $r^2 \le 1$. Jacobiano: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos^2\theta + 2r\,\mathrm{sen}^2\theta = 2r$ (es $a \cdot b \cdot r$ con los semiejes). La condición $y \le 2$ es $2r\,\mathrm{sen}\,\theta \le 0$, o sea $\mathrm{sen}\,\theta \le 0$: $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Región transformada: el rectángulo $[0,1] \times [\pi, 2\pi]$.

Cuenta: $M = \int_\pi^{2\pi} \int_0^1 k(1 + r\cos\theta) \cdot 2r\,dr\,d\theta$. En r: $k[r^2 + \dfrac{2r^3}{3}\cos\theta]_0^1 = k(1 + \dfrac{2}{3}\cos\theta)$. En θ: $k[\theta + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta]_\pi^{2\pi} = k(2\pi - \pi) + \dfrac{2k}{3}(\mathrm{sen}\,2\pi - \mathrm{sen}\,\pi) = \pi k$.

Resultado: $M = \boldsymbol{\pi k}$.

Control: cartesianas, $D = \{0 \le x \le 2,\ 2 - 2\sqrt{1 - (x-1)^2} \le y \le 2\}$: $\int_0^2 kx \cdot 2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \pi k$ ✓. También a ojo: la media elipse es simétrica respecto de $x = 1$, así que el x promedio es 1, y su área es $\dfrac{\pi \cdot 1 \cdot 2}{2} = \pi$; $M = k \cdot 1 \cdot \pi$ ✓.

Trampa: el jacobiano de las polares elípticas es $2r$ (el producto de los semiejes por r), no r: con r solo da la mitad. Además el semiplano $y \le 2$ corta por el centro, así que es media elipse (θ de π a 2π). Y la densidad es la distancia al eje *y*, o sea $|x|$.

Ejercicio 3. Sea $\vec{g}(x,y) = (2x, 2y^2 + 2x^2y + 1)$. Halle $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{f}(x,y) = \mu(y)\vec{g}(x,y)$ admita función potencial y $\vec{f}(0,0) = (0,2)$. Para la función μ hallada, calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ siendo C un arco de curva suave con punto inicial (0, 0) y punto final (2, 0).

Respuesta: $\mu(y) = 2e^{y^2}$; $\vec{f} = \nabla\varphi$ con $\varphi(x,y) = 2x^2e^{y^2} + 2ye^{y^2}$; $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2,0) - \varphi(0,0) = 8$, para cualquier arco suave C de (0, 0) a (2, 0).

Planteo: $\vec{f} = (P, Q)$ con $P = 2x\mu(y)$ y $Q = \mu(y)(2y^2 + 2x^2y + 1)$. Con $\mu \in C^1$, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo; ahí $\vec{f}$ admite función potencial si y sólo si $Q'_x = P'_y$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Derivadas cruzadas: $Q'_x = \mu(y) \cdot 4xy$; $P'_y = 2x\mu'(y)$. Igualando: $2x(2y\mu(y) - \mu'(y)) = 0$ para todo (x, y). Tomando $x \neq 0$ queda la EDO $\boldsymbol{\mu' = 2y\mu}$.

EDO (variables separables): $\mu \equiv 0$ es solución, pero daría $\vec{f} = \vec{0}$ y no cumple $\vec{f}(0,0) = (0,2)$. Si $\mu \neq 0$: $\mu'/\mu = 2y \Rightarrow \ln|\mu| = y^2 + k \Rightarrow \mu(y) = Ce^{y^2}$.

Condición inicial: $\vec{f}(0,0) = \mu(0) \cdot \vec{g}(0,0) = \mu(0)(0,1) = (0, \mu(0))$, y tiene que ser (0, 2): $\mu(0) = C = 2$. Entonces $\boldsymbol{\mu(y) = 2e^{y^2}}$ (control: $\mu' = 4ye^{y^2} = 2y \cdot \mu$).

Campo: $\vec{f}(x,y) = (4xe^{y^2}, 2e^{y^2}(2y^2 + 2x^2y + 1))$, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

Función potencial: $\varphi'_x = 4xe^{y^2} \Rightarrow \varphi = 2x^2e^{y^2} + h(y)$. Derivando en y: $\varphi'_y = 4x^2ye^{y^2} + h'(y)$, y tiene que dar $4x^2ye^{y^2} + (4y^2 + 2)e^{y^2}$; así $h'(y) = (4y^2 + 2)e^{y^2} = (2ye^{y^2})'$ y $h(y) = 2ye^{y^2}$. $\boldsymbol{\varphi(x,y) = 2x^2e^{y^2} + 2ye^{y^2}}$, y exhibirla ya prueba que $\vec{f}$ es de gradientes.

Circulación: como $\vec{f} = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$ y C es un arco suave de (0, 0) a (2, 0), la integral no depende del camino: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2,0) - \varphi(0,0) = 2 \cdot 4 \cdot e^0 + 0 - 0 = \boldsymbol{8}$.

Trampa: la condición inicial es sobre $\vec{f}$, no sobre μ: $\vec{f}(0,0) = \mu(0)(0,1)$, por eso $\mu(0) = 2$ y no 1. Y no hace falta conocer C: sólo importan sus extremos.

Ejercicio 4. Calcule el flujo de $\vec{f}(x,y,z) = (-x, 2y + z, y^2 + z)$ a través de la frontera del cuerpo
$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - y^2 \wedge x^2 + y^2 \le 4 \wedge 0 \le x \le y\}$,
orientada de modo que las normales apunten hacia afuera de H.

Respuesta: $\Phi = 3\pi - 2$ (normales hacia afuera de H).

Planteo: se pide el flujo saliente por la frontera (cerrada) de H: Gauss, $\Phi = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.
Hipótesis del teorema: $\vec{f} = (-x, 2y + z, y^2 + z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado y su frontera es cerrada y suave a trozos (piso $z = 0$, techo $z = 4 - y^2$, planos $x = 0$ y $x = y$, cilindro $x^2 + y^2 = 4$), con la normal exterior, que es la pedida.
Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x(-x) + \partial_y(2y + z) + \partial_z(y^2 + z) = -1 + 2 + 1 = 2$.
La región: la sombra es $D = \{x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}$: $x \ge 0$ y $x \le y$ dejan el ángulo entre la recta $y = x$ ($\theta = \pi/4$) y el eje y ($\theta = \pi/2$). $D = \{\pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2\}$. Sobre D, z va de 0 a $4 - y^2 \ge 0$ (porque $|y| \le 2$).
Cuenta: $\Phi = 2\iint_D (4 - y^2)\, dA = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^2 (4 - r^2\,\mathrm{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Interior: $[2r^2 - \frac{r^4}{4}\mathrm{sen}^2\theta]_0^2 = 8 - 4\mathrm{sen}^2\theta = 6 + 2\cos 2\theta$. Exterior: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (6 + 2\cos 2\theta)\, d\theta = [6\theta + \mathrm{sen}\, 2\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = (3\pi + 0) - (\frac{3\pi}{2} + 1) = \frac{3\pi}{2} - 1$.
Resultado: $\Phi = 3\pi - 2$.
Gráfico: cuña sobre el sector de 45° entre la recta $y = x$ y el eje y, con techo en el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$; normales saliendo del sólido en las cinco caras.
Control por caras: con la normal exterior en cada cara: piso $-\frac{\pi}{2} - 1$, techo $4\pi + 4 + \frac{16\sqrt{2}}{3}$, plano $x = 0$: 0, plano $x = y$: $-9 - \frac{86\sqrt{2}}{15}$, cilindro $4 + \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\pi}{2}$; suman $3\pi - 2$ ✓. Es el mismo número que el tema 1 (es el mismo sólido con x e y intercambiados).
Trampa: el sector correcto es $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ ($x \le y$ es la parte de arriba de la recta $y = x$), no $0 \le \theta \le \pi/4$.

Ejercicio 5. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x^2z - y, x + y^3e^y, z^2)$ a lo largo de la porción de la curva $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ contenida en el semiespacio $y \ge 0$, donde
$\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z = 0 \wedge \Sigma_2 : x^2 + y^2 + z = 18$.
Indique en un gráfico el sentido de recorrido de la curva que considera en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo de (3, 0, 9) a (−3, 0, 9) por (0, 3, 9) (antihorario visto desde arriba): $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 9\pi - 162 \approx -133{,}73$. En el sentido contrario, $162 - 9\pi$.
Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x^2z - y$, $Q = x + y^3e^y$, $R = z^2$: $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
La curva: de Σ_1, $z = x^2 + y^2$; en Σ_2: $2(x^2 + y^2) = 18 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es la circunferencia de radio 3 en el plano $z = 9$, y C es su mitad con $y \ge 0$: un arco **abierto** de (3, 0, 9) a (−3, 0, 9) pasando por (0, 3, 9).
Cerrar la curva: el teorema del rotor pide una curva cerrada, así que agrego el diámetro L de (−3, 0, 9) a (3, 0, 9). $C \cup L$ es el borde del semidisco S: $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$, $z = 9$, que es plano (suave, orientable, acotado); con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ vale el teorema en S.
Orientación: elijo C de (3, 0, 9) a (−3, 0, 9) pasando por (0, 3, 9), o sea en sentido antihorario mirando desde arriba; para que $C \cup L$ sea una curva cerrada con ese sentido, L va de (−3, 0, 9) a (3, 0, 9). Regla de la mano derecha: la normal compatible de S es $\vec{n} = (0, 0, 1)$. En el gráfico: la semicircunferencia en el plano $z = 9$ con flecha de (3, 0) hacia (−3, 0) por arriba ($y > 0$) y el diámetro sobre el eje x con flecha hacia x creciente.
Rotor: $R'_y - Q'_z = 0$; $P'_z - R'_x = x^2 - 0 = x^2$; $Q'_x - P'_y = 1 - (-1) = 2$. **$\mathrm{rot}\,\vec{f} = (0, x^2, 2)$.**
Flujo: $\mathrm{rot}\,\vec{f}\cdot\vec{n} = 2$, constante: $\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{f}\cdot\vec{n}\, dS = 2 \cdot \text{área}(S) = 2 \cdot 9\pi/2 = 9\pi$.
Tramo agregado: L: $\vec{r}(t) = (t, 0, 9)$, $t \in [-3, 3]$, $\vec{r}' = (1, 0, 0)$. $\vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}' = P(t, 0, 9) = 9t^2$. Primitiva $3t^3$: $\int_{-3}^{3}$

$9t^2\,dt = [3t^3]_{-3}^{3} = 81 + 81 = 162$.
Cuenta: $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_L \vec{f}\cdot d\vec{s} = 9\pi \Rightarrow \int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 9\pi - 162$.
Resultado: recorriendo de (3, 0, 9) a (–3, 0, 9) por (0, 3, 9): $\boldsymbol{\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 9\pi - 162} \approx -133{,}73$ (en el sentido contrario, $162 - 9\pi$).
Control directo: con $\vec{r}(\theta) = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 9)$, $\theta \in [0, \pi]$, el término y^3e^y aporta $\int_0^{\pi} h(\text{sen}\,\theta)\cos\theta\,d\theta = 0$ (con $u = \text{sen}\,\theta$, va de 0 a 0) y lo demás da lo mismo.
Trampa: C no es cerrada: aplicar el teorema del rotor directamente sobre la media circunferencia está mal. Hay que cerrarla, aplicar el teorema y restar la integral sobre el segmento agregado, recorrido en el sentido que le toca.

9/8/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del sólido $H \subset \mathbb{R}^3$ definido por las condiciones
$x^2 + y^2 - 4y \le 0 \wedge x - 4 \le z \le 4 - x$.
Haga un gráfico de H.

> **Respuesta:** $V = 32\pi$ (≈ 100,53). H: cilindro vertical sobre el disco de centro (0, 2) y radio 2, entre $z = x - 4$ (abajo) y $z = 4 - x$ (arriba), simétrico respecto de $z = 0$.
>
> **Planteo:** H es un sólido cilíndrico vertical sobre el disco $x^2 + y^2 - 4y \le 0$, entre los planos $z = x - 4$ y $z = 4 - x$. $V = \iint_D [(4 - x) - (x - 4)]\, dxdy = \iint_D (8 - 2x)\, dxdy$.
> **Gráfico de H:** $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ equivale a $x^2 + (y - 2)^2 \le 4$: disco de centro (0, 2) y radio 2, tangente al eje x en el origen; sobre él se levanta un cilindro circular vertical. Los planos $z = x - 4$ y $z = 4 - x$ contienen los dos a la recta $x = 4$, $z = 0$ (paralela al eje y) y son simétricos respecto del plano $z = 0$: forman una cuña que se abre hacia el lado donde x decrece. Esa recta queda afuera del cilindro (en el disco x va de −2 a 2), así que el techo $4 - x$ siempre está por encima del piso $x - 4$: con $x \in [-2, 2]$, el techo va de 2 (en $x = 2$) a 6 (en $x = -2$) y el piso de −2 a −6. H es un "tronco de cilindro" cortado arriba y abajo por dos tapas oblicuas, simétrico respecto de $z = 0$. (Para el dibujo: el cilindro, la tapa superior inclinada bajando hacia x positivo y la inferior subiendo hacia x positivo.)
> **Coordenadas:** cilíndricas corridas al centro, $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $x - 4 \le z \le 4 - x$; la integral en z da la altura $8 - 2r\cos\theta$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $4r^2 - \frac{2r^3}{3}\cos\theta$, entre 0 y 2: $16 - \frac{16}{3}\cos\theta$. En θ, el término con cos θ integra 0 en una vuelta completa: queda $16 \cdot 2\pi$.
> **Resultado: $V = 32\pi$** ≈ 100,53.
> **Control (polares en el origen):** la circunferencia es $r = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $0 \le \theta \le \pi$. $V = \int_0^{\pi} \int_0^{4\,\mathrm{sen}\,\theta} (8 - 2r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} (64\,\mathrm{sen}^2\theta - \frac{128}{3}\,\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta)\, d\theta = 64 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{128}{3}\left[\frac{\mathrm{sen}^4\theta}{4}\right]_0^{\pi} = 32\pi$ ✓. Y a ojo: el promedio de $8 - 2x$ sobre un disco centrado en $x = 0$ es 8, así que $V = 8 \cdot$(área 4π) $= 32\pi$.
> **Trampa:** la altura es la diferencia $(4 - x) - (x - 4) = 8 - 2x$, no $4 - x$ (eso es sólo la mitad de arriba de $z = 0$); y hay que verificar que el piso no cruce al techo adentro del cilindro antes de restar.

Ejercicio 2. Sea D la región encerrada entre las curvas de ecuaciones $y^2 - 2y - x = 0$ y $x = 3$. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que
$\oint_{\partial D^+} 4ay\, dx + a^2x\, dy$
sea mínima y halle ese valor extremo.

> **Respuesta:** $\oint = \frac{32}{3}(a^2 - 4a)$; mínimo en **$a = 2$**, con valor **$-128/3$**.
>
> **La región:** $x = y^2 - 2y$ es la parábola $x = (y - 1)^2 - 1$, acostada, con vértice (−1, 1); la corta $x = 3$ donde $y^2 - 2y - 3 = 0$, o sea $y = -1$ e $y = 3$. $D = \{(x, y) : -1 \le y \le 3,\ y^2 - 2y \le x \le 3\}$. Es compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos (un arco de parábola y un segmento).
> **Hipótesis de Green:** para cada $a \in \mathbb{R}$, $P = 4ay$ y $Q = a^2x$ son polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^2$; ∂D^+ es el borde en sentido antihorario (por la recta $x = 3$ de (3, −1) a (3, 3), y de vuelta por la parábola pasando por el vértice).

Rotor: $Q'_x = a^2$, $P'_y = 4a$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = a^2 - 4a}$, constante. Entonces $\oint_{\partial D^+} 4ay\,dx + a^2x\,dy = \iint_D (a^2 - 4a)\,dA = (a^2 - 4a) \cdot \text{área}(D)$.

Área: $\text{área}(D) = \int_{-1}^{3} (3 - y^2 + 2y)\,dy = [3y + y^2 - \frac{y^3}{3}]_{-1}^{3} = 9 - (-\frac{5}{3}) = \frac{32}{3}$.

La función a minimizar: $I(a) = \frac{32}{3}(a^2 - 4a)$, una parábola en a con coeficiente principal positivo. $I'(a) = \frac{32}{3}(2a - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, e $I''(a) = \frac{64}{3} > 0$: es el mínimo (absoluto, por ser una parábola que abre hacia arriba).

Resultado: la circulación es mínima para $\mathbf{a = 2}$ y el valor mínimo es $I(2) = \frac{32}{3}(4 - 8) = \mathbf{-\frac{128}{3}}$.

Trampa: el valor extremo es el de la circulación, no el de $a^2 - 4a$: falta multiplicar -4 por el área.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por las condiciones $y - x^2 = 1$, $y \le 5$ y $0 \le z \le 2$ orientada de modo que el versor normal en $(0, 1, 0)$ sea $\check{\jmath}$.
Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,d\sigma$ con $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, ze^x)$.

Respuesta: $\Phi = -8/3$ (con $\vec{N} = (-2x, 1, 0)$, que en $(0, 1, 0)$ es $\vec{\jmath}$).

Planteo: $y = 1 + x^2$ es un cilindro parabólico (generatrices paralelas al eje z) con vértice en la recta $x = 0$, $y = 1$, abierto hacia y positivo. $y \le 5$ da $x^2 \le 4$, o sea $-2 \le x \le 2$; y $0 \le z \le 2$.
Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 1 + x^2, z)$, $D = [-2, 2] \times [0, 2]$.
Normal: $\vec{X}_x = (1, 2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (2x, -1, 0)$.
Orientación: el punto $(0, 1, 0)$ corresponde a $x = 0$, $z = 0$, y ahí $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (0, -1, 0) = -\vec{\jmath}$: es la opuesta.
Cambio el orden: $\vec{N} = \vec{X}_z \times \vec{X}_x = (-2x, 1, 0)$, que en $(0, 1, 0)$ vale $\vec{\jmath}$ ✓ (apunta hacia adentro de la parábola).
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, 1 + x^2, z\,e^x)$; la tercera componente no aporta ($\vec{N}$ es horizontal): $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2x^2 + 1 + x^2 = 1 - x^2$.

Cuenta: $\Phi = \int_{-2}^{2} \int_0^2 (1 - x^2)\,dz\,dx = 2\,[x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = 2(4 - \frac{16}{3}) = -\frac{8}{3}$.

Resultado: $\Phi = \mathbf{-8/3}$.
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 2 + e^x$ (C^1 en $\mathbb{R}^3$). Sólido $W = \{1 + x^2 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 2\}$; su normal saliente sobre Σ es $-\vec{N}$. $\iiint (2 + e^x)\,dV = \frac{128}{3} + 4e^2 + 12e^{-2}$. Tapas: $y = 5$ ($\vec{\jmath}$): $\vec{f} \cdot \vec{\jmath} = 5$ por área 8, da 40; $z = 0$: 0; $z = 2$ ($\vec{k}$): $2e^x$, da $4e^2 + 12e^{-2}$. Saliente por Σ: $\frac{128}{3} - 40 = \frac{8}{3}$, así que $\Phi = -\frac{8}{3}$ ✓.
Trampa: quedarse con $\vec{X}_x \times \vec{X}_z$ sin evaluarla en $(0, 1, 0)$: da el signo contrario.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (x\,g(x), y\,g(x), 1 - 3z\,g(x))$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$. Halle g para que $\vec{f}(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, la divergencia de $\vec{f}$ sea constante y el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de un cubo H de arista 2 sea 16, cuando ∂H se orienta tomando la normal entrante a H.

Respuesta: $g(x) = 2 - 2x$ ($\operatorname{div} \vec{f} = -2$).

Divergencia: $\partial(x\,g(x))/\partial x + \partial(y\,g(x))/\partial y + \partial(1 - 3z\,g(x))/\partial z = (g + xg') + g - 3g = xg'(x) - g(x)$.
Divergencia constante: $xg' - g = k$ para cierta constante k.
Flujo por Gauss: el cubo H es acotado y su frontera es cerrada y suave a trozos (6 caras); $\vec{f}$ es C^1 porque g lo es. Con normal saliente, $\Phi_{sal} = \iiint_H k\,dV = k \cdot 2^3 = 8k$, esté donde esté el cubo (por eso el enunciado pide div constante: si no, el flujo dependería de la posición). Con la normal **entrante** el flujo es $-8k = 16$, así que $k = -2$.

EDO: $xg' - g = -2$. Para $x \neq 0$, dividiendo por x^2: $(g/x)' = (xg' - g)/x^2 = -2/x^2$. Integrando: $g/x = 2/x + C$, o sea $g(x) = 2 + Cx$. Esto vale en $x > 0$ y en $x < 0$ por separado, con constantes C_1 y C_2; como g es C^1 en 0, $g'(0^+) = g'(0^-)$ obliga $C_1 = C_2$. Control: $x \cdot C - (2 + Cx) = -2$ ✓ (también en $x = 0$).
Condición puntual: $\vec{f}(1, 0, 0) = (1 \cdot g(1), 0 \cdot g(1), 1 - 0) = (g(1), 0, 1) = (0, 0, 1) \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$.
Resultado: $g(x) = 2 - 2x$, con $\nabla \cdot \vec{f} = -2$ y flujo entrante $-2 \cdot 8 \cdot (-1) = 16$ ✓.
Trampa: la normal es **entrante**: el flujo saliente es -16. Si no cambiás el signo sale $k = 2$ y $g = 2x - 2$, que da flujo entrante -16.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ tal que $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $C^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva $X = (1 + 2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 1 + \mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, \pi]$, con la orientación dada por la parametrización, sabiendo que:
1. $\varphi(x, 0, 1) = x^2$;
2. $\vec{g}(x, 0, 1) = (1, x, 2)$;
3. $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x, 2z - y, 0)$.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8 + (-2\pi - 4) = -12 - 2\pi \approx -18{,}28$.
Planteo: por linealidad, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{s} + \int_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$. La curva no es cerrada: arranca en $\vec{X}(0) = (3, 0, 1)$ y termina en $\vec{X}(\pi) = (-1, 0, 1)$.
Cómo es la curva: $x - 1 = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\, t$ y $z - 1 = \mathrm{sen}\, t = y/2$. Está en el plano **$z = 1 + y/2$** y su proyección sobre el plano xy es la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$ (en $[0, \pi]$ es $\mathrm{sen}\, t \geq 0$), recorrida en sentido antihorario de $(3, 0)$ a $(-1, 0)$.
Parte de gradiente: $\varphi \in C^2$, así que $\nabla\varphi$ es continuo y su circulación sólo depende de los extremos: $\int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(3, 0, 1) = (-1)^2 - 3^2 = \mathbf{-8}$. Los dos extremos tienen $y = 0$, $z = 1$, justo donde el dato 1 nos da φ.
Parte de $\vec{g}$: hay que cerrar la curva. De $\vec{g}$ sólo conocemos el rotor y sus valores sobre la recta $y = 0$, $z = 1$. Cerramos con el segmento L que va de $(-1, 0, 1)$ a $(3, 0, 1)$, que está sobre esa recta: $\vec{\sigma}(x) = (x, 0, 1)$, $x \in [-1, 3]$, $\vec{\sigma}' = (1, 0, 0)$. Con el dato 2: $\int_L \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{3} (1, x, 2) \cdot (1, 0, 0)\, dx = \int_{-1}^{3} 1\, dx = [x]_{-1}^{3} = \mathbf{4}$.
Superficie elegida: $C \cup L$ es una curva cerrada simple, suave a trozos, y está entera en el plano $z = 1 + y/2$ (el segmento también: $y = 0$, $z = 1$). Tomo Σ: $z = 1 + y/2$ con $(x, y) \in D = \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, el medio disco de radio 2, de área 2π. Stokes vale para *cualquier* superficie regular con ese borde, así que elijo la más cómoda: el pedazo de plano, que tiene normal constante.
Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato); Σ es un trozo de plano, regular y orientable; su borde $C \cup L$ es una curva cerrada, simple y suave a trozos.
Orientación compatible: mirado desde arriba (desde z positivo), $C \cup L$ se recorre en sentido antihorario: por el arco de $(3, 0)$ a $(-1, 0)$ pasando por arriba y de vuelta por el eje x. Si cerrás los dedos de la mano derecha siguiendo ese giro, el pulgar apunta hacia z positivo: la normal compatible es la que sube, $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, -1/2, 1)$ (sin normalizar: ya trae el factor de $d\sigma$, así que se integra en $dx\, dy$).
Flujo del rotor: sobre Σ es $2z - y = 2 + y - y = 2$, entonces $\nabla \times \vec{g} = (x, 2, 0)$ y $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = 0 - 1 + 0 = -1$. $\iint_\Sigma (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_D (-1)\, dx\, dy = -\text{área}(D) = \mathbf{-2\pi}$.
Despeje: por Stokes, $\int_C \vec{g} \cdot d\vec{s} + \int_L \vec{g} \cdot d\vec{s} = -2\pi$, así que $\int_C \vec{g} \cdot d\vec{s} = -2\pi - 4$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8 + (-2\pi - 4) = \mathbf{-12 - 2\pi} \approx -18{,}28$.
Trampa: el segmento tiene que seguir a la curva (de $(-1, 0, 1)$ a $(3, 0, 1)$) para que $C \cup L$ quede cerrada

> con un solo sentido, y su aporte se *resta* al final. Y no sirve cerrar con cualquier camino: sólo con uno donde conozcas $\vec{g}$, por eso el segmento sobre $y = 0$, $z = 1$.

9/8/22, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea Σ la superficie definida por las condiciones $x - y^2 = 1$, $x \le 5$ y $0 \le z \le 2$ orientada de modo que el versor normal en (1, 0, 0) sea $\check{\imath}$.
Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$ con $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, ze^y)$.

> **Respuesta:** $\Phi = -8/3$ (con $\vec{N} = (1, -2y, 0)$, que en (1, 0, 0) es $\vec{\imath}$).
>
> **Planteo:** $x = 1 + y^2$ es un cilindro parabólico (generatrices paralelas al eje z) con vértice en la recta $x = 1$, $y = 0$, abierto hacia x positivo. $x \le 5$ da $y^2 \le 4$, o sea $-2 \le y \le 2$; y $0 \le z \le 2$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(y, z) = (1 + y^2, y, z)$, $D = [-2, 2] \times [0, 2]$.
> **Normal:** $\vec{X}_y = (2y, 1, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_y \times \vec{X}_z = (1, -2y, 0)$.
> **Orientación:** (1, 0, 0) corresponde a $y = 0$, $z = 0$, y ahí $\vec{N} = (1, 0, 0) = \vec{\imath}$: es la pedida, no cambio el signo. (Apunta hacia adentro de la parábola, hacia el lado $x > 1 + y^2$.)
> **Producto escalar:** $\vec{f}(\vec{X}) = (1 + y^2, y, z\,e^y)$; como $\vec{N}$ tiene tercera componente 0, $z\,e^y$ no aporta: $\vec{f} \cdot \vec{N} = 1 + y^2 - 2y^2 = 1 - y^2$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{2} (1 - y^2)\, dz\, dy = 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(4 - \frac{16}{3}\right) = -\frac{8}{3}$.
>
> **Resultado:** $\Phi = \mathbf{-8/3}$.
> **Control con Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{div} \vec{f} = 2 + e^y$. Cierro con el sólido $W = \{1 + y^2 \le x \le 5,\ 0 \le z \le 2\}$; su normal saliente sobre Σ es $-\vec{N}$ (en el vértice apunta a $-\vec{\imath}$), así que $\Phi = -$(flujo saliente por Σ). $\iiint_W (2 + e^y)\, dV = 2 \int_{-2}^{2} (4 - y^2)(2 + e^y)\, dy = \frac{128}{3} + 4e^2 + 12e^{-2}$ (primitiva de $(4 - y^2)e^y$: $e^y(2 + 2y - y^2)$). Tapas: $x = 5$ ($\vec{\imath}$): $\vec{f} \cdot \vec{\imath} = 5$ por área 8, da 40; $z = 0$ ($-\vec{k}$): $-z\,e^y = 0$; $z = 2$ ($\vec{k}$): $2e^y$, da $2 \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, e^y\, dy = 4e^2 + 12e^{-2}$.
> Saliente por Σ: $\frac{128}{3} - 40 = \frac{8}{3}$; entonces $\Phi = -\frac{8}{3}$ ✓ (las exponenciales se cancelan).
> **Trampa:** la normal pedida apunta hacia adentro del sólido que se arma cerrando con $x = 5$: si usás Gauss sin dar vuelta el signo, sale +8/3.

Ejercicio 2. Calcule el volumen del sólido $H \subset \mathbb{R}^3$ definido por las condiciones
$x^2 - 4x + y^2 \le 0 \wedge y - 4 \le z \le 4 - y$.
Haga un gráfico de H.

> **Respuesta:** $V = 32\pi$ ($\approx 100{,}53$). H: cilindro vertical sobre el disco de centro (2, 0) y radio 2, entre $z = y - 4$ (abajo) y $z = 4 - y$ (arriba), simétrico respecto de $z = 0$.
>
> **Planteo:** H es un sólido cilíndrico vertical sobre el disco $x^2 - 4x + y^2 \le 0$, entre los planos $z = y - 4$ y $z = 4 - y$. $V = \iint_D [(4 - y) - (y - 4)]\, dxdy = \iint_D (8 - 2y)\, dxdy$.
> **Gráfico de H:** $x^2 - 4x + y^2 \le 0$ equivale a $(x - 2)^2 + y^2 \le 4$: disco de centro (2, 0) y radio 2, tangente al eje y en el origen; sobre él se levanta un cilindro circular vertical. Los planos $z = y - 4$ y $z = 4 - y$ contienen los dos a la recta $y = 4$, $z = 0$ (paralela al eje x) y son simétricos respecto del plano $z = 0$: forman una cuña que se abre hacia el lado donde y decrece. Esa recta queda afuera del cilindro (en el disco y va de -2 a 2), así que el techo $4 - y$ siempre está por encima del piso $y - 4$: con $y \in [-2, 2]$, el techo va de 2 (en $y = 2$) a 6 (en $y = -2$) y el piso de -2 a -6. H es un "tronco de cilindro" cortado arriba y abajo por dos tapas oblicuas, simétrico respecto de $z = 0$. (Para el dibujo: el cilindro, la tapa superior inclinada bajando hacia y positivo y la inferior subiendo hacia y positivo.)

Coordenadas: cilíndricas corridas al centro, $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $y - 4 \le z \le 4 - y$; la integral en z da la altura $8 - 2r\operatorname{sen}\theta$.

Cuenta: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8 - 2r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $4r^2 - \frac{2r^3}{3}\operatorname{sen}\theta$, entre 0 y 2: $16 - \frac{16}{3}\operatorname{sen}\theta$. En θ, el término con sen θ integra 0 en una vuelta completa: queda $16\cdot 2\pi$.

Resultado: $V = 32\pi \approx 100{,}53$.

Control (polares en el origen): la circunferencia es $r = 4\cos\theta$ con $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}(8 - 2r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(64\cos^2\theta - \frac{128}{3}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 64\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{128}{3}\left[\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 32\pi$ ✓. Y a ojo: el promedio de $8 - 2y$ sobre un disco centrado en $y = 0$ es 8, así que $V = 8\cdot(\text{área } 4\pi) = 32\pi$.

Trampa: la altura es la diferencia $(4 - y) - (y - 4) = 8 - 2y$, no $4 - y$ (eso es sólo la mitad de arriba de $z = 0$); y hay que verificar que el piso no cruce al techo adentro del cilindro antes de restar.

Ejercicio 3. Sea D la región encerrada entre las curvas de ecuaciones $y = 3$ y $x^2 - 2x - y = 0$. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que

$\oint_{\partial D^+} 4ay\, dx + a^2x\, dy$

sea mínima y halle ese valor extremo.

Respuesta: $\oint = \frac{32}{3}(a^2 - 4a)$; mínimo en **$a = 2$**, con valor **$-128/3$**.

La región: $y = x^2 - 2x$ es la parábola $(x - 1)^2 - 1$, con vértice $(1, -1)$; la corta $y = 3$ donde $x^2 - 2x - 3 = 0$, o sea $x = -1$ y $x = 3$. $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 3,\ x^2 - 2x \le y \le 3\}$. Es compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos (un arco de parábola y un segmento).

Hipótesis de Green: para cada $a \in \mathbb{R}$, $P = 4ay$ y $Q = a^2x$ son polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^2$; ∂D^+ es el borde en sentido antihorario (por la parábola de $(-1, 3)$ a $(3, 3)$ pasando por el vértice, y de vuelta por la recta $y = 3$).

Rotor: $Q'_x = a^2$, $P'_y = 4a$, **$Q'_x - P'_y = a^2 - 4a$**, constante. Entonces $\oint_{\partial D^+} 4ay\, dx + a^2x\, dy = \iint_D (a^2 - 4a)\, dA = (a^2 - 4a)\cdot\text{área}(D)$.

Área: $\text{área}(D) = \int_{-1}^{3}(3 - x^2 + 2x)\, dx = \left[3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

La función a minimizar: $I(a) = \frac{32}{3}(a^2 - 4a)$, una parábola en a con coeficiente principal positivo. $I'(a) = \frac{32}{3}(2a - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, e $I''(a) = \frac{64}{3} > 0$: es el mínimo (absoluto, por ser una parábola que abre hacia arriba).

Resultado: la circulación es mínima para **$a = 2$** y el valor mínimo es $I(2) = \frac{32}{3}(4 - 8) = \mathbf{-\frac{128}{3}}$.

Trampa: el valor extremo es el de la circulación, no el de $a^2 - 4a$: falta multiplicar -4 por el área.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (x\, g(y), y\, g(y), 1 - 3z\, g(y))$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$. Halle g para que $\vec{f}(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, la divergencia de $\vec{f}$ sea constante y el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de un cubo H de arista 2 sea 16, cuando ∂H se orienta tomando la normal entrante a H.

Respuesta: $g(y) = 2 - 2y$ ($\operatorname{div}\vec{f} = -2$).

Divergencia: $\partial(x\, g(y))/\partial x + \partial(y\, g(y))/\partial y + \partial(1 - 3z\, g(y))/\partial z = g + (g + yg') - 3g = yg'(y) - g(y)$.

Divergencia constante: $yg' - g = k$ para cierta constante k.

Flujo por Gauss: el cubo H es acotado y su frontera es cerrada y suave a trozos (6 caras); $\vec{f}$ es C^1 porque

g lo es. Con normal saliente, $\Phi_{sal} = \iiint_H k\,dV = k \cdot 2^3 = 8k$, esté donde esté el cubo (por eso el enunciado pide div constante: si no, el flujo dependería de la posición). Con la normal **entrante** el flujo es $-8k = 16$, así que $k = -2$.

EDO: $yg' - g = -2$. Para $y \neq 0$, dividiendo por y^2: $(g/y)' = (yg' - g)/y^2 = -2/y^2$. Integrando: $g/y = 2/y + C$, o sea $g(y) = 2 + Cy$. Esto vale en $y > 0$ y en $y < 0$ por separado, con constantes C_1 y C_2; como g es C^1 en 0, $g'(0^+) = g'(0^-)$ obliga $C_1 = C_2$. Control: $y \cdot C - (2 + Cy) = -2$ ✓ (también en $y = 0$).

Condición puntual: $\vec{f}(0, 1, 0) = (0 \cdot g(1), 1 \cdot g(1), 1 - 0) = (0, g(1), 1) = (0, 0, 1) \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$.

Resultado: g(y) = 2 − 2y, con $\nabla \cdot \vec{f} = -2$ y flujo entrante $-2 \cdot 8 \cdot (-1) = 16$ ✓.

Trampa: la normal es **entrante**: el flujo saliente es −16. Si no cambiás el signo sale $k = 2$ y $g = 2y - 2$, que da flujo entrante −16.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ tal que $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $C^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva $\vec{X} = (2\cos(t), 1 + 2\,\text{sen}(t), 1 + \cos(t))$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, con la orientación dada por la parametrización, sabiendo que:

1. $\varphi(0, y, 1) = y^2$;
2. $\vec{g}(0, y, 1) = (y, 1, 2)$;
3. $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x - 2z, y, 0)$.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8 + (2\pi + 4) = 12 + 2\pi \approx 18{,}28$.

Planteo: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{s} + \int_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$. La curva es abierta: $\vec{X}(-\pi/2) = (0, -1, 1)$ y $\vec{X}(\pi/2) = (0, 3, 1)$.

Cómo es la curva: $x = 2\cos t$, $y - 1 = 2\,\text{sen}\,t$, $z - 1 = \cos t = x/2$. Está en el plano **z = 1 + x/2** y se proyecta sobre la semicircunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ con $x \geq 0$ ($\cos t \geq 0$ en $[-\pi/2, \pi/2]$), recorrida en sentido antihorario de (0, −1) a (0, 3) pasando por (2, 1).

Parte de gradiente: $\varphi \in C^2$, $\nabla\varphi$ continuo, la circulación es la diferencia de potencial: $\varphi(0, 3, 1) - \varphi(0, -1, 1) = 3^2 - (-1)^2 =$ **8** (los extremos tienen $x = 0$, $z = 1$, donde vale el dato 1).

Parte de g: cerrar con un segmento. L va de (0, 3, 1) a (0, −1, 1) sobre la recta $x = 0$, $z = 1$, donde conocemos $\vec{g}$: $\vec{\sigma}(s) = (0, 3 - s, 1)$, $s \in [0, 4]$, $\vec{\sigma}' = (0, -1, 0)$. $\int_L \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^4 (3 - s, 1, 2) \cdot (0, -1, 0)\,ds = \int_0^4 (-1)\,ds = [-s]_0^4 =$ **−4**.

Superficie elegida: C ∪ L es cerrada, simple, suave a trozos y está en el plano $z = 1 + x/2$. Tomo Σ: $z = 1 + x/2$ sobre $D = \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 4, x \geq 0\}$, medio disco de área 2π. Stokes vale con cualquier superficie regular con ese borde; la plana es la cómoda porque su normal es constante.

Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, Σ es un trozo de plano regular y orientable, y su borde C ∪ L es una curva cerrada simple suave a trozos.

Orientación compatible: vista desde arriba, C ∪ L gira en sentido antihorario (sube por el arco de la derecha y baja por el eje y). Con la mano derecha siguiendo ese giro, el pulgar apunta a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-1/2, 0, 1)$, integrando en dx dy.

Flujo del rotor: sobre Σ es $x - 2z = x - 2 - x = -2$, así que $\nabla \times \vec{g} = (-2, y, 0)$ y $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = (-2)(-1/2) + 0 + 0 = 1$. $\iint_\Sigma (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n}\,d\sigma = \iint_D 1\,dx\,dy = \text{área}(D) =$ **2π**.

Despeje: $\int_C \vec{g} \cdot d\vec{s} + (-4) = 2\pi$, entonces $\int_C \vec{g} \cdot d\vec{s} = 2\pi + 4$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8 + 2\pi + 4 =$ **12 + 2π** $\approx 18{,}28$.

Trampa: el segmento va de (0, 3, 1) a (0, −1, 1), o sea hacia y decreciente: su integral es −4, no 4. Si lo recorrés al revés, la curva cerrada queda con sentidos encontrados y Stokes no aplica. Detalle del enunciado: la divergencia de $(x - 2z, y, 0)$ es 2, y el rotor de un campo C^1 tiene divergencia nula, así que estrictamente ningún $\vec{g}$ tiene ese rotor (en el tema 1 el dato análogo sí es coherente). Seguramente

> quisieron poner –y; como la normal del plano no tiene componente y, la cuenta es la misma con y o con –y.

2/8/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región definida por las condiciones $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 8$, $y \geq 1$, suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xz.

> **Respuesta:** $M = k\pi$ ($\delta = ky$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$ con $H = \{x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 8, y \geq 1\}$.
> **El cuerpo:** $x^2 + 4y^2 + z^2 = 8$ es un elipsoide centrado en el origen, de semiejes $2\sqrt{2}$ en x y en z, y $\sqrt{2}$ en y. Como x y z aparecen como $x^2 + z^2$, es de revolución alrededor del eje y. El plano $y = 1$ lo corta en $x^2 + 4 + z^2 = 8$, o sea la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$ (radio 2) en el plano $y = 1$. H es el casquete que queda del lado $y \geq 1$, entre $y = 1$ y la punta $y = \sqrt{2}$. Cada tajada $y = cte$ ($1 \leq y \leq \sqrt{2}$) es el disco $x^2 + z^2 \leq 8 - 4y^2$.
> **Densidad:** la distancia de (x, y, z) al plano xz ($y = 0$) es $|y|$, y en H es $y \geq 1 > 0$: $\delta = ky$.
> **Coordenadas:** cilíndricas con eje y: $x = r\cos\theta$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = y$. El jacobiano es r (es el de polares en el plano xz; la y no se toca), así que $dV = r\,dr\,d\theta\,dy$. La condición del elipsoide queda $r^2 + 4y^2 \leq 8$. Rangos: $1 \leq y \leq \sqrt{2}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(8 - 4y^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** $M = k\int_1^{\sqrt{2}} y \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{(8-4y^2)}} r\,dr\,d\theta\right] dy = k\int_1^{\sqrt{2}} y\cdot\pi(8 - 4y^2)\,dy$. Primitiva de $8y - 4y^3$: $4y^2 - y^4$. Entre 1 y $\sqrt{2}$: $(8 - 4) - (4 - 1) = 1$.
> **Resultado: $M = k\pi$.**
>
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 2$ (el radio de la tapa) y $1 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{(8 - r^2)}}{2}$. $M = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\left[\dfrac{y^2}{2}\right]_1^{\sqrt{(8-r^2)}/2} dr\,d\theta = 2\pi k\int_0^2 r\cdot\dfrac{4 - r^2}{8}\,dr = \dfrac{\pi k}{4}\left[2r^2 - \dfrac{r^4}{4}\right]_0^2 = \dfrac{\pi k}{4}\cdot 4 = k\pi$ ✓.
> **Trampa:** el eje de revolución es el y, no el z: si ponés cilíndricas en x, y te queda una raíz horrible. Y la distancia al plano xz es $|y|$ (no $|z|$).

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + x,\ 2x^3yz^2 - x^2,\ 2x^3y^2z)$
y C la curva definida por
$x^2 - 4x + y^2 = 0 \wedge x^2 + y^2 + z = 6$
recorrida de modo que en el punto (0, 0, 6) el versor tangente tenga segunda componente negativa.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -16\pi$ (C antihoraria vista desde arriba, como pide el enunciado).
>
> **Planteo:** C es cerrada (intersección de un cilindro con un paraboloide). Primero conviene ver si $\vec{f}$ es conservativo: $\mathrm{rot}\,\vec{f} = (0, 0, -2x) \neq \vec{0}$ (cuenta abajo), así que no hay potencial y la circulación no tiene por qué ser 0. Usamos el teorema del rotor.
> **La curva:** $x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$ (cilindro de eje vertical por (2, 0)). Sobre él, $x^2 + y^2 = 4x$, y entonces la segunda ecuación da $z = 6 - (x^2 + y^2) = \mathbf{6 - 4x}$: C es plana.
> **Superficie elegida:** el pedazo del plano $z = 6 - 4x$ que C encierra: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 6 - 4x)$, $(x, y) \in D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$. (También serviría el casquete del paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ sobre D: tiene el mismo borde y da lo mismo; el plano es más simple.) $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -4) \times (0, 1, 0) = (4, 0, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f}$ polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido de C:** en (0, 0, 6) el tangente es paralelo a $\nabla(x^2 - 4x + y^2) \times \nabla(x^2 + y^2 + z) = (-4, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, 4, 0)$. Con segunda componente negativa, $\vec{T} \parallel (0, -1, 0)$. (0, 0) es el punto de más a la izquierda de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ y ahí se baja: C es **antihoraria vista desde arriba**.

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (4, 0, 1)$, la de la parametrización.
Rotor: $P = 3x^2y^2z^2 + x$, $Q = 2x^3yz^2 - x^2$, $R = 2x^3y^2z$: $\text{rot}\,\vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (4x^3yz - 4x^3yz, 6x^2y^2z - 6x^2y^2z, (6x^2yz^2 - 2x) - 6x^2yz^2) = (0, 0, -2x)$. Se entiende mejor así: $\vec{f} = \nabla(x^3y^2z^2 + x^2/2) + (0, -x^2, 0)$.
Flujo del rotor: $\iint_D (0, 0, -2x) \cdot (4, 0, 1)\, dxdy = \iint_D -2x\, dxdy$. Polares centradas en (2, 0): $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, jacobiano r: $\int_0^{2\pi}\int_0^2 -2(2 + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = -4 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\, dr\, d\theta - 2 \cdot \int_0^2 r^2\, dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = -4 \cdot 2 \cdot 2\pi - 0 = -16\pi$ (primitiva de r: $r^2/2$, entre 0 y 2 da 2).
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} =$ **-16π**.
Control (circulación directa): el gradiente no circula; queda $\oint -x^2\, dy$ con $x = 2 + 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $t \in [0, 2\pi]$ (antihoraria; en $t = \pi$ está en (0, 0, 6) con tangente (0, −2, 0)): $\int_0^{2\pi} -(2 + 2\cos t)^2 \cdot 2\cos t\, dt = -2\int_0^{2\pi} (4\cos t + 8\cos^2 t + 4\cos^3 t)\, dt = -2 \cdot 8\pi = -16\pi$ ✓.
Trampa: pensar que “es casi un gradiente” y que da 0; o integrar $-2x$ sobre D como si el disco estuviera centrado en el origen (daría 0).

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$x^2 + z^2 = 9 \wedge -1 \le y \le 1$
orientada de modo tal que en el punto (3, 0, 0) el versor normal sea $\vec{\imath}$.
Calcule el flujo a través de Σ de $\vec{f}(x, y, z) = (z\,\varphi(x, y, z) + x, y^3, -x\,\varphi(x, y, z))$, donde φ es un campo escalar continuo en $\mathbb{R}^3$.

Respuesta: $\Phi = 18\pi$ (con $\vec{N} = (3\cos\theta, 0, 3\,\text{sen}\,\theta)$, saliente; φ no interviene).

Planteo: $x^2 + z^2 = 9$ es el cilindro de radio 3 con eje y, entre $y = -1$ e $y = 1$ (Σ es sólo la pared lateral, sin tapas). $\vec{X}(\theta, y) = (3\cos\theta, y, 3\,\text{sen}\,\theta)$, $D = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-3\,\text{sen}\,\theta, 0, 3\cos\theta)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y = (-3\cos\theta, 0, -3\,\text{sen}\,\theta)$.
Orientación: el punto (3, 0, 0) es $\theta = 0$, $y = 0$, y ahí $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y = (-3, 0, 0)$: opuesta a $\vec{\imath}$. **Cambio el orden**: $\vec{N} = \vec{X}_y \times \vec{X}_\theta = (3\cos\theta, 0, 3\,\text{sen}\,\theta)$, que en (3, 0, 0) vale $3\vec{\imath}$ ✓ (es la normal saliente).
Producto escalar: con φ evaluada en $\vec{X}(\theta, y)$, $\vec{f}(\vec{X}) = (3\,\text{sen}\,\theta\,\varphi + 3\cos\theta, y^3, -3\cos\theta\,\varphi)$. Entonces $\vec{f}\cdot\vec{N} = 9\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\varphi + 9\cos^2\theta - 9\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\varphi = 9\cos^2\theta$: los términos con φ se cancelan. Es que $(z\varphi, 0, -x\varphi)\cdot(x, 0, z) = 0$, esa parte del campo es tangente al cilindro.
Cuenta: $\Phi = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} 9\cos^2\theta\, d\theta\, dy = 2\cdot 9\cdot[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}]_0^{2\pi} = 18\pi$.
Resultado: $\Phi =$ **18π**.
Control con Gauss (sólo para la parte sin φ): como la parte con φ tiene flujo 0, Φ es el flujo de $\vec{G} = (x, y^3, 0)$, que es C^1. $\text{Div}\,\vec{G} = 1 + 3y^2$; en el cilindro macizo, $\iiint (1 + 3y^2)\, dV = 9\pi \int_{-1}^{1} (1 + 3y^2)\, dy = 9\pi\cdot 4 = 36\pi$. Tapas $y = \pm 1$ con normales $\pm\vec{\jmath}$: $\vec{G}\cdot(\pm\vec{\jmath}) = \pm y^3 = 1$ en las dos, área 9π cada una, total 18π. Lateral saliente: $36\pi - 18\pi = 18\pi$ ✓.
Trampa: aplicar Gauss a $\vec{f}$ entero: con φ sólo continua no existe $\text{div}\,\vec{f}$. Y la normal en (3, 0, 0) se chequea evaluando, no a ojo: $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_y$ apunta hacia adentro.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 - \cos(x), xy + e^{y^3})$ a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge |y| \wedge 2x - y \le 3\}$.
Indique en un gráfico la orientación elegida.

Respuesta: D es el triángulo de vértices (0, 0), (1, –1) y (3, 3). Con ∂D recorrido en sentido antihorario: $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = \mathbf{-2}$ (en sentido horario sería 2).

La región: $x \geq |y|$ es el sector entre las rectas $y = x$ e $y = -x$ que mira hacia x positivo; $2x - y \leq 3$ es el semiplano a la izquierda de la recta $x = \frac{3+y}{2}$. Cortes: $y = x$ con $2x - y = 3$ da (3, 3); $y = -x$ con $2x - y = 3$ da $3x = 3$, (1, –1). D es el **triángulo de vértices O = (0, 0), (1, –1) y (3, 3)**. Por franjas horizontales: $D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 3, |y| \leq x \leq \frac{3+y}{2}\}$ (vale $|y| \leq (3 + y)/2$ justo para $-1 \leq y \leq 3$).

Orientación elegida (el "gráfico"): sentido **antihorario**: de O a (1, –1) por $y = -x$, de (1, –1) a (3, 3) por $2x - y = 3$, y de (3, 3) a O por $y = x$. La región queda siempre a la izquierda del que camina.

Hipótesis de Green: D es compacta, su borde es una poligonal cerrada y simple orientada positivamente, y $P = y^2 - \cos(x)$, $Q = xy + e^{y^3}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Parametrizar no conviene: e^{y^3} no tiene primitiva elemental.

Rotor: $Q'_x = y$, $P'_y = 2y$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = -y}$.

Cuenta: $\oint^+ \vec{f} \cdot ds = \iint_D (-y)\, dA$. Como $|y|$ cambia de fórmula en $y = 0$, se parte en dos: $\int_{-1}^{0} \int_{-y}^{(3+y)/2} (-y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{0} -y(\frac{3+y}{2} + y)\, dy = -\frac{3}{2}\int_{-1}^{0} (y + y^2)\, dy = -\frac{3}{2}[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{4}$; $\int_0^3 \int_y^{(3+y)/2} (-y)\, dx\, dy = -\frac{1}{2}\int_0^3 (3y - y^2)\, dy = -\frac{1}{2}[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3}]_0^3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$. Suma: $\frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$. (Control: $\iint_D y\, dA = \text{área} \cdot \bar{y} = 3 \cdot \frac{0 - 1 + 3}{3} = 2$.)

Resultado: con el sentido antihorario, $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = \mathbf{-2}$; si se elige el horario, 2.

Trampa: la consigna exige mostrar la orientación elegida: un número sin sentido de recorrido no está bien resuelto. Y el $|y|$ obliga a partir la integral (o a usar el baricentro).

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (0, 1) y está contenida en el primer cuadrante.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy + e^y)$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las abscisas sean crecientes.

Respuesta: C: cuarto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ de (0, 1) a (2, 0). $\vec{f} = \nabla U$ con $U = x^2y + xy^2 + e^y$. Circulación = $1 - e$.

Planteo: primero hay que encontrar C (la línea de campo de $\vec{g}$ que pasa por (0, 1)) y después ver si $\vec{f}$ es de gradientes: si lo es, la circulación sale con la función potencial evaluada en los extremos, sin parametrizar nada.

Línea de campo (EDO): una línea de campo cumple $\vec{X}'(t) = \vec{g}(\vec{X}(t))$, o sea $x' = 4y$, $y' = -x$. Dividiendo queda la EDO de las trayectorias $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, de variables separables: $4y\, dy = -x\, dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + k$ $\Rightarrow x^2 + 4y^2 = c$. Por (0, 1): $c = 0 + 4 = 4$. La línea de campo es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, o sea $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Control: sobre las trayectorias, $\frac{d}{dt}(x^2 + 4y^2) = 2x \cdot 4y + 8y \cdot (-x) = 0$, así que $x^2 + 4y^2$ se conserva.

La porción C: en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) es el cuarto de elipse entre A = (0, 1) y B = (2, 0). Con abscisas crecientes se recorre de A a B (coincide con el sentido de $\vec{g}$: en (0, 1), $\vec{g} = (4, 0)$ apunta hacia x creciente). Una parametrización con ese sentido: $\vec{X}(s) = (2 \operatorname{sen} s, \cos s)$, $0 \leq s \leq \pi/2$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = 2xy + y^2$ y $Q = x^2 + 2xy + e^y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $P'_y = 2x + 2y = Q'_x$. Como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, $\vec{f}$ es de gradientes en $\mathbb{R}^2$.

Potencial: $U'_x = 2xy + y^2 \Rightarrow U = x^2y + xy^2 + h(y)$. Derivando en y: $x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + 2xy + e^y \Rightarrow h'(y) = e^y$, $h = e^y$. Queda $U(x, y) = x^2y + xy^2 + e^y$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A) = U(2, 0) - U(0, 1) = (0 + 0 + 1) - (0 + 0 + e) =$ **$1 - e$** $\approx -1{,}718$.
Trampa: es U(final) − U(inicial), y el final es (2, 0) porque x tiene que crecer. Al revés da e − 1. Tampoco es la elipse entera (sobre una curva cerrada daría 0).

19/7/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea Σ la porción de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante y satisface las condiciones $x - y \geq 0$ y $z - x \leq 0$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2y, 3 - 2x, z^2 + y^3)$ a través de Σ orientada de modo tal que el versor normal tenga primera componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = 27/4$ (con $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)$).
>
> **Planteo:** Σ es un pedazo de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ en el primer octante ($x, y, z \geq 0$), con $x - y \geq 0$ (o sea $x \geq y$) y $z - x \leq 0$ (o sea $z \leq x$). Va en cilíndricas.
> **Parametrización y dominio:** $\vec{X}(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z)$, con $0 \leq \theta \leq \pi/4$ ($x \geq y \geq 0 \Leftrightarrow \cos\theta \geq \operatorname{sen}\theta \geq 0$) y $0 \leq z \leq 3\cos\theta$ ($z \geq 0$ por el primer octante, el techo es el plano). $\vec{X}_\theta = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)}$.
> **Orientación:** la primera componente es $3\cos\theta > 0$ para $\theta \in [0, \pi/4]$: es la pedida (la saliente del cilindro), no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (2y, 3 - 2x, z^2 + y^3)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (6\operatorname{sen}\theta, 3 - 6\cos\theta, z^2 + 27\operatorname{sen}^3\theta)$. La tercera componente no aporta porque $\vec{N}$ no tiene z. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 6\operatorname{sen}\theta\cdot 3\cos\theta + (3 - 6\cos\theta)\cdot 3\operatorname{sen}\theta = 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}\theta - 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 9\operatorname{sen}\theta$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^{3\cos\theta} 9\operatorname{sen}\theta\, dz\, d\theta = \int_0^{\pi/4} 27\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta = 27\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = 27\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{4}$.
>
> **Resultado: $\mathbf{\Phi = \frac{27}{4}}$.**
>
> **Control con otra parametrización:** Σ es el gráfico $x = \sqrt{(9 - y^2)}$ sobre $D' = \{0 \leq y \leq \frac{3}{\sqrt{2}},\ 0 \leq z \leq \sqrt{(9 - y^2)}\}$ ($z \leq x$). $\vec{X}_y \times \vec{X}_z = (1, \frac{y}{\sqrt{(9 - y^2)}}, 0)$, primera componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 2y + (3 - 2\sqrt{(9 - y^2)})\cdot\frac{y}{\sqrt{(9 - y^2)}} = \frac{3y}{\sqrt{(9 - y^2)}}$. $\Phi = \int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{3y}{\sqrt{(9 - y^2)}}\cdot\sqrt{(9 - y^2)}\, dy = \int_0^{3/\sqrt{2}} 3y\, dy = \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{27}{4}$ ✓.
> **Trampa:** el techo de z depende de θ (es el plano, escrito sobre el cilindro), no es una constante; y los términos en $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ se cancelan, así que si no se te cancelan revisá el producto escalar.

Ejercicio 2. Calcule la circulación de
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy + e^{\cos(x)}, x^2 + 2x, e^{z^2})$
a lo largo de la curva C definida por las ecuaciones
$x^2 + y + y^2 + z = 0 \wedge 2x + y + z = 0$,
orientada de modo tal que en el punto $(0, 0, 0)$ el versor tangente a C tenga segunda componente negativa.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 2\pi$ (el sentido pedido es antihorario visto desde arriba).
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy + e^{\cos x}$, $Q = x^2 + 2x$, $R = e^{z^2}$: todas C^1 (de hecho C^∞) en $\mathbb{R}^3$.
> Parametrizar directo trae $e^{\cos x}$ y e^{z^2}, que no tienen primitiva elemental; con el teorema del rotor desaparecen.
> **La curva:** restando las ecuaciones, $(x^2 + y + y^2 + z) - (2x + y + z) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{(x - 1)^2 + y^2 = 1}$. Junto con $z = -2x - y$, C es la intersección del plano con el cilindro de radio 1 y eje paralelo a z por

(1, 0): una elipse cerrada y suave.
Rotor: $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0$; $Q'_x - P'_y = (2x + 2) - 2x = 2$. **$\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, 2)$**.
Superficie elegida: el trozo S del plano $z = -2x - y$ encerrado por C, $(x, y) \in D$: $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Es un gráfico C^1 (suave, orientable) con borde C, y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$: valen las hipótesis del teorema del rotor.
Orientación: (0, 0, 0) se proyecta en (0, 0), el punto de más a la izquierda de la circunferencia de centro (1, 0). Ahí, segunda componente negativa quiere decir bajar hacia y decreciente, que es recorrer la circunferencia en sentido **antihorario mirando desde arriba** (con $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = -2 - 2\cos t - \operatorname{sen} t$, en $t = \pi$ se pasa por el origen con tangente $(0, -1, 1)$). Regla de la mano derecha: normal compatible hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 1, 1)$.
Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = 2 \cdot 1 = 2$, constante: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2 \, dx \, dy = 2 \cdot \text{área}(D) = 2 \cdot \pi = 2\pi$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$.
Trampa: en el punto más a la izquierda, ir hacia abajo es antihorario (no horario): dibujá la circunferencia con el origen marcado antes de decidir. Equivocarse ahí da -2π.

Ejercicio 3. Sea D el cuerpo sólido que ocupa la región definida por las condiciones
$x^2 + 7y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 \wedge y \geq 0$.
Calcule la masa de D suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xz.

Respuesta: $M = \dfrac{64k}{15} \approx 4{,}27k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).

Planteo: la distancia de (x, y, z) al plano xz es $|y|$. En D vale $y \geq 0$, así que la densidad es $\delta = ky$ con $k > 0$, y $M = \iiint_D ky \, dV$.
El sólido: $z = x^2 + 7y^2$ es un paraboloide elíptico que abre hacia arriba con vértice en el origen; $z = 8 - x^2 - y^2$ es un paraboloide circular que abre hacia abajo con vértice (0, 0, 8). D es lo que queda por encima del primero y por debajo del segundo, y el semiespacio $y \geq 0$ se queda con una mitad.
Dónde se cortan: $x^2 + 7y^2 = 8 - x^2 - y^2 \iff 2x^2 + 8y^2 = 8 \iff \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. La curva de corte no está a altura constante (no es una circunferencia horizontal), pero su sombra en el plano xy es la elipse de semiejes 2 (sobre el eje x) y 1 (sobre el eje y). Adentro de esa elipse el techo está por encima del piso (en el origen, $0 \leq 8$), afuera al revés, así que la proyección de D es D_{xy}: la media elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ con $y \geq 0$.
Integral en z: para $(x, y) \in D_{xy}$, z va de $x^2 + 7y^2$ a $8 - x^2 - y^2$. Primitiva $ky \cdot z$, y queda $ky(8 - 2x^2 - 8y^2)$. Entonces $M = k \iint_{D_{xy}} y(8 - 2x^2 - 8y^2) \, dx \, dy$.
Coordenadas elípticas (para que la elipse sea r constante): $x = 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $|J| = \left|\det \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta = 2r$. Queda $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = r^2$, así que la elipse es $r \leq 1$, y $y \geq 0$ es $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, o sea $\theta \in [0, \pi]$. La altura: $8 - 8r^2\cos^2\theta - 8r^2\operatorname{sen}^2\theta = 8(1 - r^2)$.
Cuenta: $M = k \int_0^{\pi} \int_0^1 r\operatorname{sen}\theta \cdot 8(1 - r^2) \cdot 2r \, dr \, d\theta = 16k \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^1 (r^2 - r^4) \, dr\right)$. En r: primitiva $\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{r^5}{5}$, entre 0 y 1 da $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$. En θ: primitiva $-\cos\theta$, da $-\cos\pi + \cos 0 = 2$.
Resultado: $M = 16k \cdot 2 \cdot \dfrac{2}{15} = \mathbf{\dfrac{64k}{15}} \approx 4{,}27k$. Es el mismo cuerpo que el del tema 2 ($7x^2 + y^2$, $x \geq 0$) con los papeles de x e y cambiados, así que la masa tiene que dar igual.
Control en cartesianas: $y \in [0, 1]$, $|x| \leq 2\sqrt{(1 - y^2)}$. Integral en x de $y(8 - 2x^2 - 8y^2)$: primitiva $y(8(1 - y^2)x$

$-\frac{2x^3}{3}$); entre $\pm 2\sqrt{(1-y^2)}$ da $\frac{64}{3}\,y(1-y^2)^{3/2}$, y con $u = 1 - y^2$ queda $\frac{32}{3}\int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{64}{15}$ ✓.

Trampa: en polares comunes la elipse no queda r = constante y los límites se complican; con las elípticas el jacobiano es 2r, no r (olvidarte el 2 te da la mitad). Y la densidad es la distancia a un plano, $|y|$, no la distancia a un eje ni al origen.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (g(x)y^2, yx + g(x)y)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(0, 1) = (1, 1)$. Halle g y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $g(x) = (1 + e^{2x})/2$; potenciales $U(x, y) = (y^2/4)(2x + e^{2x} + 1) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $g \in C^1$. Si $\vec{f}$ es de gradientes, $\vec{f} = \nabla U$ con U de clase C^2, y por Schwarz $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$: esa es la condición necesaria que da la ecuación para g.

La EDO: $P = g(x)y^2$, $Q = yx + g(x)y$. $P'_y = 2g(x)y$; $Q'_x = y + g'(x)y$. Igualando: $y(g' + 1 - 2g) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, **$g' = 2g - 1$**.

Dato: $\vec{f}(0, 1) = (g(0)\cdot 1, 0 + g(0)\cdot 1) = (g(0), g(0)) = (1, 1) \Rightarrow g(0) = 1$.

EDO lineal: $g' - 2g = -1$. Con factor integrante e^{-2x}: $(g\,e^{-2x})' = -e^{-2x} \Rightarrow g\,e^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{2} + K \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} + K\,e^{2x}$. Con $g(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda **$g(x) = \frac{1 + e^{2x}}{2}$**.

Suficiencia: con esa g, $P'_y = Q'_x = y(1 + e^{2x})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (además lo confirma el potencial que sigue).

Potencial: $U'_x = \frac{1 + e^{2x}}{2}y^2 \Rightarrow U = y^2(\frac{x}{2} + \frac{e^{2x}}{4}) + h(y)$. Derivando en y: $y(x + \frac{e^{2x}}{2}) + h'(y)$, que tiene que ser $Q = xy + \frac{y}{2} + \frac{y\,e^{2x}}{2} \Rightarrow h'(y) = \frac{y}{2}$, $h = \frac{y^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{y^2}{4}(2x + e^{2x} + 1) + K$.

Resultado: $g(x) = (1 + e^{2x})/2$ y las funciones potenciales son **$U(x, y) = \frac{y^2}{4}(2x + e^{2x} + 1) + K$**, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: "todas las funciones potenciales" pide la constante K: en $\mathbb{R}^2$ (conexo) dos potenciales de un mismo campo difieren en una constante, así que son exactamente esas. Y no alcanza con la condición de Schwarz sola: hay que decir por qué basta ($\mathbb{R}^2$ simplemente conexo o el potencial exhibido).

Ejercicio 5. El borde de la región D está compuesto por el arco de curva C de ecuación vectorial $\vec{X} = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, cuyo gráfico es

[figura: gráfico de la curva C]

y el segmento que une (0, 0) con (2π, 0). Halle $\iint_D y\,dxdy$.

Pista: Calcule la circulación de un campo adecuado.

Respuesta: $\iint_D y\,dxdy$ = **5π/2** (con $\vec{f} = (-y^2/2, 0)$ y ∂D en sentido antihorario).

Planteo: la pista sugiere usar Green al revés: si encuentro $\vec{f}$ con $Q'_x - P'_y = y$, entonces $\iint_D y\,dxdy = \oint_{\partial D^+} \vec{f}\cdot d\vec{s}$. Tomo **$\vec{f} = (-\frac{y^2}{2}, 0)$**: $P'_y = -y$, $Q'_x = 0$, rotor y. Es C^1 en $\mathbb{R}^2$.

La región: $x(t) = t - \text{sen}\,t$ tiene $x' = 1 - \cos t \ge 0$ (cero sólo en $t = 0$ y 2π), así que el arco es el gráfico de una función de x sobre $[0, 2\pi]$, con $y = 1 - \cos t \ge 0$. $D = \{0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le y_C(x)\}$: compacta, con borde cerrado y simple (arco más segmento), C^1 a trozos (la parametrización tiene velocidad nula en los extremos, pero es C^1 y eso alcanza para la integral de línea).

Orientación positiva: antihoraria: por el segmento de (0, 0) a (2π, 0) y por el arco de vuelta de (2π, 0) a (0, 0), o sea con t **de 2π a 0**.

El segmento: ahí $y = 0$, así que $P = 0$ y no aporta nada.

El arco: $\vec{X}' = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$. $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{2\pi}^{0} -\frac{(1-\cos t)^2}{2}(1-\cos t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt$.

Desarrollo: $(1-\cos t)^3 = 1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t$; con primitivas t, sen t, $\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$ y sen t – $\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}$, entre 0 y 2π da 2π – 0 + 3π – 0 = 5π. Entonces la circulación es $\frac{5\pi}{2}$.

Resultado: $\iint_D y\,dxdy$ = **5π/2**. (Control: $\iint_D y\,dA = \int_0^{2\pi} \frac{y_C(x)^2}{2}\,dx$, que con x = t – sen t es la misma integral.)

Trampa: con t creciente el arco va de izquierda a derecha *por arriba*, que es el sentido horario: si no invertís el arco, el resultado sale –5π/2, negativo para una función y ≥ 0 en D.

19/7/22, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. El borde de la región D está compuesto por el arco de curva C de ecuación vectorial $\vec{X} = (t - \text{sen}(t), \cos(t) - 1)$, $0 \le t \le 2\pi$, cuyo gráfico es
[figura: gráfico de la curva C]
y el segmento que une (0, 0) con (2π, 0). Halle $\iint_D y\,dxdy$.
Pista: Calcule la circulación de un campo adecuado.

> **Respuesta:** $\iint_D y\,dxdy = \mathbf{-5\pi/2}$ (negativa porque $y \le 0$ en D).
>
> **Planteo:** busco $\vec{f}$ con $Q'_x - P'_y = y$, para que $\iint_D y\,dxdy = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$. Tomo $\vec{\mathbf{f}} = \mathbf{(-\frac{y^2}{2}, 0)}$: $P'_y = -y$, $Q'_x = 0$, rotor y; es C^1 en $\mathbb{R}^2$.
> **La región:** $x(t) = t - \text{sen } t$ es creciente ($x' = 1 - \cos t \ge 0$, nula sólo en los extremos) e $y = \cos t - 1 \le 0$, con mínimo -2 en $t = \pi$. El arco es el gráfico de una función de x por debajo del eje: $D = \{0 \le x \le 2\pi, y_C(x) \le y \le 0\}$, compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos.
> **Orientación positiva:** antihoraria. Como el arco está *abajo*, recorrerlo de izquierda a derecha ya es antihorario: el arco con t **de 0 a 2π** y después el segmento de (2π, 0) a (0, 0).
> **El segmento:** $y = 0$, $P = 0$: no aporta.
> **El arco:** $\vec{X}' = (1 - \cos t, -\text{sen } t)$. $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -\frac{(\cos t - 1)^2}{2}(1 - \cos t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt$.
> Desarrollo: $1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t$, con primitivas t, sen t, $\frac{t}{2} + \frac{\text{sen } 2t}{4}$ y $\text{sen } t - \frac{\text{sen}^3 t}{3}$; entre 0 y 2π da $2\pi + 3\pi = 5\pi$. Circulación: $-\frac{5\pi}{2}$.
> **Resultado:** $\iint_D y\,dxdy = \mathbf{-5\pi/2}$. Tiene sentido que sea negativa: en D es $y \le 0$. Es el espejo del arco por arriba, que da 5π/2.
> **Trampa:** copiar el sentido del arco de arriba (t de 2π a 0) da +5π/2, imposible para una función negativa en D. El sentido se decide mirando de qué lado queda la región.

Ejercicio 2. Sea Σ la porción de la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra en el primer octante y satisface las condiciones $y - x \ge 0$ y $z - y \le 0$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (3 - 2y, 2x, z^2 + y^3)$ a través de Σ orientada de modo tal que el versor normal tenga segunda componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = 27/4$ (con $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0)$).
>
> **Planteo:** Σ es un pedazo de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ en el primer octante ($x, y, z \ge 0$), con $y - x \ge 0$ (o sea $y \ge x$) y $z - y \le 0$ (o sea $z \le y$). Va en cilíndricas.
> **Parametrización y dominio:** $\vec{X}(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, z)$, con $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ ($y \ge x \ge 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta \ge \cos\theta \ge 0$) y $0 \le z \le 3\,\text{sen}\,\theta$ ($z \ge 0$ por el primer octante, el techo es el plano). $\vec{X}_\theta = (-3\,\text{sen}\,\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{X}}_\theta \times \vec{\mathbf{X}}_z = \mathbf{(3\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\theta, 0)}$.
> **Orientación:** la segunda componente es $3\,\text{sen}\,\theta > 0$ para $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$: es la pedida (la saliente del cilindro), no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (3 - 2y, 2x, z^2 + y^3)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (3 - 6\,\text{sen}\,\theta, 6\cos\theta, z^2 + 27\,\text{sen}^3\theta)$. La tercera componente no aporta porque $\vec{N}$ no tiene z. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (3 - 6\,\text{sen}\,\theta)\cdot 3\cos\theta + 6\cos\theta\cdot 3\,\text{sen}\,\theta = 9\cos\theta - 18\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 18\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 9\cos\theta$.

Cuenta: $\Phi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{3\,\mathrm{sen}\,\theta} 9\cos\theta\,dz\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 27\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = 27\left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{4}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{27}{4}}$.

Control con otra parametrización: Σ es el gráfico $y = \sqrt{(9 - x^2)}$ sobre $D' = \{0 \le x \le \frac{3}{\sqrt{2}},\ 0 \le z \le \sqrt{(9 - x^2)}\}$ ($z \le y$). $\vec{X}_z \times \vec{X}_x = \left(\frac{x}{\sqrt{(9 - x^2)}}, 1, 0\right)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (3 - 2\sqrt{(9 - x^2)})\cdot\frac{x}{\sqrt{(9 - x^2)}} + 2x = \frac{3x}{\sqrt{(9 - x^2)}}$. $\Phi = \int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{3x}{\sqrt{(9 - x^2)}}\cdot\sqrt{(9 - x^2)}\,dx = \int_0^{3/\sqrt{2}} 3x\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{27}{4}$ ✓.

Trampa: el techo de z depende de θ (es el plano, escrito sobre el cilindro), no es una constante; y los términos en sen θ cos θ se cancelan, así que si no se te cancelan revisá el producto escalar.

Ejercicio 3. Sea $\vec{f}(x, y) = (yx + g(y)x, g(y)x^2)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(1, 0) = (1, 1)$. Halle g y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $g(y) = (1 + e^{2y})/2$; potenciales $U(x, y) = (x^2/4)(2y + e^{2y} + 1) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $g \in C^1$. Si $\vec{f}$ es de gradientes, $\vec{f} = \nabla U$ con U de clase C^2, y por Schwarz $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$: esa es la condición necesaria que da la ecuación para g.

La EDO: $P = yx + g(y)x$, $Q = g(y)x^2$. $P'_y = x + g'(y)x$; $Q'_x = 2g(y)x$. Igualando: $x(1 + g' - 2g) = 0$ para todo (x, y); con $x = 1$, $\boldsymbol{g' = 2g - 1}$.

Dato: $\vec{f}(1, 0) = (0 + g(0)\cdot 1, g(0)\cdot 1) = (g(0), g(0)) = (1, 1) \Rightarrow g(0) = 1$.

EDO lineal: $g' - 2g = -1$. Con factor integrante e^{-2y}: $(g\,e^{-2y})' = -e^{-2y} \Rightarrow g\,e^{-2y} = \frac{e^{-2y}}{2} + K \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2} + K\,e^{2y}$. Con $g(0) = 1$: $K = \frac{1}{2}$. Queda $\boldsymbol{g(y) = \frac{1 + e^{2y}}{2}}$.

Suficiencia: con esa g, $P'_y = Q'_x = x(1 + e^{2y})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (lo confirma el potencial que sigue).

Potencial: conviene empezar por Q: $U'_y = \frac{1 + e^{2y}}{2}x^2 \Rightarrow U = x^2\left(\frac{y}{2} + \frac{e^{2y}}{4}\right) + h(x)$. Derivando en x: $x(y + \frac{e^{2y}}{2}) + h'(x)$, que tiene que ser $P = xy + \frac{x}{2} + \frac{x\,e^{2y}}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{x}{2}$, $h = \frac{x^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \frac{x^2}{4}(2y + e^{2y} + 1) + K$.

Resultado: $g(y) = (1 + e^{2y})/2$ y las funciones potenciales son $\boldsymbol{U(x, y) = \frac{x^2}{4}(2y + e^{2y} + 1) + K}$, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: en P'_y la $g(y)x$ se deriva a $g'(y)x$ (g depende de y), y "todas las funciones potenciales" pide la constante K ($\mathbb{R}^2$ es conexo, así que difieren en una constante).

Ejercicio 4. Calcule la circulación de
$\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + 2y, 2xy + e^{\cos(y)}, e^{z^2})$
a lo largo de la curva C definida por las ecuaciones
$x^2 + x + y^2 + z = 0 \wedge x + 2y + z = 0$,
orientada de modo tal que en el punto (0, 0, 0) el versor tangente a C tenga primera componente positiva.

Respuesta: $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = -2\pi$ (el sentido pedido es antihorario visto desde arriba).

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = y^2 + 2y$, $Q = 2xy + e^{\cos y}$, $R = e^{z^2}$: todas C^1 (de hecho C^∞) en $\mathbb{R}^3$.
Parametrizar directo trae $e^{\cos y}$ y e^{z^2}, sin primitiva elemental; con el teorema del rotor desaparecen.

La curva: restando las ecuaciones, $(x^2 + x + y^2 + z) - (x + 2y + z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{x^2 + (y - 1)^2 = 1}$. Junto con $z = -x - 2y$, C es la intersección del plano con el cilindro de radio 1 y eje paralelo a z por (0, 1): una elipse cerrada y suave.
Rotor: $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0$; $Q'_x - P'_y = 2y - (2y + 2) = -2$. $\mathbf{\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, -2)}$.
Superficie elegida: el trozo S del plano $z = -x - 2y$ encerrado por C, $(x, y) \in D$: $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Es un gráfico C^1 (suave, orientable) con borde C, y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$: valen las hipótesis del teorema del rotor.
Orientación: (0, 0, 0) se proyecta en (0, 0), el punto más bajo de la circunferencia de centro (0, 1). Ahí, primera componente positiva quiere decir avanzar hacia x creciente: sentido **antihorario mirando desde arriba** (con $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $z = -2 - \cos t - 2 \operatorname{sen} t$, en $t = -\pi/2$ se pasa por el origen con tangente (1, 0, −1)). Regla de la mano derecha: normal compatible hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 2, 1)$.
Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = -2 \cdot 1 = -2$, constante: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (-2)\, dx\, dy = -2 \cdot \text{área}(D) = -2\pi$.
Resultado: $\mathbf{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -2\pi}$.
Trampa: el signo negativo viene del rotor, no de la orientación: el sentido pedido es el antihorario (normal hacia arriba) y aun así la circulación es negativa. No lo "corrijas".

Ejercicio 5. Sea D el cuerpo sólido que ocupa la región definida por las condiciones
$7x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2 \wedge x \geq 0$.
Calcule la masa de D suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano yz.

Respuesta: $M = \dfrac{64k}{15} \approx 4{,}27k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).

Planteo: la distancia de (x, y, z) al plano yz es $|x|$. En D vale $x \geq 0$, así que la densidad es $\delta = kx$ con $k > 0$, y $M = \iiint_D kx\, dV$.
El sólido: $z = 7x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico que abre hacia arriba con vértice en el origen; $z = 8 - x^2 - y^2$ es un paraboloide circular que abre hacia abajo con vértice (0, 0, 8). D es lo que queda por encima del primero y por debajo del segundo, y el semiespacio $x \geq 0$ se queda con una mitad.
Dónde se cortan: $7x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. La curva de corte no está a altura constante (no es una circunferencia horizontal), pero su sombra en el plano xy es la elipse de semiejes 1 (sobre el eje x) y 2 (sobre el eje y). Adentro de esa elipse el techo está por encima del piso (en el origen, $0 \leq 8$), afuera al revés, así que la proyección de D es D_{xy}: la media elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$ con $x \geq 0$.
Integral en z: para $(x, y) \in D_{xy}$, z va de $7x^2 + y^2$ a $8 - x^2 - y^2$. Primitiva $kx \cdot z$, y queda $kx(8 - 8x^2 - 2y^2)$. Entonces $M = k \iint_{D_{xy}} x(8 - 8x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$.
Coordenadas elípticas (para que la elipse sea r constante): $x = r \cos\theta$, $y = 2r \operatorname{sen}\theta$, con $|J| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = 2r\cos^2\theta + 2r\operatorname{sen}^2\theta = 2r$. Queda $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = r^2$, así que la elipse es $r \leq 1$, y $x \geq 0$ es $\cos\theta \geq 0$, o sea $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. La altura: $8 - 8r^2\cos^2\theta - 8r^2\operatorname{sen}^2\theta = 8(1 - r^2)$.
Cuenta: $M = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r\cos\theta \cdot 8(1 - r^2) \cdot 2r\, dr\, d\theta = 16k \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\right)$. En r: primitiva $\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{r^5}{5}$, entre 0 y 1 da $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$. En θ: primitiva sen θ, da $\operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(-\pi/2) = 2$.
Resultado: $M = 16k \cdot 2 \cdot \dfrac{2}{15} = \mathbf{\dfrac{64k}{15}} \approx 4{,}27k$.

Control en cartesianas: $x \in [0, 1]$, $|y| \le 2\sqrt{(1 - x^2)}$. Integral en y de $x(8 - 8x^2 - 2y^2)$: primitiva $x(8(1 - x^2)y - \frac{2y^3}{3})$; entre $\pm 2\sqrt{(1 - x^2)}$ da $x(32(1 - x^2)^{3/2} - \frac{32}{3}(1 - x^2)^{3/2}) = \frac{64}{3}\, x(1 - x^2)^{3/2}$. Integral en x con $u = 1 - x^2$ ($du = -2x\, dx$): $\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 u^{3/2}\, du = \frac{32}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{64}{15}$ ✓.

Trampa: en polares comunes la elipse no queda r = constante y los límites se complican; con las elípticas el jacobiano es 2r, no r (olvidarte el 2 te da la mitad). Y la densidad es la distancia a un plano, $|x|$, no la distancia a un eje ni al origen.

12/7/22, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio natural de
$\vec{g}(x, y, z) = (\sqrt{}(z + 8 - 2x^2 - y^2), \ln(42 - z - y^2))$.
Halle el volumen del cuerpo que ocupa la región D.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y, z): 2x^2 + y^2 - 8 \le z < 42 - y^2\}$; $V = \mathbf{625\pi} \approx 1963{,}5$.
>
> **Dominio:** la raíz pide $z + 8 - 2x^2 - y^2 \ge 0$, o sea $z \ge 2x^2 + y^2 - 8$. El logaritmo pide $42 - z - y^2 > 0$, o sea $z < 42 - y^2$. Entonces $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 - 8 \le z < 42 - y^2\}$.
> **El sólido:** el piso $z = 2x^2 + y^2 - 8$ es un paraboloide elíptico que abre hacia arriba con vértice $(0, 0, -8)$. El techo $z = 42 - y^2$ es un cilindro parabólico: no depende de x, sus generatrices son paralelas al eje x y abre hacia abajo. D es lo que queda entre los dos.
> **Dónde se cortan:** $2x^2 + y^2 - 8 = 42 - y^2 \iff 2x^2 + 2y^2 = 50 \iff x^2 + y^2 = 25$. Para $x^2 + y^2 < 25$ el techo está por encima del piso (en el origen, $-8 < 42$) y para $x^2 + y^2 > 25$ queda por debajo y no hay puntos. Así que D es acotado y su proyección sobre xy es el disco $x^2 + y^2 \le 25$. El borde de arriba no está incluido (desigualdad estricta), pero es una superficie y tiene volumen cero: el volumen es el mismo que con $\le$.
> **Volumen como integral de la altura:** $V = \iint_{x^2 + y^2 \le 25} [(42 - y^2) - (2x^2 + y^2 - 8)]\, dx\, dy = \iint (50 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$. Fijate que los y^2 se juntan y la altura queda simétrica: por eso conviene polares aunque las superficies no sean de revolución.
> **Polares (cilíndricas):** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J| = r$; $r \in [0, 5]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (50 - 2r^2)\, r\, dr\, d\theta$. En r: primitiva $25r^2 - \frac{r^4}{2}$, entre 0 y 5 da $625 - \frac{625}{2} = \frac{625}{2}$. En θ: por 2π.
> **Resultado:** $V = \mathbf{625\pi} \approx 1963{,}5$.
> **Control:** $\iint 50\, dA = 50 \cdot 25\pi = 1250\pi$ y $\iint 2r^2\, dA = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 5^4}{2} = 625\pi$; la resta da 625π ✓.
> **Trampa:** el ln exige > 0 estricto y la raíz ≥ 0: hay que escribir las dos condiciones. Y la curva de corte no es plana ($z = 42 - y^2$ varía sobre ella), lo que importa es su proyección, la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y^2 + 2xy - y + e^x, y^2 + 2xy + x^2 + x)$ a lo largo de la curva de ecuación $\vec{X} = (2\,\text{sen}(t), 2\cos(t))$, $t \in [0, \pi]$, orientada según la parametrización dada.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi - 16/3 \approx -17{,}90$.
>
> **La curva:** $\vec{X}(t) = (2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$, $t \in [0, \pi]$, cumple $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2\,\text{sen}\,t \ge 0$: es la mitad derecha de la circunferencia, de $\vec{X}(0) = (0, 2)$ pasando por $\vec{X}(\pi/2) = (2, 0)$ hasta $\vec{X}(\pi) = (0, -2)$. Sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
> **Cierre:** C_1: segmento de $(0, -2)$ a $(0, 2)$ sobre el eje y. $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\}$ recorrido en sentido horario (al subir por el eje y, D queda a la derecha): orientación negativa.
> **Hipótesis del teorema:** $P = y^2 + 2xy - y + e^x$ y $Q = y^2 + 2xy + x^2 + x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es un semidisco (región regular) con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
> **Rotor:** $Q'_x = 2y + 2x + 1$, $P'_y = 2y + 2x - 1$, $Q'_x - P'_y = 2$.
> **Doble integral:** $\iint_D 2\, dA = 2 \cdot \text{área}(D) = 2 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2) = 4\pi$. Entonces $\oint_{C \cup C_1} = -4\pi$.
> **Segmento:** C_1: $(0, t)$, t de -2 a 2; $dx = 0$ y $Q(0, t) = t^2$: $\int_{C_1} = \int_{-2}^{2} t^2\, dt = [t^3/3]_{-2}^{2} = 16/3$.
> **Resultado:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi - 16/3 \approx \mathbf{-17{,}90}$.

> **Trampa:** con (2 sen t, 2 cos t) el recorrido es horario; además en el segmento sólo cuenta Q (porque dx = 0), y Q(0, y) = y^2, no 0.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de
$\vec{f}(x, y, z) = (xg(z) + y, x^2 + z, zg(x))$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$,
a lo largo de la curva
$C : \{ x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \ ; \ x + z - 2 = 0 \}$,
recorrida de modo tal que en el punto (2, 1, 0) el versor tangente a C tenga segunda componente positiva.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -8\pi$ (el sentido pedido es antihorario visto desde arriba).
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = xg(z) + y$, $Q = x^2 + z$, $R = zg(x)$. Como $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (productos y composiciones de funciones C^1).
> **La curva:** $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 4$, un cilindro de radio 2 con eje paralelo a z por (0, 1); $x + z = 2$ es un plano. C es la elipse intersección, cerrada y suave. El punto (2, 1, 0) está: $4 + 1 - 2 - 3 = 0$ y $2 + 0 - 2 = 0$.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 0 - 1 = -1$; $P'_z - R'_x = xg'(z) - zg'(x)$; $Q'_x - P'_y = 2x - 1$. **$\vec{\text{rot}}\, \vec{f} = (-1, xg'(z) - zg'(x), 2x - 1)$**. La segunda componente depende de g, que no conocemos: la superficie se elige para que no intervenga.
> **Superficie elegida:** el trozo S del plano $z = 2 - x$ dentro del cilindro, $(x, y) \in D$: $x^2 + (y - 1)^2 \le 4$. Su normal es (1, 0, 1), con segunda componente nula, así que la parte con g se multiplica por 0. Se puede usar porque S es un gráfico C^1 (suave, orientable, acotada) cuyo borde es C y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$.
> **Orientación:** (2, 1, 0) se proyecta en (2, 1), el punto de más a la derecha de la circunferencia de centro (0, 1). Ahí, segunda componente positiva quiere decir avanzar hacia y creciente: sentido **antihorario mirando desde arriba** (con $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2 \operatorname{sen} t$, $z = 2 - 2\cos t$, en $t = 0$ se pasa por (2, 1, 0) con tangente (0, 2, 0)). Regla de la mano derecha: normal compatible hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 0, 1)$.
> **Cuenta:** $\vec{\text{rot}}\, \vec{f} \cdot \vec{N} = -1 \cdot 1 + (xg'(z) - zg'(x)) \cdot 0 + (2x - 1) \cdot 1 = 2x - 2$. Con $x = \rho \cos\theta$, $y = 1 + \rho \operatorname{sen}\theta$, jacobiano ρ, $\rho \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (2\rho \cos\theta - 2)\, \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} [(2/3)\rho^3 \cos\theta - \rho^2]_0^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} ((16/3)\cos\theta - 4)\, d\theta = 0 - 8\pi = -8\pi$. (Más rápido: $\iint_D (2x - 2)\, dA = (2\bar{x} - 2) \cdot \text{área} = (0 - 2) \cdot 4\pi$.)
> **Resultado:** $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -8\pi$.
> **Trampa:** con cualquier superficie cuya normal tenga segunda componente no nula (por ejemplo, un trozo del cilindro) aparece g' y la cuenta no se puede terminar. Y el disco tiene radio 2: área 4π, no π.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie definida por las condiciones
$z - x^2 - y^2 = 0$, $z \le 4$
y sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1 del cual se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f})(x, y, z) = 2z$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y que $f_3(x, y, 4) = 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde f_3 es la tercera componente de $\vec{f}$.
Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$, siendo $\check{n}(x, y, z)$ el versor normal a Σ en (x, y, z) que apunta hacia el eje z.

> **Respuesta:** $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = -116\pi/3$ (con $\check{n}$ hacia el eje z).
>
> **Planteo:** Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \le 4$: **no es cerrada** (su borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 4$). No se conoce $\vec{f}$, sólo su divergencia y su tercera componente en $z = 4$: no hay forma de hacer el flujo directo, así que la cierro con la tapa T: $z = 4$, $x^2 + y^2 \le 4$, y uso Gauss en el sólido M: $x^2 + y^2 \le z \le 4$.
> **Orientación:** en Σ, la normal que apunta hacia el eje z tiene la dirección de (−2x, −2y, 1): su parte horizontal (−2x, −2y) apunta al eje (en el vértice es (0, 0, 1)). Esa normal **entra** a M (M es lo de adentro

del cuenco). La exterior de M es la opuesta, con la dirección de (2x, 2y, –1), y en la tapa la exterior es (0, 0, 1).

Hipótesis de Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato); $\partial M = \Sigma \cup T$ es cerrada y suave a trozos. Con normal exterior: $\iint_{\Sigma,\,ext} + \iint_T = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$, con $\nabla\cdot\vec{f} = 2z$.

Triple: en cilíndricas, $0 \le r \le 2$, $r^2 \le z \le 4$: $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 2z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z, primitiva z^2: $16 - r^4$. En r: $\int_0^2 (16 - r^4)\, r\, dr = [8r^2 - \frac{r^6}{6}]_0^2 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$. En θ: $128\pi/3$.

Tapa: en T, $\check{n} = (0, 0, 1)$ y $\vec{f}\cdot\check{n} = f_3(x, y, 4) = 1$ (dato), así que $\iint_T$ = área = 4π.

Despeje: $\iint_{\Sigma,\,ext} = 128\pi/3 - 4\pi = 116\pi/3$.

Resultado: con ň hacia el eje z (la interior), $\boldsymbol{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\, d\sigma = -116\pi/3}$.

Control: un campo que cumple los dos datos es $\vec{f} = (0, 0, z^2 - 15)$. Su flujo directo con $(-2x, -2y, 1)\, dA$ es $\iint ((x^2 + y^2)^2 - 15)\, dA = 2\pi\int_0^2 (r^4 - 15)\, r\, dr = 2\pi(\frac{64}{6} - 30) = -116\pi/3$ ✓.

Trampa: "hacia el eje z" es la normal interior del cuenco, no la exterior: si te olvidás de cambiar el signo, la respuesta sale con el signo opuesto. Y el dato de f_3 en z = 4 sirve sólo para la tapa: no lo uses sobre el paraboloide.

Ejercicio 5. Sea C la curva ortogonal a la familia de curvas $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$, que pasa por el punto (0, 1) y sea D la región acotada del plano cuyo borde es C. Calcule $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

Respuesta: C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{4} \approx 3{,}332$.

EDO de la familia: de $y = kx^2$ sale $k = \frac{y}{x^2}$ ($x \neq 0$). Derivando: $y' = 2kx = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}$.

EDO de las ortogonales: cambiando y' por $-1/y'$: $y' = -\frac{x}{2y}$. Separable: $2y\, dy = -x\, dx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = c$. Aunque la EDO de la familia pide $x \neq 0$, la de las ortogonales está bien definida en (0, 1) (pendiente 0, tangente horizontal).

La que pasa por (0, 1): $0 + 1 = c$, $c = 1$. C: $\boldsymbol{\frac{x^2}{2} + y^2 = 1}$, la elipse de centro en el origen con semieje $\sqrt{2}$ en x y 1 en y. Control: producto de pendientes $\frac{2y}{x}\cdot(-\frac{x}{2y}) = -1$ ✓.

La región (dibujo): C es una curva cerrada; D es el interior de la elipse, $\frac{x^2}{2} + y^2 \le 1$ (corta los ejes en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ y $(0, \pm1)$).

Cambio de variables (polares elípticas): $x = \sqrt{2}\, r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (la elipse queda $r^2 \le 1$). Jacobiano: $\det\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}\, r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, r\cos^2\theta + \sqrt{2}\, r\,\mathrm{sen}^2\theta = \sqrt{2}\, r$. El integrando: $x^2 + y^2 = 2r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta = r^2(1 + \cos^2\theta)$.

Cuenta: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(1 + \cos^2\theta)\cdot\sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\,(\int_0^1 r^3\, dr)(\int_0^{2\pi}(1 + \cos^2\theta)\, d\theta)$. En r: $[\frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4}$. En θ: $[\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}]_0^{2\pi} = 2\pi + \pi = 3\pi$.

Resultado: $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\pi = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}\,\pi}{4}} \approx 3{,}332$.

Control: en cartesianas, $D = \{-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ |y| \le \sqrt{(1 - x^2/2)}\}$, la integral iterada da lo mismo. También

con las fórmulas de la elipse de semiejes a, b: $\iint x^2 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{4}$ y $\iint y^2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$, que suman $\frac{3\sqrt{2}\,\pi}{4}$ ✓.

Trampa: $x^2 + y^2$ no es r^2 en estas coordenadas (eso vale en polares comunes); acá es $r^2(1 + \cos^2\theta)$. Y el jacobiano es $\sqrt{2}\,r$, no r.