Análisis Matemático II

Primer parcial: exámenes reales, con resoluciones

Análisis Matemático II (61.03 / 81.01) · CB001

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; las resoluciones son nuestras. Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

14/7/26 (recuperatorio)	3
7/7/26 (recuperatorio)	6
11/5/26, tema 1 (diferido)	10
9/5/26, tema 1	13
9/5/26, tema 2	16
24/2/26 (recuperatorio)	19
10/2/26 (recuperatorio)	22
16/12/25 (recuperatorio)	25
18/10/25, tema 2	28
5/8/25 (recuperatorio)	31
15/7/25 (recuperatorio)	34
8/7/25 (recuperatorio)	37
10/5/25, tema 1	40
10/5/25, tema 2	43
10/12/24, tema 1 (recuperatorio)	46
9/11/24, tema 1 (recuperatorio)	49
21/10/24, tema 1 (diferido)	52
19/10/24, tema 1	55
19/10/24, tema 2	58
2/7/24, tema 1 (recuperatorio)	61
3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)	64
1/6/24, tema 1 (recuperatorio)	67
1/6/24, tema 2 (recuperatorio)	70
13/5/24, tema 1 (diferido)	73
11/5/24, tema 1	76
29/2/24 (libre)	79
12/12/23, tema 1 (recuperatorio)	82
13/11/23, tema 1 (recuperatorio diferido)	85
11/11/23, tema 1 (recuperatorio)	88
11/11/23, tema 2 (recuperatorio)	91
23/10/23, tema 1 (diferido)	94
21/10/23, tema 1	97
4/7/23, tema 2 (recuperatorio)	100
5/6/23, tema 1 (recuperatorio diferido)	103
3/6/23, tema 1 (recuperatorio)	106
3/6/23, tema 2 (recuperatorio)	109
15/5/23, tema 1 (diferido)	112
13/5/23, tema 1	115
13/5/23, tema 2	118
12/5/23 (otro)	121
13/12/22, tema 1 (recuperatorio)	124
13/12/22, tema 2 (recuperatorio)	127
14/11/22, tema 1 (recuperatorio diferido)	130
12/11/22, tema 1 (recuperatorio)	133
12/11/22, tema 2 (recuperatorio)	136
24/10/22, tema 1 (diferido)	139
22/10/22, tema 1	142
22/10/22, tema 2	146
12/7/22, tema 2 (recuperatorio)	150
11/6/22, tema 1 (recuperatorio)	154
11/6/22, tema 2 (recuperatorio)	157
21/5/22, tema 1	160
21/5/22, tema 2	163

14/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar
$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$,
Halle y clasifique los puntos críticos de f siendo
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 2, y < 1\}$.

> **Respuesta:** En D hay tres puntos críticos: (1, 0) mínimo local con $f(1, 0) = -2$; (–1, 0) máximo local con $f(-1, 0) = 2$; $(0, -\sqrt{3})$ punto silla. El punto $(0, \sqrt{3})$ también anula el gradiente pero no está en D ($\sqrt{3} > 1$).
>
> **Planteo:** $D = \{|x| < 2, y < 1\}$ es abierto y f es polinómica (C^∞), así que los candidatos a extremo local en D son los puntos de D donde $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 - 3 + y^2$, $f_y = 2xy$.
> **Sistema:** $f_y = 0$ da $x = 0$ o $y = 0$. Si $x = 0$: $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$. Si $y = 0$: $3x^2 = 3$, $x = \pm 1$. Candidatos: (1, 0), (–1, 0), $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$.
> **¿Están en D?** $(\pm 1, 0)$: $|\pm 1| < 2$ y $0 < 1$, sí. $(0, -\sqrt{3})$: $-\sqrt{3} < 1$, sí. $(0, \sqrt{3})$: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ no es menor que 1, **queda afuera** y no se clasifica.
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 2y$, $f_{yy} = 2x$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
> **(1, 0):** $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 12 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local, f(1, 0) = –2**.
> **(–1, 0):** $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det = 12 > 0$, $f_{xx} = -6 < 0$: **máximo local, f(–1, 0) = 2**.
> **$(0, -\sqrt{3})$:** $H = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -12 < 0$: **punto silla** ($f(0, -\sqrt{3}) = 0$).
> **Trampa:** clasificar $(0, \sqrt{3})$ como si fuera de D. El enunciado restringe el dominio justamente para que lo descartes, y hay que decirlo explícitamente.

Ejercicio 2. Sean $p(u, v) = 2 - u + v + uv - v^2$ el polinomio de Taylor de segundo orden en (0, 1) de $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, y $\vec{f}(x, y) = (e^{x-y} - 1, x + y + 1)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $h = g \circ \vec{f}$ en (0, 0, h(0, 0)).

> **Respuesta:** $g(0, 1) = 2$, $\nabla g(0, 1) = (0, -1)$; $h(0, 0) = 2$, $\nabla h(0, 0) = (-1, -1)$. Plano tangente: $x + y + z = 2$.
>
> **Punto imagen:** $\vec{f}(0, 0) = (e^0 - 1, 0 + 0 + 1) = (0, 1)$, donde está centrado el Taylor de g.
> **Qué da el Taylor:** $g \in C^3$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $h(0, 0) = g(0, 1) = p(0, 1) = 2 - 0 + 1 + 0 - 1 = \mathbf{2}$. $\nabla p(u, v) = (-1 + v, 1 + u - 2v)$, y en (0, 1): **$\nabla g(0, 1) = (0, -1)$**.
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es C^1 (exponencial y polinomio) y g es C^3, en particular diferenciable en (0, 1). Entonces $h = g \circ \vec{f}$ es diferenciable en (0, 0) y vale la regla de la cadena.

Cadena: $\vec{Df}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en (0, 0): $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(0, 0) = (0, -1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = **(–1, –1)**.
Plano tangente: h es diferenciable en (0, 0), así que su gráfico tiene plano tangente $z = h(0, 0) + h'_x(0, 0)\cdot x + h'_y(0, 0)\cdot y = 2 - x - y$, o sea **x + y + z = 2**.
Trampa: tomar $\nabla g(0, 1) = (-1, 1)$ leyendo los coeficientes lineales de p. p está escrito en u, v, no en u y (v – 1): hay que derivar y evaluar en (0, 1).

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $x + e^{xy-1} + z^2 = 3$ define implícitamente a x = f(y, z) en un entorno de $(x_0, y_0.z_0) = (1, 1, 1)$, con f de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales la derivada direccional de la función $h(y, z) = y^2 + yz + f(y, z)$ en el punto (1, 1) sea nula.

Respuesta: $\nabla f(1, 1) = (-1/2, -1)$; $\nabla h(1, 1) = (5/2, 0)$; $\check{v} = (0, 1)$ y $\check{v} = (0, -1)$.

Planteo: $F(x, y, z) = x + e^{xy-1} + z^2 - 3$; se despeja x. (El punto impreso dice $(x_0, y_0.z_0)$: es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.)
Punto: $F(1, 1, 1) = 1 + e^0 + 1 - 3 = 0$. ✓
Derivadas de F: $F'_x = 1 + ye^{xy-1}$, $F'_y = xe^{xy-1}$, $F'_z = 2z$. En (1, 1, 1): $F'_x = 2$, $F'_y = 1$, $F'_z = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) F(1, 1, 1) = 0; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_x(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Entonces x = f(y, z) es C^1 cerca de (1, 1), con $f(1, 1) = 1$, $f_y(1, 1) = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -1/2$ y $f_z(1, 1) = -\dfrac{F'_z}{F'_x} = -2/2 = -1$.
Gradiente de h: $h = y^2 + yz + f(y, z)$ es suma de un polinomio y una función C^1, así que es C^1 y diferenciable en (1, 1). $h_y = 2y + z + f_y = 2 + 1 - 1/2 = 5/2$; $h_z = y + f_z = 1 - 1 = 0$. $\nabla h(1, 1) = (5/2, 0)$.
Versores: por ser h diferenciable, $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1)\cdot\check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $(5/2)a + 0\cdot b = 0$, o sea a = 0 y b = ±1. **$\check{v}$ = (0, 1)** y **$\check{v}$ = (0, –1)**.
Trampa: el orden de las variables de h es (y, z): las componentes del versor son (dirección en y, dirección en z). Y no te olvides del término yz al derivar respecto de z (aporta y = 1, que cancela $f_z = -1$).

Ejercicio 4. Sean S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ y C la curva intersección entre S y Π: x + y = 1. Encuentre el o los puntos de C en los cuales la recta tangente a la curva es paralela al plano de ecuación x – z = 0.

Respuesta: Un punto: P = (1/4, 3/4, 3/8).

Planteo: la recta tangente es paralela al plano x – z = 0 cuando su dirección es perpendicular a la normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$.
Parametrización de C: con x = t, el plano da y = 1 – t y la superficie $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - t^2 - (1 - t)^2 = 2t - 2t^2$. Queda $\vec{g}(t) = (t, 1 - t, 2t - 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.
Tangente: $\vec{g}'(t) = (1, -1, 2 - 4t) \neq \vec{0}$ para todo t: curva regular.
Condición: $g'(t)\cdot(1, 0, -1) = 1 - (2 - 4t) = 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/4$.
Resultado: $P = \vec{g}(1/4) = (1/4, 3/4, 1/2 - 1/8)$ = **(1/4, 3/4, 3/8)**, con dirección tangente (1, –1, 1). Control: 1 – 1 = 0 ✓; P cumple 1/16 + 9/16 + 3/8 = 1 y 1/4 + 3/4 = 1 ✓. Como x – z = 1/4 – 3/8 = –1/8 ≠ 0, la recta es paralela y no está contenida en el plano.
Con gradientes: $\nabla(x^2 + y^2 + z) \times \nabla(x + y) = (2x, 2y, 1) \times (1, 1, 0) = (-1, 1, 2x - 2y)$. Su producto escalar con (1, 0, –1) es $-1 - 2x + 2y = 0$, que junto con x + y = 1 da x = 1/4: el mismo punto.
Trampa: plantear tangente ∥ (1, 0, –1), que es la condición de recta perpendicular al plano.

Ejercicio 5. Dado el campo escalar

$f(x, y) = \sqrt{(\ln(2x - y + 4))}$

a) Determine gráfica y analíticamente el dominio natural D de f.

b) Grafique por separado el interior y la frontera de

$T = \{(x, y) \in D \,/\, f^2(x, y) < \ln 5\}$.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y \leq 2x + 3\}$: el semiplano cerrado por debajo de la recta $y = 2x + 3$, con la recta incluida. b) $T = \{2x - 1 < y \leq 2x + 3\}$, franja entre dos rectas paralelas (la de arriba incluida, la de abajo no). Interior: la franja abierta $2x - 1 < y < 2x + 3$. Frontera: las dos rectas completas $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 3$.
>
> **a) Condiciones:** el ln pide $2x - y + 4 > 0$. La raíz pide $\ln(2x - y + 4) \geq 0$, y como ln es creciente con $\ln 1 = 0$, eso es $2x - y + 4 \geq 1$, o sea $y \leq 2x + 3$.
> **Dominio:** la segunda condición implica la primera (si el argumento es ≥ 1, es > 0), así que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x + 3\}$.
> **Gráfico:** la recta $y = 2x + 3$ (pendiente 2, corta los ejes en $(0, 3)$ y $(-3/2, 0)$) en trazo lleno y todo el semiplano de abajo a la derecha sombreado; contiene al origen ($\ln 4 \geq 0$). Sobre la recta f vale $\sqrt{(\ln 1)} = 0$, por eso la recta pertenece. Es un conjunto cerrado, no acotado y conexo (convexo), que no es abierto.
> **b) Planteo:** en D, $f \geq 0$ y $f^2 = \ln(2x - y + 4)$. Entonces $f^2 < \ln 5 \Leftrightarrow \ln(2x - y + 4) < \ln 5 \Leftrightarrow 2x - y + 4 < 5$ (ln estrictamente creciente) $\Leftrightarrow y > 2x - 1$.
> **El conjunto:** $T = \{(x, y) : 2x - 1 < y \leq 2x + 3\}$: la franja entre las rectas paralelas $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 3$, con la de arriba incluida y la de abajo excluida.
> **Interior (un gráfico):** $\text{int } T = \{2x - 1 < y < 2x + 3\}$, la franja con los dos bordes en punteado. Cada punto con las dos desigualdades estrictas tiene una bola dentro de T, porque $g(x, y) = y - 2x$ es continua y $\{-1 < g < 3\}$ es abierto; un punto de $y = 2x + 3$ no es interior, porque toda bola centrada en él tiene puntos con $y > 2x + 3$, que no están en T.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial T = \{y = 2x - 1\} \cup \{y = 2x + 3\}$, las dos rectas enteras en trazo lleno. Toda bola centrada en un punto de cualquiera de las dos tiene puntos de T (del lado de la franja) y puntos que no son de T (del otro lado). Notá que la recta de abajo es frontera aunque no pertenezca a T.
> **Trampa:** al despejar, $2x - y + 4 < 5$ da $-y < 1 - 2x$ y, al multiplicar por -1, se da vuelta: $y > 2x - 1$. Y no confundas interior con T: T no es abierto (le sobra la recta de arriba) ni cerrado (le falta la de abajo).

7/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar $f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$,

a) analice su continuidad en el origen;
b) calcule la derivada parcial respecto de x en (0, 0).

> **Respuesta:** a) No es continua en (0, 0): por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = x$ es 2. b) $f'_x(0, 0) = 0$.
>
> **a) Planteo:** f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Probamos con caminos.
> **Por el eje x** ($y = 0$, $x \neq 0$): $f(x, 0) = 0/x^2 = 0 \to 0$.
> **Por la recta y = x** ($x \neq 0$): $f(x, x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x^4} = \dfrac{2}{1 + x^2} \to 2$.
> **Conclusión:** dos caminos que llegan al origen dan límites diferentes (0 y 2), el límite doble no existe y f **no es continua** en el origen. (Por la parábola $x = y^2$ es peor todavía: $f(y^2, y) = 2y^3/(2y^4) = 1/y$, que no está acotada.)
>
> **b) Por definición:** para $h \neq 0$, $f(h, 0) = (2\cdot h\cdot 0)/(h^2 + 0) = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$
> $= \lim_{h\to 0} \dfrac{0 - 0}{h} = \mathbf{0}$.
> **Trampa:** que f no sea continua no impide que exista la derivada parcial: la parcial respecto de x sólo usa los valores sobre el eje x. Y no la calcules derivando la fórmula de $(x, y) \neq (0, 0)$ y evaluando en el origen: allí la fórmula no vale (daría 0/0).

Ejercicio 2. Sea Σ_1 el conjunto de nivel de $F(x, y, z) = \ln(xy^2) + z^3$ que contiene al punto $P = (1, -1, 1)$ y sea Σ_2 la superficie parametrizada por $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano normal a $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en P.

> **Respuesta:** Plano normal: **3x + 9y + 5z = −1** (tangente a C en P paralela a (3, 9, 5)).
>
> **Planteo:** $F(P) = \ln(1\cdot 1) + 1 = 1$, así que Σ_1: $\ln(xy^2) + z^3 = 1$. F es C^1 donde $xy^2 > 0$ ($x > 0$, $y \neq 0$), que es un entorno de P. El plano normal a C en P tiene como normal al vector tangente a C.
> **Normal a Σ_1:** $\nabla F = (1/x, 2/y, 3z^2) \to \nabla F(P) = (1, -2, 3) \neq \vec{0}$.
> **Parámetros de P en Σ_2:** $u + v = -1$ y $u - v = 1 \Rightarrow u = 0$, $v = -1$; control: $u + v^2 = 1$ ✓.
> **Normal a Σ_2:** $\vec{\Gamma}_u = (1, 1, 1)$, $\vec{\Gamma}_v = (2v, 1, -1) \to (-2, 1, -1)$. $\vec{N} = \vec{\Gamma}_u \times \vec{\Gamma}_v = (1\cdot(-1) - 1\cdot 1, 1\cdot(-2) - 1\cdot(-1), 1\cdot 1 - 1\cdot(-2))$ $= (-2, -1, 3) \neq \vec{0}$: Σ_2 es regular en P.
> **Tangente a C:** $\vec{T} = \nabla F(P) \times \vec{N} = (1, -2, 3) \times (-2, -1, 3) = ((-2)\cdot 3 - 3\cdot(-1), 3\cdot(-2) - 1\cdot 3, 1\cdot(-1) - (-2)(-2)) =$ $(-3, -9, -5) \parallel (3, 9, 5)$. Es no nulo (las normales no son paralelas), así que C es regular en P.
> **Plano normal:** $3(x - 1) + 9(y + 1) + 5(z - 1) = 0$, o sea **3x + 9y + 5z = −1**. Control: P da $3 - 9 + 5 = -1$ ✓.
> **Control de la normal a Σ_2:** despejando $u = (y + z)/2$ y $v = (y - z)/2$, Σ_2 es $x = (y + z)/2 + (y - z)^2/4$; el gradiente de $x - (y + z)/2 - (y - z)^2/4$ en P es $(1, 1/2, -3/2) \parallel (2, 1, -3) \parallel \vec{N}$ ✓.
> **Trampa:** evaluar $\vec{\Gamma}_v$ en las coordenadas de P en lugar de en $(u, v) = (0, -1)$; o dar como plano normal el que tiene normal ∇F (ese es el plano tangente a Σ_1).

Ejercicio 3. a) Demuestre que la ecuación $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (1, 0, z_0)$.
b) Calcule los versores para los cuales la derivada direccional de $h = f \circ \vec{g}$ en el punto $(1, 1)$ se anula. Considere la función f del inciso anterior y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$.

> **Respuesta:** a) $z_0 = 1$ (único); F es C^1 cerca de $(1, 0, 1)$ y $F'_z(1, 0, 1) = 2 \neq 0$, así que $z = f(u, v)$ existe y es C^1, con $\nabla f(1, 0) = (1, -1/2)$. b) $\nabla h(1, 1) = (2, 3/2)$; $h'((1, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = (3/5, -4/5)$ y $\check{v} = (-3/5, 4/5)$.
>
> **a) Planteo:** llamamos $F(u, v, z) = z - u^2 + v^2 + \ln(v + z)$. El punto viene con z_0 sin dar: sale de pedir $F(1, 0, z_0) = 0$, o sea $z_0 - 1 + \ln z_0 = 0$.
> **Cálculo de z_0:** la función $\varphi(z) = z + \ln z - 1$ está definida para $z > 0$ y es estrictamente creciente ($\varphi'(z) = 1 + 1/z > 0$), así que tiene a lo sumo una raíz; como $\varphi(1) = 0$, **$z_0 = 1$** y es el único.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(1, 0, 1) = 1 - 1 + 0 + \ln 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{v + z > 0\}$ (suma de polinomios y del logaritmo de algo positivo), que contiene al punto porque $v_0 + z_0 = 1 > 0$, así que F es C^1 en un entorno. (3) $F'_z = 1 + \dfrac{1}{v + z}$, que en $(1, 0, 1)$ vale $1 + 1 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe una única $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$ y $F(u, v, f(u, v)) = 0$.
> **Derivadas de f en (1, 0):** $F'_u = -2u \to -2$; $F'_v = 2v + \dfrac{1}{v + z} \to 0 + 1 = 1$. Por el TFI, $f'_u(1, 0) = -F'_u/F'_z = -(-2)/2 = 1$ y $f'_v(1, 0) = -1/2$. $\nabla f(1, 0) = (1, -1/2)$.
> **b) Planteo:** $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$ con $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$. Primero chequeamos que la composición caiga donde f está definida: $\vec{g}(1, 1) = (1 \cdot 1, 1 - 1) = (1, 0)$ ✓, justo el punto del inciso a).
> **Hipótesis de la regla de la cadena:** $\vec{g}$ es polinómica, diferenciable en $(1, 1)$; f es C^1 en un entorno de $(1, 0)$, por lo tanto diferenciable en $(1, 0)$. Entonces h es diferenciable en $(1, 1)$ y $Dh(1, 1) = Df(1, 0) \cdot D\vec{g}(1, 1)$.
> **Jacobiana de $\vec{g}$:** $D\vec{g} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$, que en $(1, 1)$ da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
> **Cuenta:** $\nabla h(1, 1) = (1, -1/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + (-1/2)(-2), 1 \cdot 2 + (-1/2) \cdot 1) =$ **$(2, 3/2)$**.
> **Versores:** como h es diferenciable, $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $2a + (3/2)b = 0$, o sea $4a + 3b = 0$, $b = -4a/3$; normalizando, $a^2 + 16a^2/9 = 1$, $a = \pm 3/5$. Quedan **$\check{v} = (3/5, -4/5)$** y **$\check{v} = (-3/5, 4/5)$**.
> **Trampa:** son dos versores (opuestos), no uno. Y la fórmula $\nabla h \cdot \check{v}$ sólo vale porque h es diferenciable: hay que decirlo, no alcanza con que existan las parciales.

Ejercicio 4. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ y determine si allí se producen extremos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: $(0, 0)$, punto silla (no hay extremo); $(1/6, -1/12)$, mínimo local con $f(1/6, -1/12) = -1/432$.
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞ en $\mathbb{R}^2$), así que los extremos locales sólo pueden estar donde $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 + y$, $f_y = x + 2y$.
> **Sistema:** de $f_y = 0$, $x = -2y$. En $f_x = 0$: $3 \cdot 4y^2 + y = y(12y + 1) = 0$, así que $y = 0$ (y entonces $x = 0$) o $y = -1/12$ (y entonces $x = 1/6$). **Puntos: $(0, 0)$ y $(1/6, -1/12)$**.
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si

det H = 0 el criterio no decide.

(0, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, det = –1 < 0: **punto silla**, no hay extremo.

(1/6, –1/12): $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, det = 2 – 1 = 1 > 0 y $f_{xx} = 1 > 0$: **mínimo local**. Valor: f = 1/216 + (1/6)(–1/12) + 1/144 = 2/432 – 6/432 + 3/432 = **–1/432**.

Trampa: perder la solución y = 0 (y con ella el punto crítico (0, 0), que es la silla) por dividir por y en y(12y + 1) = 0. Factorizá siempre en lugar de simplificar.

Ejercicio 5. Grafique el dominio natural del campo $\vec{f}(x, y) = (\ln(x^2 - y), \sqrt{(1 - x^2 - \frac{y^2}{4})})$; indique si es abierto, cerrado, conexo y/o acotado y represente su frontera en otro gráfico.

Respuesta: D = {(x, y) : $y < x^2$, $x^2 + y^2/4 \leq 1$}: la elipse llena de semiejes 1 (en x) y 2 (en y) sin la parte que queda sobre o arriba de la parábola $y = x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo y es acotado. Frontera: el arco de la elipse con $y \leq x^2$ (de $(-x_0, y_0)$ a (x_0, y_0) pasando por (–1, 0), (0, –2) y (1, 0)) más el arco de parábola $y = x^2$ con $|x| \leq x_0$, donde $y_0 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$ y $x_0 = \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)} \approx 0{,}91$. Pertenece a D el arco de elipse salvo sus dos extremos; el arco de parábola no.

Condiciones: el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de sus dos componentes. $\ln(x^2 - y)$ pide $x^2 - y > 0$, o sea $y < x^2$. $\sqrt{(1 - x^2 - y^2/4)}$ pide $1 - x^2 - y^2/4 \geq 0$, o sea $x^2 + y^2/4 \leq 1$ (acá la raíz no divide, así que el borde entra).

Dominio: D = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$: $y < x^2$, $x^2 + y^2/4 \leq 1$}.

Cortes: con $y = x^2$ en la elipse: $y + y^2/4 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \pm 2\sqrt{2}$. Como $y = x^2 \geq 0$, sirve $y_0 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$, con $x = \pm x_0$, $x_0 = \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)} \approx 0{,}91$.

Gráfico de D: la elipse de centro (0, 0) con vértices (±1, 0) y (0, ±2), parada (más alta que ancha). La parábola $y = x^2$ le "muerde" la parte de arriba: de la elipse se saca la copa que queda adentro de la parábola, que contiene al origen y al vértice (0, 2). Lo que queda es la elipse sin esa copa: toda la mitad inferior (si y < 0, seguro $y < x^2$) más dos "orejas" a los costados que suben hasta los puntos de corte. El arco de elipse que bordea a D va en trazo lleno; el arco de parábola, en punteado; el origen no está en D (0 < 0 es falso).

Abierto: no. (0, –2) ∈ D (cumple 0 + 1 ≤ 1 y –2 < 0), pero toda bola centrada en él tiene puntos con y < –2, fuera de la elipse: no es interior.

Cerrado: no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como (0, –ε), y él mismo no está en D) y no pertenece a D.

Acotado: sí: D está dentro de la elipse, así que $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 2$.

Conexo: sí. La parte $E = \{x^2 + y^2/4 \leq 1, y < 0\}$ está en D y es convexa (elipse ∩ semiplano). Cualquier otro punto (x, y) de D con $|x| < 1$ se une con E bajando en vertical hasta $(x, -\sqrt{(1 - x^2)})$: el segmento queda en la elipse (los cortes verticales de la elipse son intervalos) y debajo de la parábola (al bajar, y sigue siendo $< x^2$). Los puntos (±1, 0) se unen primero en horizontal con (±1/2, 0) ∈ D. Así D es arcoconexo.

Frontera (otro gráfico): $\partial D = \{x^2 + y^2/4 = 1, y \leq x^2\} \cup \{y = x^2, |x| \leq x_0\}$: el arco de la elipse que va de $(-x_0, y_0)$ a (x_0, y_0) por abajo (pasando por (–1, 0), (0, –2) y (1, 0)), cerrado por el arco de parábola que pasa por el origen. Es una curva cerrada. Pertenecen a D los puntos del arco de elipse salvo los dos extremos $(\pm x_0, y_0)$, que están sobre la parábola; no pertenece ningún punto del arco de parábola. El arco de elipse de arriba ($y > x^2$) **no** es frontera: cerca de él no hay puntos de D.

> **Trampa:** dibujar la frontera como "elipse + parábola enteras". La copa de la elipse que quedó afuera y los pedazos de parábola fuera de la elipse no tocan a D.

11/5/26, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{x + y^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 9,\ x \neq -y^2\}$: el disco abierto de radio 3 sin el arco de la parábola $x = -y^2$ que lo atraviesa. Es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo (dos componentes: $x > -y^2$ y $x < -y^2$). b) Nivel 0: la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ sin los puntos $(-(\sqrt{33} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{33} - 1)/2)}) \approx (-2{,}37; \pm 1{,}54)$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(9 - x^2 - y^2)$ pide $9 - x^2 - y^2 > 0$; el denominador pide $x + y^2 \neq 0$, o sea $x \neq -y^2$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9,\ x \neq -y^2\}$.
> **Gráfico:** el disco de centro (0, 0) y radio 3 con la circunferencia en punteado, y la parábola $x = -y^2$ (vértice en el origen, abre hacia la izquierda, pasa por $(-1, \pm 1)$ y $(-4, \pm 2)$) también en punteado. La parábola corta la circunferencia donde $y^4 + y^2 - 9 = 0$: $y^2 = (\sqrt{37} - 1)/2$, o sea en $(-(\sqrt{37} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}) \approx (-2{,}54; \pm 1{,}59)$. El arco de parábola entre esos dos puntos parte el disco en dos: una "lente" a la izquierda, adentro de la parábola ($x < -y^2$, contiene a $(-1, 0)$), y el resto ($x > -y^2$, contiene a $(1, 0)$).
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{x = -y^2,\ |y| \leq \sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}\}$: la circunferencia entera más el arco de parábola que queda adentro. Nada de eso está en D.
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ y $g_2(x, y) = (x + y^2)^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ (que es justamente $x + y^2 \neq 0$) son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (está sobre la parábola y toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(\varepsilon, 0)$) y no pertenece a D.
> **Acotado:** sí: $\|(x, y)\| < 3$ en todo D.
> **Conexo:** no. $h(x, y) = x + y^2$ es continua en D, no se anula en D y vale 1 en (1, 0) y -1 en $(-1, 0)$. Una curva continua dentro de D que uniera esos puntos haría que h cambie de signo y, por Bolzano, se anule en un punto de D: absurdo. Las dos componentes son las regiones de adentro y de afuera de la parábola dentro del disco.
> **b) Planteo:** en D el denominador no se anula, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(9 - x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$. Esa circunferencia (radio $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$) está dentro del disco abierto de radio 3.
> **Puntos a sacar:** los de la circunferencia que caen sobre la parábola: $x = -y^2$ en $x^2 + y^2 = 8$ da $y^4 + y^2 - 8 = 0$, $y^2 = (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}37$, o sea $(-(\sqrt{33} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{33} - 1)/2)}) \approx (-2{,}37; \pm 1{,}54)$.
> **Resultado:** C_0 = circunferencia de centro (0, 0) y radio $2\sqrt{2}$ sin esos dos puntos (dos puntitos huecos a la izquierda).
> **Trampa:** olvidarse de que la parábola también está excluida del conjunto de nivel: en esos dos puntos f no existe.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$.

Si $h = f \circ \vec{g}$, calcule $h(1.95, -3.02)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $h(2, -3) = 0$, $\nabla h(2, -3) = (-2, 4)$, y $h(1.95, -3.02) \approx 0.02$.

Hipótesis: $\vec{g}$ es C^1, luego diferenciable en $(2, -3)$. $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$ es C^1 en el semiplano abierto $y > 0$, que contiene a $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$; por lo tanto f es diferenciable en $(2, 1)$. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en $(2, -3)$ y vale la regla de la cadena en forma matricial: $Dh(2, -3) = Df(2, 1) \cdot D\vec{g}(2, -3)$.

f y su gradiente en (2, 1): $f(2, 1) = 2 \ln 1 + \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 0 = 0$. $f_x = \ln y + \frac{2}{3}x(1 - y)$, que en $(2, 1)$ da $0 + 0 = 0$; $f_y = x/y - \frac{1}{3}x^2$, que en $(2, 1)$ da $2 - 4/3 = 2/3$. **$\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$**.

Cadena: $\nabla h(2, -3) = (0, 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 1 + (2/3)(-3),\ 0\cdot 2 + (2/3)\cdot 6) =$ **$(-2, 4)$**. Y $h(2, -3) = f(\vec{g}(2, -3)) = f(2, 1) = 0$.

Aproximación lineal: como h es diferenciable en $(2, -3)$, cerca del punto $h(x, y) \approx h(2, -3) + h_x(2, -3)(x - 2) + h_y(2, -3)(y + 3)$. Con $(x, y) = (1.95, -3.02)$: $\Delta x = -0.05$ y $\Delta y = -0.02$.

Cuenta: $h(1.95, -3.02) \approx 0 + (-2)(-0.05) + 4(-0.02) = 0.1 - 0.08 =$ **0.02**.

Trampa: $\Delta y = -3.02 - (-3) = -0.02$, no $+0.02$: el signo del incremento en la coordenada negativa es lo que más se equivoca. Y f se evalúa en $(2, 1)$, no en $(2, -3)$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea Γ la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en los versores $\check{v}$ tangentes a Γ en ese punto.

Respuesta: $\check{v}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$: $f'(P, \check{v}_1) = 3\sqrt{2}$; $\check{v}_2 = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$: $f'(P, \check{v}_2) = -3\sqrt{2}$.

Planteo: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $F_2 = x^2 + z^2 - y$. $P = (1, 2, -1)$ está en Γ: $1 + 4 + 1 = 6$ y $1 + 1 = 2$ ✓.

Gradientes en P: $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) \to (2, 4, -2) \parallel (1, 2, -1)$; $\nabla F_2 = (2x, -1, 2z) \to (2, -1, -2)$. Son C^1 y no paralelos, así que Γ es regular en P y su tangente es perpendicular a ambos.

Tangente: $(1, 2, -1) \times (2, -1, -2) = (2\cdot(-2) - (-1)(-1),\ (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (-5, 0, -5) \parallel (1, 0, 1)$.

Versores tangentes: hay dos, uno por cada sentido: $\check{v}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ y $\check{v}_2 = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$.

Diferenciabilidad: $f = xy^2 + yz$ es polinómica, por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.

Gradiente de f: $\nabla f = (y^2, 2xy + z, y) \to \nabla f(P) = (4, 4 - 1, 2) = (4, 3, 2)$.

Cuentas: $f'(P, \check{v}_1) = (4 + 0 + 2)/\sqrt{2} = 6/\sqrt{2} =$ **$3\sqrt{2}$**; $f'(P, \check{v}_2) = -3\sqrt{2}$ (al cambiar el sentido, la derivada direccional cambia de signo).

Trampa: dar un solo versor (el enunciado pide “los versores”) o no normalizar $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto $(0, 2, 2)$ es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u\cos(v), u, u\,\mathrm{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Respuesta: L: $(x, y, z) = (0, 2, 2) + s(0, -1, 1)$. No tiene puntos en común con la curva (el sistema es incompatible).

Parámetros del punto: $\vec{\varphi}(u, v) = (0, 2, 2)$ pide $u = 2$ (segunda coordenada), $\cos v = 0$ y $\mathrm{sen}\, v = 1$, o sea $v = \pi/2$, que está en $[0, \pi]$ (y $u = 2$ en $[1, 3]$).

Normal: $\vec{\varphi}_u = (\cos v, 1, \mathrm{sen}\, v) = (0, 1, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v, 0, u\cos v) = (-2, 0, 0)$ en $(2, \pi/2)$. Producto vectorial: $(1\cdot 0 - 1\cdot 0,\ 1\cdot(-2) - 0\cdot 0,\ 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)) = (0, -2, 2) \neq \vec{0}$: el punto es regular. Director de L: $(0, -1, 1)$.

Control geométrico: Σ está sobre el cono $x^2 + z^2 = y^2$, cuyo gradiente $(2x, -2y, 2z)$ en $(0, 2, 2)$ es $(0, -4,$

4) $\parallel (0, -1, 1)$ ✓.
Recta normal: L: $(x, y, z) = (0, 2 - s, 2 + s)$, $s \in \mathbb{R}$.
Intersección con la curva: igualamos $(0, 2 - s, 2 + s) = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$. Primera coordenada: $t = 3$. Tercera: $2 + s = 2$, $s = 0$. Segunda: $2 - 0 = 2$ contra $t^2 + 1 = 10$. Contradicción: el sistema no tiene solución.
Resultado: L y la curva no tienen ningún punto en común. (El único punto de la curva con $x = 0$ es $(0, 10, 2)$, que no está en L.)
Trampa: usar el mismo parámetro para la recta y la curva. Tienen que ser parámetros distintos (s y t); con uno solo, el sistema cambia y podés sacar una conclusión falsa.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en $(1/2, 0)$ un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

Respuesta: $b = 2$ y $a > 0$ (cualquier a positivo). En $(1/2, 0)$ hay un mínimo local, de valor $f(1/2, 0) = -3/8$. Si $a < 0$ (con $b = 2$) el punto es silla.

Condición necesaria: f es polinómica, diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y $(1/2, 0)$ es interior; si allí hay extremo local, $\nabla f(1/2, 0) = (0, 0)$.
Derivadas: $f_x = ay^2 + 4bx^3 - 1$, $f_y = 2axy$.
En el punto: $f_x(1/2, 0) = 4b \cdot (1/8) - 1 = b/2 - 1 = 0$, así que **$b = 2$**. $f_y(1/2, 0) = 2a \cdot (1/2) \cdot 0 = 0$ vale para todo a: la primera condición no dice nada de a.
Hessiano: $f_{xx} = 12bx^2 = 12 \cdot 2 \cdot (1/4) = 6$; $f_{xy} = 2ay = 0$; $f_{yy} = 2ax = a$. $H(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\det H = 6a$.
Casos ($a \neq 0$): si **$a > 0$**, $\det H = 6a > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**. Si $a < 0$, $\det H < 0$: punto silla, no hay extremo.
Valor: $f(1/2, 0) = 0 + 2 \cdot (1/16) - 1/2 = 1/8 - 1/2 = \mathbf{-3/8}$ (no depende de a).
Resultado: $b = 2$, $a > 0$, mínimo local de valor $-3/8$.
Trampa: quedarse con $\nabla f = 0$ y contestar "$b = 2$, a cualquiera". Anular el gradiente es necesario pero no suficiente: con $a < 0$ el punto es crítico y es silla. (El caso $a = 0$, que daría $\det H = 0$, lo excluye el enunciado al pedir valores no nulos.)

9/5/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 + y)\,\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > -x^2,\ x^2 + y^2 \le 4\}$: el disco cerrado de radio 2 sin la parte que queda sobre o debajo de la parábola $y = -x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo. b) Nivel 0: el arco de la parábola $y = 1 - x^2$ con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)} \approx 1{,}52$ (extremos incluidos) unido con la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ salvo el arco inferior cerrado con $y \le (1 - \sqrt{17})/2 \approx -1{,}56$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(x^2 + y)$ pide $x^2 + y > 0$, o sea $y > -x^2$. La raíz (que multiplica, no divide) pide $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, o sea $x^2 + y^2 \le 4$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x^2,\ x^2 + y^2 \le 4\}$.
> **Cortes:** $y = -x^2$ en la circunferencia: $x^2 + x^4 = 4 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{17} - 1)/2 \approx 1{,}56$. Puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{17} - 1)/2)}, -((\sqrt{17} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}25; -1{,}56)$.
> **Gráfico:** la circunferencia de radio 2 y la parábola $y = -x^2$ (vértice en el origen, abre hacia abajo). De la bola cerrada se saca la región de abajo de la parábola, que contiene al origen y al punto $(0, -2)$. Queda el disco con un "mordisco" abajo con forma de campana invertida: el borde circular que queda (todo salvo el arco inferior entre los puntos de corte) en trazo lleno y el arco de parábola en punteado.
> **Abierto:** no. $(0, 2) \in D$ ($2 > 0$ y $0 + 4 \le 4$), pero toda bola centrada en él tiene puntos con $x^2 + y^2 > 4$: no es interior.
> **Cerrado:** no. $(0, 0)$ es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, \varepsilon)$) y no pertenece a D ($0 > 0$ es falso).
> **Conexo:** sí. Desde cualquier $(x, y) \in D$, el segmento vertical hasta $(x, \sqrt{(4 - x^2)})$ queda en el disco (sus cortes verticales son intervalos) y arriba de la parábola (al subir, y sigue siendo $> -x^2$). Llegás así al arco superior de la circunferencia, que está todo en D (ahí $y \ge 0 > -x^2$, salvo en $(0, 2)$ donde $2 > 0$) y es una curva continua. D es arcoconexo.
> **b) Planteo:** f es un producto, así que en D: $f = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + y) = 0$ o $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)} = 0$. Las dos partes, siempre dentro de D.
> **Primer factor:** $\ln(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x^2$ (parábola de vértice $(0, 1)$ que abre hacia abajo). Cumple $y > -x^2$ siempre; falta estar en el disco: $x^2 + (1 - x^2)^2 \le 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le (1 + \sqrt{13})/2$. Es el arco con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)} \approx 1{,}52$, **con** sus extremos $(\pm 1{,}52;\ (1 - \sqrt{13})/2 \approx -1{,}30)$, que están sobre la circunferencia y en D.
> **Segundo factor:** $x^2 + y^2 = 4$ dentro de D, o sea los puntos de la circunferencia con $y > -x^2 = y^2 - 4 \Leftrightarrow y^2 - y - 4 < 0 \Leftrightarrow y > (1 - \sqrt{17})/2 \approx -1{,}56$. Es la circunferencia sin el arco inferior cerrado entre $(\pm 1{,}25; -1{,}56)$, que pasa por $(0, -2)$.
> **Resultado:** $C_0 = \{y = 1 - x^2,\ |x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)}\} \cup \{x^2 + y^2 = 4,\ y > (1 - \sqrt{17})/2\}$. En el dibujo: la circunferencia con un hueco abajo y, adentro, la parábola $y = 1 - x^2$ que toca la circunferencia en sus dos extremos.
> **Trampa:** olvidarse del factor raíz (la circunferencia también da $f = 0$) o dibujarla entera: el arco de abajo no está en D porque ahí el ln no existe.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,x^2y - 2xy + b\,y^3$ tal que $(1, 1)$ es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f que tienen ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

> **Respuesta:** a) $a = 1$, $b = 1/3$. b) Con coordenadas no nulas: $(1, 1)$ es mínimo relativo, $f(1, 1) = -2/3$; $(1, -1)$ es máximo relativo, $f(1, -1) = 2/3$. (Los otros críticos, $(0, 0)$ y $(2, 0)$, tienen $y = 0$ y no se piden.)
>
> **a) Planteo:** f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que $(1, 1)$ es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = \vec{0}$. $f'_x = 2axy - 2y$, $f'_y = ax^2 - 2x + 3by^2$. En $(1, 1)$: $f'_x = 2a - 2 = 0$ da **$a = 1$**; $f'_y = a - 2 + 3b = 0$ da **$b = 1/3$**.
> **b) Puntos críticos:** ahora $f = x^2y - 2xy + y^3/3$, con $f'_x = 2xy - 2y = 2y(x - 1)$ y $f'_y = x^2 - 2x + y^2$. $f'_x = 0$ obliga a $y = 0$ o $x = 1$.
> **Caso $y = 0$:** $f'_y = x^2 - 2x = 0$ da $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Tienen una coordenada nula: no entran.
> **Caso $x = 1$:** $f'_y = 1 - 2 + y^2 = 0$ da $y = \pm 1$: **$(1, 1)$** y **$(1, -1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 2y$, $f''_{xy} = 2x - 2$, $f''_{yy} = 2y$, o sea $H = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2 \\ 2x - 2 & 2y \end{pmatrix}$.
> **En $(1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, $f(1, 1) = 1 - 2 + 1/3 = \mathbf{-2/3}$.
> **En $(1, -1)$:** $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**, $f(1, -1) = -1 + 2 - 1/3 = \mathbf{2/3}$.
> **Trampa:** en $2y(x - 1) = 0$ no dividas por y: separá los dos casos. Para descartar $(0, 0)$ y $(2, 0)$ primero hay que encontrarlos (por si te interesa, los dos son sillas: $\det H = -4$).

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de $(1, -1, 1)$, la ecuación
$\ln(x + y^2 - z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(-1, 1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((-1, 1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

> **Respuesta:** $\nabla g(-1, 1) = (3/2, 1/2)$. Máxima en $\check{v} = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$, con $g'((-1, 1), \check{v}) = \sqrt{10}/2$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = \ln(x + y^2 - z^2) - xyz - 1$ y queremos $x = g(y, z)$ cerca de $P = (1, -1, 1)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \ln(1 + 1 - 1) - (1)(-1)(1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $D = \{x + y^2 - z^2 > 0\}$, y $P \in D$ (ahí vale 1) ✓. (3) $F_x = \dfrac{1}{x + y^2 - z^2} - yz$, $F_x(P) = 1 - (-1)(1) = 2 \neq 0$ ✓. Luego existe un entorno de $(-1, 1)$ donde $x = g(y, z)$ es C^1, con $g(-1, 1) = 1$.
> **Derivadas de F en P:** $F_y = \dfrac{2y}{x + y^2 - z^2} - xz$, $F_y(P) = -2 - 1 = -3$. $F_z = \dfrac{-2z}{x + y^2 - z^2} - xy$, $F_z(P) = -2 - (1)(-1) = -1$.
> **Gradiente de g:** $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = 3/2$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = 1/2$. **$\nabla g(-1, 1) = (3/2, 1/2)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en $(-1, 1)$, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $g'((-1, 1), \check{v}) = \nabla g((-1, 1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. Es máxima con $\theta = 0$: $\check{v} = \nabla g/\|\nabla g\| = (3, 1)/\sqrt{10} = \mathbf{(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})}$, y vale **$\|\nabla g(-1, 1)\| = \sqrt{10}/2$**.
> **Trampa:** el gradiente se evalúa en $(y_0, z_0) = (-1, 1)$, no en el punto de $\mathbb{R}^3$. Y el signo menos de $-F_y/F_x$ es el error más caro: sin él te queda el versor opuesto, que es el del mínimo.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(x + y - z, xyz)$, con $f(u, v)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $L(u, v) = 1 + 2u - v$ es la aproximación lineal de f en el punto $(u_0, v_0) = (3, -1)$. Sea Σ la superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** $h(1, 1, -1) = f(3, -1) = 8$, así que $(1, 1, -1) \in \Sigma$. $\nabla h(1, 1, -1) = (3, 3, -3)$. Plano tangente: $x + y - z = 3$.
>
> **Punto interior:** en $(1, 1, -1)$ es $(u, v) = (x + y - z, xyz) = (3, -1)$, justo el punto donde está centrada L.
> **Qué dice L:** $L(u, v) = f(3, -1) + f_u(u - u_0) + f_v(v - v_0)$. Comparando con $1 + 2u - v$: **$\nabla f(3, -1) = (2, -1)$** y $f(3, -1) = L(3, -1) = 1 + 6 + 1 = 8$.
> **$(1, 1, -1) \in \Sigma$:** $h(1, 1, -1) = f(3, -1) = 8$ ✓.
> **Hipótesis:** f es C^1 y la interior es polinómica, así que h es C^1 (en particular diferenciable) y vale la regla de la cadena. Σ es el conjunto de nivel 8 de h; si $\nabla h(1, 1, -1) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita Σ es una superficie regular cerca del punto y $\nabla h(1, 1, -1)$ es normal a ella.
> **Jacobiana interior en (1, 1, –1):** la fila de $u = x + y - z$ es $(1, 1, -1)$ y la de $v = xyz$ es $(yz, xz, xy) = (-1, -1, 1)$.
> **Cadena:** $\nabla h(1, 1, -1) = f_u \cdot \nabla u + f_v \cdot \nabla v = 2(1, 1, -1) + (-1)(-1, -1, 1) = (2 + 1, 2 + 1, -2 - 1) =$ **$(3, 3, -3) \neq \vec{0}$**.
> **Plano tangente:** $3(x - 1) + 3(y - 1) - 3(z + 1) = 0$, es decir **$x + y - z = 3$**. Control: el punto lo cumple, $1 + 1 + 1 = 3$ ✓.
> **Trampa:** Σ no es el gráfico de h (h tiene tres variables): es una superficie de nivel, así que el plano es $\nabla h \cdot (X - P) = 0$, sin el "$z = \ldots$" del plano tangente a una gráfica. Y no te olvides de decir que $\nabla h \neq \vec{0}$: es lo que garantiza que el plano existe.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r^2 + s^2, r + s, r - s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto $(1, 1, -1)$.

> **Respuesta:** $(r, s) = (0, 1)$; $\vec{N} = (-3, 2, -2)$. Recta normal: $\vec{X} = (1, 1, -1) + t(-3, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **Paso 1, los parámetros del punto:** $\vec{X}(r, s) = (1, 1, -1)$ pide $r^2 + s^2 = 1$, $r + s = 1$, $r - s^2 = -1$. De la segunda, $r = 1 - s$; en la primera, $(1 - s)^2 + s^2 = 1$, o sea $2s^2 - 2s = 0$: $s = 0$ o $s = 1$. Con $s = 0$ queda $r = 1$ y $r - s^2 = 1 \neq -1$ ✗; con $s = 1$ queda $r = 0$ y $r - s^2 = -1$ ✓. Único par: **$(r, s) = (0, 1)$**.
> **Paso 2, derivadas:** $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_r = (2r, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\vec{X}_s = (2s, 1, -2s) = (2, 1, -2)$ en $(0, 1)$.
> **Paso 3, normal:** $\vec{N} = \vec{X}_r \times \vec{X}_s = (1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-2), 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) =$ **$(-3, 2, -2)$** $\neq \vec{0}$, así que el punto es regular y la recta normal existe.
> **Resultado:** $r_{\vec{N}}$: **$\vec{X} = (1, 1, -1) + t(-3, 2, -2)$**, $t \in \mathbb{R}$.
> **Control:** $\vec{N} \cdot \vec{X}_r = 0 + 2 - 2 = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{X}_s = -6 + 2 + 4 = 0$ ✓.
> **Trampa:** la segunda ecuación sola da dos candidatos; hay que chequear los tres componentes, porque $(1, 0)$ da $(1, 1, 1)$, que no es el punto pedido.

9/5/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 - y)\,\sqrt{(9 - x^2 - y^2)}$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y < x^2,\ x^2 + y^2 \le 9\}$: el disco cerrado de radio 3 sin la parte que queda sobre o arriba de la parábola $y = x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo. b) Nivel 0: el arco de la parábola $y = x^2 - 1$ con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)} \approx 1{,}84$ (extremos incluidos) unido con la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ salvo el arco superior cerrado con $y \ge (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(x^2 - y)$ pide $x^2 - y > 0$, o sea $y < x^2$. La raíz (que multiplica, no divide) pide $9 - x^2 - y^2 \ge 0$, o sea $x^2 + y^2 \le 9$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2,\ x^2 + y^2 \le 9\}$.
> **Cortes:** $y = x^2$ en la circunferencia: $y + y^2 = 9 \Leftrightarrow y = (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$ (la otra raíz es negativa y no puede ser x^2). Puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$.
> **Gráfico:** la circunferencia de radio 3 y la parábola $y = x^2$ (vértice en el origen, abre hacia arriba). De la bola cerrada se saca la copa de adentro de la parábola, que contiene al origen y al punto (0, 3). Queda el disco con un "mordisco" arriba en forma de copa: el borde circular que queda (todo salvo el arco superior entre los puntos de corte) en trazo lleno y el arco de parábola en punteado.
> **Abierto:** no. $(0, -3) \in D$ ($-3 < 0$ y $0 + 9 \le 9$), pero toda bola centrada en él tiene puntos con $x^2 + y^2 > 9$: no es interior.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, -\varepsilon)$) y no pertenece a D ($0 < 0$ es falso).
> **Conexo:** sí. Desde cualquier $(x, y) \in D$, el segmento vertical hasta $(x, -\sqrt{(9 - x^2)})$ queda en el disco y debajo de la parábola (al bajar, y sigue siendo $< x^2$). Llegás así al arco inferior de la circunferencia, que está todo en D (ahí $y \le 0 < x^2$, salvo en $(0, -3)$ donde $-3 < 0$) y es una curva continua. D es arcoconexo.
> **b) Planteo:** f es un producto, así que en D: $f = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - y) = 0$ o $\sqrt{(9 - x^2 - y^2)} = 0$. Las dos partes, siempre dentro de D.
> **Primer factor:** $\ln(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$ (parábola de vértice $(0, -1)$). Cumple $y < x^2$ siempre; falta estar en el disco: $x^2 + (x^2 - 1)^2 \le 9 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le (1 + \sqrt{33})/2$. Es el arco con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)} \approx 1{,}84$, **con** sus extremos $(\pm 1{,}84;\ (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}37)$, que están sobre la circunferencia y en D.
> **Segundo factor:** $x^2 + y^2 = 9$ dentro de D, o sea los puntos de la circunferencia con $y < x^2 = 9 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 9 < 0 \Leftrightarrow y < (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$ (la otra raíz, $\approx -3{,}54$, queda fuera de la circunferencia). Es la circunferencia sin el arco superior cerrado entre $(\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$, que pasa por (0, 3).
> **Resultado:** $C_0 = \{y = x^2 - 1,\ |x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)}\} \cup \{x^2 + y^2 = 9,\ y < (\sqrt{37} - 1)/2\}$. En el dibujo: la circunferencia con un hueco arriba y, adentro, la parábola $y = x^2 - 1$ que toca la circunferencia en sus dos extremos.
> **Trampa:** olvidarse del factor raíz (la circunferencia también da $f = 0$) o dibujarla entera: el arco de arriba no está en D porque ahí el ln no existe.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,xy^2 - 2xy + b\,x^3$ tal que $(1, 1)$ es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f q[ilegible] ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

> **Respuesta:** a) $a = 1$, $b = 1/3$. b) Con coordenadas no nulas: $(1, 1)$ es mínimo relativo, $f(1, 1) = -2/3$; $(-1, 1)$ es máximo relativo, $f(-1, 1) = 2/3$. (Los otros críticos, $(0, 0)$ y $(0, 2)$, tienen $x = 0$ y no se piden.)
>
> **Lectura del enunciado:** la foto corta el renglón del ítem b) después de "f q". Se asume "que tienen ambas coordenadas no nulas", que es lo que dice el Tema 1 del mismo parcial y lo que pide el renglón siguiente.
> **a) Planteo:** f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que $(1, 1)$ es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = \vec{0}$. $f'_x = ay^2 - 2y + 3bx^2$, $f'_y = 2axy - 2x$. En $(1, 1)$: $f'_y = 2a - 2 = 0$ da **$a = 1$**; $f'_x = a - 2 + 3b = 0$ da **$b = 1/3$**.
> **b) Puntos críticos:** ahora $f = xy^2 - 2xy + x^3/3$, con $f'_x = y^2 - 2y + x^2$ y $f'_y = 2xy - 2x = 2x(y - 1)$. $f'_y = 0$ obliga a $x = 0$ o $y = 1$.
> **Caso $x = 0$:** $f'_x = y^2 - 2y = 0$ da $(0, 0)$ y $(0, 2)$. Tienen una coordenada nula: no entran.
> **Caso $y = 1$:** $f'_x = 1 - 2 + x^2 = 0$ da $x = \pm 1$: **$(1, 1)$** y **$(-1, 1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 2x$, $f''_{xy} = 2y - 2$, $f''_{yy} = 2x$, o sea $H = \begin{pmatrix} 2x & 2y - 2 \\ 2y - 2 & 2x \end{pmatrix}$.
> **En $(1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, $f(1, 1) = 1 - 2 + 1/3 = \mathbf{-2/3}$.
> **En $(-1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**, $f(-1, 1) = -1 + 2 - 1/3 = \mathbf{2/3}$.
> **Trampa:** en $2x(y - 1) = 0$ no dividas por x: separá los dos casos. Para descartar $(0, 0)$ y $(0, 2)$ primero hay que encontrarlos (por si te interesa, los dos son sillas: $\det H = -4$).

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de $(1, 1, -1)$, la ecuación
$\ln(x - y^2 + z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(1, -1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((1, -1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

> **Respuesta:** $\nabla g(1, -1) = (1/2, 3/2)$. Máxima en $\check{v} = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, con $g'((1, -1), \check{v}) = \sqrt{10}/2$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = \ln(x - y^2 + z^2) - xyz - 1$ y queremos despejar $x = g(y, z)$ cerca de $P = (1, 1, -1)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \ln(1 - 1 + 1) - (1)(1)(-1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $D = \{x - y^2 + z^2 > 0\}$ (ln de un polinomio positivo, más un polinomio), y $P \in D$ porque ahí $x - y^2 + z^2 = 1 > 0$ ✓. (3) La derivada respecto de la variable que se despeja, x: $F_x = \dfrac{1}{x - y^2 + z^2} - yz$, $F_x(P) = 1 - (1)(-1) = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe un entorno de $(1, -1)$ donde $x = g(y, z)$ es C^1, con $g(1, -1) = 1$ y $F(g(y, z), y, z) = 0$.
> **Derivadas de F en P:** $F_y = \dfrac{-2y}{x - y^2 + z^2} - xz$, $F_y(P) = -2 - (1)(-1) = -1$. $F_z = \dfrac{2z}{x - y^2 + z^2} - xy$, $F_z(P) = -2 - 1 = -3$.
> **Gradiente de g:** $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = -(-1)/2 = 1/2$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = -(-3)/2 = 3/2$. **$\nabla g(1, -1) = (1/2, 3/2)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en $(1, -1)$, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $g'((1, -1), \check{v}) = \nabla g((1, -1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. Es máxima cuando $\theta = 0$, o sea $\check{v}$ en la dirección y sentido del gradiente: $\check{v} = \nabla g/\|\nabla g\| = (1, 3)/\sqrt{10} = \mathbf{(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})}$, y el máximo vale **$\|\nabla g(1, -1)\| = \sqrt{(1/4 + 9/4)} = \sqrt{10}/2$**.

> **Trampa:** la derivada que tiene que ser no nula es la de la variable que se despeja (acá F_x, no F_z), y ∇g tiene dos componentes (en y y en z), no tres.

Ejercicio 4. Sea h(x, y, z) = f(xyz, x + y − z), con f(u, v) una función de clase C^1(ℝ[ilegible] L(u, v) = 1 − u + 2v es la aproximación lineal de f en el punto (u_0, v_0) = (−1, 3[ilegible] superficie definida por
Σ: h(x, y, z) = 8.
Pruebe que (1, 1, −1) ∈ Σ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** h(1, 1, −1) = f(−1, 3) = 8, así que (1, 1, −1) ∈ Σ. $\nabla h(1, 1, -1) = (3, 3, -3)$. Plano tangente: x + y − z = 3.
>
> En la foto un dedo tapa el final de dos renglones; se lee como en el Tema 1: f de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y el punto (u_0, v_0) = (−1, 3), que es justamente (xyz, x + y − z) en (1, 1, −1).
> **Punto interior:** en (1, 1, −1) es (u, v) = (xyz, x + y − z) = (−1, 3), justo el punto donde está centrada L.
> **Qué dice L:** $L(u, v) = f(-1, 3) + f_u(u - u_0) + f_v(v - v_0)$. Comparando con 1 − u + 2v: **$\nabla f(-1, 3) = (-1, 2)$** y f(−1, 3) = L(−1, 3) = 1 + 1 + 6 = 8.
> **(1, 1, −1) ∈ Σ:** h(1, 1, −1) = f(−1, 3) = 8 ✓.
> **Hipótesis:** f es C^1 y la interior es polinómica, así que h es C^1 (en particular diferenciable) y vale la regla de la cadena. Σ es el conjunto de nivel 8 de h; si $\nabla h(1, 1, -1) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita Σ es una superficie regular cerca del punto y $\nabla h(1, 1, -1)$ es normal a ella.
> **Jacobiana interior en (1, 1, −1):** la fila de u = xyz es (yz, xz, xy) = (−1, −1, 1) y la de v = x + y − z es (1, 1, −1).
> **Cadena:** $\nabla h(1, 1, -1) = f_u \cdot \nabla u + f_v \cdot \nabla v = (-1)(-1, -1, 1) + 2(1, 1, -1) = (1 + 2, 1 + 2, -1 - 2) =$ **(3, 3, −3)** $\neq \vec{0}$.
> **Plano tangente:** 3(x − 1) + 3(y − 1) − 3(z + 1) = 0, es decir **x + y − z = 3**. Control: el punto lo cumple, 1 + 1 + 1 = 3 ✓.
> **Trampa:** Σ no es el gráfico de h (h tiene tres variables): es una superficie de nivel, así que el plano es $\nabla h \cdot (X - P) = 0$, sin el "z = ..." del plano tangente a una gráfica. Y no te olvides de decir que $\nabla h \neq \vec{0}$: es lo que garantiza que el plano existe.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r - s^2, r + s, r^2 + s^2)$, (r, s) ∈ ℝ².
Halle la recta normal a Σ en el punto (−1, 1, 1).

> **Respuesta:** (r, s) = (0, 1); $\vec{N} = (2, -2, 3)$. Recta normal: $\vec{X} = (-1, 1, 1) + t(2, -2, 3)$, t ∈ ℝ.
>
> **Paso 1, los parámetros del punto:** $\vec{X}(r, s) = (-1, 1, 1)$ pide $r - s^2 = -1$, $r + s = 1$, $r^2 + s^2 = 1$. Con r = 1 − s en la tercera: $2s^2 - 2s = 0$, s = 0 o s = 1. Con s = 0 queda r = 1 y $r - s^2 = 1 \neq -1$ ✗; con s = 1 queda r = 0 y $r - s^2 = -1$ ✓. Único par: **(r, s) = (0, 1)**.
> **Paso 2, derivadas:** $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_r = (1, 1, 2r) = (1, 1, 0)$, $\vec{X}_s = (-2s, 1, 2s) = (-2, 1, 2)$ en (0, 1).
> **Paso 3, normal:** $\vec{N} = \vec{X}_r \times \vec{X}_s = (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1, 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) =$ **(2, −2, 3)** $\neq \vec{0}$: punto regular, la recta normal existe.
> **Resultado:** $r_{\vec{N}}$: **$\vec{X} = (-1, 1, 1) + t(2, -2, 3)$**, t ∈ ℝ.
> **Control:** $\vec{N} \cdot \vec{X}_r = 2 - 2 + 0 = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{X}_s = -4 - 2 + 6 = 0$ ✓.
> **Trampa:** la componente del medio $\vec{X}_s$ se olvida seguido: $(r + s)'_s = 1$, no 0. Y el par (1, 0) cumple dos de las tres ecuaciones pero no es el punto.

24/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $g(x, y) = xf(y) + yf(x) + 4x^2 + 2xy + y^2$; con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Demuestre que el punto (0, 0) es un punto crítico de g y clasifíquelo.

> **Respuesta:** $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, así que (0, 0) es punto crítico. $Hg(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = -20 < 0$: es punto silla (no hay extremo; $g(0, 0) = 0$).
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}$, así que x f(y), y f(x) y el polinomio son C^2 en $\mathbb{R}^2$: g es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto) y sirve el criterio del hessiano.
> **Gradiente:** $g'_x = f(y) + y\,f'(x) + 8x + 2y$, $g'_y = x\,f'(y) + f(x) + 2x + 2y$.
> **En el origen:** $g'_x(0, 0) = f(0) + 0 \cdot f'(0) + 0 = 0$ y $g'_y(0, 0) = 0 \cdot f'(0) + f(0) + 0 = 0$. Entonces $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$: **(0, 0) es punto crítico**.
> **Derivadas segundas:** $g''_{xx} = y\,f''(x) + 8$, $g''_{xy} = f'(y) + f'(x) + 2$, $g''_{yy} = x\,f''(y) + 2$. En (0, 0): $g''_{xx} = 0 \cdot f''(0) + 8 = 8$, $g''_{xy} = 2 + 2 + 2 = 6$, $g''_{yy} = 0 \cdot f''(0) + 2 = 2$. ($f''(0)$ no es dato, pero no hace falta: siempre aparece multiplicada por 0.)
> **Hessiano:** $Hg(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 16 - 36 = -20 < 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
> **Clasificación:** como $\det < 0$, (0, 0) es un **punto silla**: g no tiene extremo relativo ahí ($g(0, 0) = 0$).
> **Trampa:** en g''_{xy} hay dos aportes de f': $f'(y)$ viene de derivar x f(y) (primero en x, después en y) y $f'(x)$ viene de y f(x). Si te olvidás uno queda $g''_{xy} = 4$, $\det = 16 - 16 = 0$ y el criterio no decide: ese error te deja sin respuesta.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (π, 1, 0) la ecuación

$$\frac{x}{y} + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 = \pi,$$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto (π, 1, 0).

> **Respuesta:** $\nabla f(\pi, 1) = (-1/\pi, 1)$. Plano tangente: $x - \pi y + \pi z = 0$ (o sea $z = y - x/\pi$).
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = x/y + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 - \pi$, $P = (\pi, 1, 0)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \pi/1 + \operatorname{sen} 0 + 0 - \pi = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{y \neq 0\}$, que contiene a P ($y = 1$) ✓. (3) $F_z = x\cos(xz) + 4yz$, $F_z(P) = \pi \cos 0 + 0 = \pi \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (π, 1), con $f(\pi, 1) = 0$.
> **Derivadas:** $F_x = 1/y + z\cos(xz)$, $F_x(P) = 1$. $F_y = -\frac{x}{y^2} + 2z^2$, $F_y(P) = -\pi$. $f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -1/\pi$, $f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -(-\pi)/\pi = 1$.
> **Plano tangente:** f es diferenciable en (π, 1), así que el gráfico tiene plano tangente $z = f(\pi, 1) + f_x(x - \pi) + f_y(y - 1) = -(x - \pi)/\pi + (y - 1) = y - x/\pi$. Multiplicando por π: **$x - \pi y + \pi z = 0$**.
> **Control:** el gráfico de f es la superficie $F = 0$ cerca de P, así que la normal también es $\nabla F(P) = (1, -\pi, \pi)$: coincide. Y P lo cumple: $\pi - \pi + 0 = 0$ ✓.

> **Trampa:** el término x/y depende de y: su derivada es $-x/y^2$, no 0. Si te la olvidás te queda $f_y = 0$ y el plano sale mal.

Ejercicio 3. Sea $h = f \circ \vec{g}$, con $f(x, y) = x + xy^2$, y $\vec{g}(u, v) = (au + v, v)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halle el valor de a para que el versor en el cual se produce la máxima derivada direccional de h en el punto (0, 1) sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Indique el valor de esa derivada direccional máxima.

> **Respuesta:** $\nabla h(0, 1) = (2a, 4)$; $a = -2$, y entonces $\nabla h(0, 1) = (-4, 4)$. La derivada direccional máxima vale $4\sqrt{2}$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(0, 1) = (a \cdot 0 + 1, 1) = (1, 1)$, para cualquier a.
> **Hipótesis:** f y $\vec{g}$ son polinómicas, C^∞; h es diferenciable y vale la regla de la cadena, y también $h'((0, 1), \check{v}) = \nabla h(0, 1) \cdot \check{v}$.
> **Gradientes:** $\nabla f(x, y) = (1 + y^2, 2xy)$, en (1, 1) da (2, 2). $D\vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> **Cadena:** $\nabla h(0, 1) = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2a, 2 + 2) =$ **(2a, 4)**. (Se puede controlar derivando $h(u, v) = (au + v)(1 + v^2)$ directo.)
> **Condición:** la derivada direccional máxima se produce en $\check{v} = \nabla h / \|\nabla h\|$ (por Cauchy Schwarz, $\nabla h \cdot \check{v} \leq \|\nabla h\|$). Pedir que eso sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ equivale a $\nabla h(0, 1) = \lambda(-1, 1)$ con $\boldsymbol{\lambda > 0}$. La segunda componente da $\lambda = 4 > 0$ ✓, y la primera, $2a = -4$, o sea $\mathbf{a = -2}$.
> **Valor máximo:** con $a = -2$, $\nabla h(0, 1) = (-4, 4)$ y $\|\nabla h\| = \sqrt{32} = \mathbf{4\sqrt{2}}$.
> **Trampa:** no alcanza con que ∇h sea paralelo a $(-1, 1)$: si saliera $\lambda < 0$, ese versor sería el de la derivada *mínima*. Acá $\lambda = 4$ es positivo, por eso $a = -2$ sirve.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0$. $\}$

a) Grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Calcule, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, (Sugerencia: Utilice el resultado del ítem anterior).

> **Respuesta:** a) C_0 = eje y ($x = 0$). C_1 = circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ sin el origen. b) El límite no existe: por el eje y da 0 y por la circunferencia C_1 da 1.
>
> **a) Nivel 0:** $C_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Si $x = 0$, f vale 0 por definición: todo el eje y está en C_0. Si $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 + y^2}{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, que contradice $x \neq 0$. Entonces $\mathbf{C_0}$ **es el eje y** (la recta $x = 0$, con el origen incluido).
> **Nivel 1:** si $x = 0$ la función vale $0 \neq 1$, así que necesariamente $x \neq 0$ y $\dfrac{x^2 + y^2}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$. Es la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1, que pasa por el origen; como el origen tiene $x = 0$ hay que sacarlo. $\mathbf{C_1 = \{(x - 1)^2 + y^2 = 1\}}$ **sin el punto (0, 0)**.
> **Gráfico:** el eje y entero (nivel 0) y la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1, tangente al eje y en el origen, con el origen como punto vacío (nivel 1).
> **b) Planteo:** si el límite existiera, tendría que dar lo mismo por cualquier camino que llegue al origen. Usamos los dos conjuntos de nivel.
> **Camino 1, el eje y** ($x = 0$, $y \to 0$): f vale 0 en todos sus puntos, el límite por ahí es 0.
> **Camino 2, la circunferencia** $\mathbf{C_1}$**:** parametrizada como $(1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \to 0^+$, tiende a (0, 0) y para

$t \neq 0$ chico es $x = 1 - \cos t > 0$, así que f vale 1 en todos sus puntos: el límite por ahí es 1.
Conclusión: $0 \neq 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ **f(x, y) no existe**.
Trampa: por todas las rectas el límite da 0 (por $y = mx$, $f = (1 + m^2)x/2 \to 0$; por $x = 0$ vale 0), y eso tienta a decir que el límite es 0. Pero que dé lo mismo por todas las rectas no prueba que exista. Acá el problema aparece por curvas tangentes al eje y: en general el nivel $k \neq 0$ es la circunferencia $(x - k)^2 + y^2 = k^2$ sin el origen, y todas pasan por (0, 0), así que cerca del origen f toma cualquier valor.

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies de ecuaciones $z = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}$.
Calcule el o los puntos de C donde la recta tangente resulta paralela al eje y.

Respuesta: (1, 0, 1) y (–1, 0, 1).

Las superficies: $F = x^2 + y^2 - z$ y $G = x^2 + y^2/4 + z - 2$, ambas C^1, con $\nabla F = (2x, 2y, -1)$ y $\nabla G = (2x, y/2, 1)$.
Dirección tangente en un punto de C: $\vec{T} = \nabla F \times \nabla G = (2y\cdot 1 - (-1)\cdot(y/2), (-1)\cdot 2x - 2x\cdot 1, 2x\cdot(y/2) - 2y\cdot 2x) = (5y/2, -4x, -3xy)$. $\vec{T}$ no se anula sobre C: haría falta $x = y = 0$, y (0, 0, z) no puede cumplir a la vez $z = 0$ y $z = 2$. Así que C es regular en todo punto.
Condición: paralela al eje y quiere decir $\vec{T} \parallel (0, 1, 0)$: primera y tercera componentes nulas. $5y/2 = 0$ da $y = 0$, y entonces $-3xy = 0$ se cumple sola.
Puntos de C con y = 0: igualando las z, $x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2/4$, o sea $2x^2 + (5/4)y^2 = 2$ (la proyección de C es una elipse). Con $y = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, y $z = x^2 + y^2 = 1$.
Resultado: (1, 0, 1) y **(–1, 0, 1)**, con $\vec{T} = (0, -4, 0)$ y (0, 4, 0) respectivamente: no nulos y paralelos al eje y ✓.
Control con parametrización: $x = \cos t$, $y = \sqrt{(8/5)}\,\operatorname{sen} t$, $z = x^2 + y^2 = 1 + (3/5)\operatorname{sen}^2 t$; $x' = -\operatorname{sen} t$ y $z' = (3/5)\operatorname{sen} 2t$ se anulan juntas sólo en $t = 0$ y $t = \pi$, que son los mismos dos puntos ✓.
Trampa: “paralela al eje y” pide *dos* componentes nulas (la x y la z), no una sola; con una sola condición te quedarías con la respuesta de “paralela a un plano coordenado”, que es otra pregunta.

10/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)}, \dfrac{1}{x^2 - y^2})$

Determine y grafique el dominio natural D. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

> **Respuesta:** D = {(x, y) : $x^2 + y^2 \geq 9$, $y \neq x$, $y \neq -x$}: el exterior del círculo de radio 3 con la circunferencia, sin las dos diagonales. No es abierto (contiene puntos de la circunferencia, que son frontera), no es cerrado (no contiene los puntos de las diagonales con $x^2 + y^2 \geq 9$, que son frontera) y no es conexo (queda en cuatro regiones).
>
> **Condiciones:** primera componente: $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$. Segunda: $x^2 - y^2 \neq 0$.
> **La raíz:** $x^2 + y^2 \geq 9$: los puntos a distancia ≥ 3 del origen, con la circunferencia de radio 3 incluida.
> **El denominador:** $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ o $y = -x$: se sacan las dos diagonales.
> **D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9, y \neq x, y \neq -x\}$**. Gráfico: todo el plano por fuera del disco de radio 3 pintado, la circunferencia en trazo lleno, las dos diagonales punteadas desde la circunferencia hacia afuera, y los cuatro puntos $(\pm 3/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2})$ donde se cortan con la circunferencia en círculo vacío. Quedan cuatro sectores no acotados: derecha ($|y| < x$), arriba ($|x| < y$), izquierda y abajo.
> **Frontera (para justificar):** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) : y = \pm x, x^2 + y^2 \geq 9\}$.
> **¿Abierto?** No: $(3, 0) \in D$, pero todo entorno suyo tiene puntos $(3 - \varepsilon, 0)$ a distancia menor que 3 del origen, que no están en D.
> **¿Cerrado?** No: $(3, 3) \notin D$ (está sobre $y = x$), pero $(3, 3 + 1/n) \in D$ y tiende a $(3, 3)$. D no contiene ese punto de su frontera.
> **¿Conexo?** No. $g(x, y) = x^2 - y^2$ es continua y no se anula en D. Los abiertos $\{g > 0\}$ y $\{g < 0\}$ son disjuntos, cubren D y los dos tienen puntos de D: (4, 0) y (0, 4). (Con caminos: una curva en D de (4, 0) a (0, 4) haría pasar g de 16 a −16 sin anularse, absurdo por Bolzano.) En realidad son cuatro componentes, una por sector.
> **Trampa:** "exterior del círculo" suena a abierto, pero acá la circunferencia pertenece a D, y eso solo ya impide que sea abierto. Lo de las diagonales es lo que impide que sea cerrado.

Ejercicio 2. Sea la superficie Σ parametrizada por

$\vec{X}(u, v) = (u^2 + v, u - v, u + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

y P = (1, 1, 1). Determine, si existe, el punto donde la recta normal a Σ en P interseca al plano xy.

> **Respuesta:** El punto existe: (4/3, 4/3, 0). Recta normal: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, −3), con t = 1/3.
>
> **Parámetros de P:** $\vec{X}(u, v) = (1, 1, 1)$ pide $u^2 + v = 1$, $u - v = 1$, $u + v^2 = 1$. De la segunda $u = v + 1$; en la primera $(v + 1)^2 + v = 1$, o sea $v^2 + 3v = 0$: $v = 0$ o $v = -3$. Con $v = 0$, $u = 1$ y $u + v^2 = 1$ ✓. Con $v = -3$, $u = -2$ y $u + v^2 = 7 \neq 1$ ✗. Único parámetro: $(u, v) = (1, 0)$.
> **Normal:** $\vec{X}_u = (2u, 1, 1) = (2, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (1, -1, 2v) = (1, -1, 0)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (1, 1, -3) \neq \vec{0}$, así que P es punto regular y la recta normal está bien definida.
> **Recta normal:** $(x, y, z) = (1 + t, 1 + t, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.
> **Intersección con el plano xy (z = 0):** $1 - 3t = 0$, $t = 1/3$, y el punto es **(4/3, 4/3, 0)**. Existe porque la recta no es paralela al plano xy (su director tiene componente z igual a $-3 \neq 0$).

> **Trampa:** antes de derivar hay que encontrar (u, v) de P y descartar la solución falsa v = −3, que cumple dos ecuaciones pero no la tercera.

Ejercicio 3. Sea
$g(x, y) = f(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$,
donde $w = f(u, v)$ es una función definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (2, 0)$ por
$u\, e^{vw} - 3uv - 2w = 0$.
Estime $g(1.03, 0.98)$ mediante una aproximación lineal.

> **Respuesta:** $w_0 = f(2, 0) = 1$, $\nabla f(2, 0) = (1/2, -2)$; $g(1, 1) = 1$, $\nabla g(1, 1) = (-3, 7/2)$. $g(1.03, 0.98) \approx 1 - 0.09 - 0.07 = 0.84$.
>
> Lectura: el exponente de e está borroso en la foto; se lee vw, que es consistente con que haya w_0 en (2, 0) (con uw, por ejemplo, quedaría $2e^{2w} = 2w$, que no tiene solución).
> **El valor w_0:** $F(u, v, w) = u\, e^{vw} - 3uv - 2w$. En (2, 0): $2 \cdot e^0 - 0 - 2w = 0$, así que $w_0 = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (exponencial y polinomios), $F(2, 0, 1) = 0$ y $F'_w = uv\, e^{vw} - 2$ vale $-2 \neq 0$ en (2, 0, 1). Entonces existe f de clase C^1 en un entorno de (2, 0) con $f(2, 0) = 1$ y $F(u, v, f(u, v)) = 0$.
> **Derivadas de F en (2, 0, 1):** $F'_u = e^{vw} - 3v = 1$; $F'_v = uw\, e^{vw} - 3u = 2 - 6 = -4$; $F'_w = -2$. Luego $f'_u = -F'_u/F'_w = 1/2$ y $f'_v = -F'_v/F'_w = -(-4)/(-2) = -2$. **$\nabla f(2, 0) = (1/2, -2)$**.
> **Elección del punto:** $(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$ en (1, 1) da (2, 0) ✓, y (1, 1) está cerca de (1.03, 0.98). Entonces $g(1, 1) = f(2, 0) = 1$.
> **Regla de la cadena:** la interior es polinómica y f es C^1 cerca de (2, 0), así que g es C^1 (diferenciable) cerca de (1, 1). Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 - y + 2$ da $(2x, -1) = (2, -1)$; $v = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (2, -2)$. $g'_x = (1/2) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = -3$; $g'_y = (1/2)(-1) + (-2)(-2) = 7/2$. **$\nabla g(1, 1) = (-3, 7/2)$**.
> **Resultado:** con $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$: $g(1.03, 0.98) \approx 1 + (-3)(0.03) + (7/2)(-0.02) = 1 - 0.09 - 0.07 =$ **0.84**.
> **Trampa:** el signo de f'_v: $-F'_v/F'_w = -(-4)/(-2) = -2$, no +2. Y la derivada de $u\, e^{vw}$ respecto de v lleva el factor w (regla de la cadena en el exponente): $uw\, e^{vw}$.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = x^2 y + y\, f(xy)$, con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que
$f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 8$.
Determine si P = (1, 1) es punto crítico de h y, en caso afirmativo, clasifíquelo.

> **Respuesta:** $\nabla h(1, 1) = (0, 0)$: P = (1, 1) es punto crítico. $Hh(1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 4 > 0$ y $h''_{xx} = 10 > 0$: mínimo relativo, de valor $h(1, 1) = 2$.
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}$ y $(x, y) \mapsto xy$ es polinómica, así que $f(xy)$ es C^2 y h es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto): vale el criterio del hessiano. Escribo $u = xy$, que en (1, 1) vale 1.
> **Gradiente:** $h'_x = 2xy + y \cdot f'(xy) \cdot y = 2xy + y^2 f'(xy)$, $h'_y = x^2 + f(xy) + y \cdot f'(xy) \cdot x = x^2 + f(xy) + xy\, f'(xy)$.
> **En (1, 1):** $h'_x = 2 + f'(1) = 2 - 2 = 0$ y $h'_y = 1 + f(1) + f'(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. **P = (1, 1) es punto crítico**.
> **Derivadas segundas:** $h''_{xx} = 2y + y^3 f''(xy)$; $h''_{xy} = 2x + 2y\, f'(xy) + xy^2\, f''(xy)$; $h''_{yy} = x\, f'(xy) + x\, f'(xy) + x^2 y\, f''(xy) = 2x\, f'(xy) + x^2 y\, f''(xy)$. En (1, 1): $h''_{xx} = 2 + 8 = 10$, $h''_{xy} = 2 - 4 + 8 = 6$, $h''_{yy} = -4 + 8 = 4$. (Control: derivando h'_y respecto de x sale $2x + 2y\, f'(xy) + xy^2\, f''(xy)$, igual que h''_{xy}.)
> **Hessiano:** $Hh(1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 40 - 36 = 4 > 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $h''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$

y $h''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no decide.
Clasificación: det > 0 y $h''_{xx} = 10 > 0$: **mínimo relativo** en (1, 1), de valor h(1, 1) = 1 + f(1) = **2**.
Trampa: y f(xy) es un producto en la variable y: al derivar respecto de y aparecen f(xy) (por la y de adelante) y xy f′(xy) (cadena). Y en h'_y hay que volver a derivar con producto el término xy f′(xy): de ahí sale el 2x f′(xy) de h''_{yy}, que es donde más se equivoca la gente.

Ejercicio 5. Sea $f \in C^1$, con f(1, 2) = –1. Se sabe que la derivada de f en (1, 2) en la dirección del versor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ es $2\sqrt{2}$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en (1, 2, –1).

Respuesta: $\nabla f(1, 2) = (1, 3)$. Plano tangente: z = x + 3y – 8 (x + 3y – z = 8).

Hipótesis: $f \in C^1$, así que es diferenciable en (1, 2) y la derivada direccional se calcula como $f'((1, 2), \check{v}) = \nabla f(1, 2) \cdot \check{v}$.
Planteo: con $\check{v} = (1/\sqrt{2})(1, 1)$ y $\nabla f(1, 2) = (1, b)$, donde $b = f_y(1, 2)$: $(1 + b)/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Multiplicando por $\sqrt{2}$, 1 + b = 4, así que $\mathbf{f_y(1, 2) = 3}$.
Plano tangente: $z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x – 1) + f_y(1, 2)(y – 2) = –1 + (x – 1) + 3(y – 2)$, es decir **z = x + 3y – 8**. Control: en (1, 2) da 1 + 6 – 8 = –1 ✓.
Trampa: el $\sqrt{2}$ del versor se cancela con el de $2\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$); si te olvidás de normalizar (usar (1, 1) en vez del versor) sale f_y mal. Y sin la hipótesis C^1 (diferenciable) la fórmula $\nabla f \cdot \check{v}$ no se puede usar.

16/12/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{y(y + 2x)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \ (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ 0 \ (x, y) = (0, 0) \}$

a) Analice la continuidad de f en el origen.

b) Determine si existen las derivadas parciales en (0, 0) y qué puede decir de la diferenciabilidad de f en ese punto.

> **Respuesta:** a) f es continua en (0, 0): $|f(x, y)| \leq 3\sqrt{(x^2 + y^2)} \to 0 = f(0, 0)$. b) $f'_x(0, 0) = 0$; $f'_y(0, 0)$ no existe (los laterales del cociente incremental dan 1 y –1). Por lo tanto f no es diferenciable en (0, 0).
>
> **a) Planteo:** f es continua en el origen si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Para probar que un límite existe no sirven los caminos: hay que acotar.
> **Acotación:** llamá $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Siempre $|x| \leq \rho$ y $|y| \leq \rho$, entonces $|y + 2x| \leq |y| + 2|x| \leq 3\rho$ y $|y(y + 2x)| \leq \rho \cdot 3\rho = 3\rho^2$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$: $0 \leq |f(x, y)| \leq 3\rho^2/\rho = 3\rho$.
> **Conclusión:** $3\rho \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$, así que por intercalación $\lim f = 0 = f(0, 0)$: **f es continua en el origen**. En polares es lo mismo: $f = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta \ (\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta)$, o sea ρ (que tiende a 0) por algo acotado por 3 sin importar θ.
> **b) $f'_x(0, 0)$:** sobre el eje x, $f(h, 0) = 0$ para todo $h \neq 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} (f(h, 0) - f(0, 0))/h = \lim 0/h = \mathbf{0}$.
> **$f'_y(0, 0)$:** $f(0, k) = k^2/\sqrt{(k^2)} = k^2/|k| = |k|$, así que el cociente incremental es $(f(0, k) - f(0, 0))/k = |k|/k$, que vale 1 si $k > 0$ y –1 si $k < 0$. Los límites laterales son 1 y –1, distintos: **$f'_y(0, 0)$ no existe**.
> **Diferenciabilidad:** si f fuera diferenciable en (0, 0), existirían en ese punto todas las derivadas direccionales, en particular las dos parciales. Como $f'_y(0, 0)$ no existe, **f no es diferenciable en el origen**.
> **Trampa:** $\sqrt{(k^2)}$ es $|k|$, no k. Si simplificás $k^2/\sqrt{(k^2)} = k$ te queda $f'_y(0, 0) = 1$ y terminás calculando un resto que no tiene sentido. Además, la continuidad no alcanza para diferenciabilidad: esta f es continua y no es diferenciable.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (1, –1, –1) la ecuación

$x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y = -2$

define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1. Calcule el valor mínimo de la derivada direccional de g en (–1, –1) y la dirección (versor) en la cual se produce.

> **Respuesta:** $\nabla g(-1, -1) = (1, 4)$. Mínimo $-\sqrt{17}$, en $\check{v} = (-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y + 2$, P = (1, –1, –1), queremos $x = g(y, z)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = (1)(-1) - (-1)(1) + 2(-1) + 1 + (-1) + 2 = -1 + 1 - 2 + 1 - 1 + 2 = 0$ ✓. (2) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_x = 2xy + 1$, $F_x(P) = -2 + 1 = -1 \neq 0$ ✓. Entonces $x = g(y, z)$ es C^1 en un entorno de (–1, –1), con $g(-1, -1) = 1$.
>
> **Derivadas:** $F_y = x^2 - z^2 + 1$, $F_y(P) = 1 - 1 + 1 = 1$. $F_z = -2yz + 6z^2$, $F_z(P) = -2(-1)(-1) + 6 = 4$. $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = -1/(-1) = 1$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = -4/(-1) = 4$. **$\nabla g(-1, -1) = (1, 4)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en (–1, –1), y entonces para todo versor $\check{v}$ vale g'

$((-1, -1), \check{v}) = \nabla g((-1, -1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. El mínimo es con $\theta = \pi$, o sea $\check{v}$ opuesto al gradiente: $\check{v} = -\nabla g/\|\nabla g\|$ = **$(-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$**, y el valor mínimo es **$-\|\nabla g\| = -\sqrt{17}$**.

Trampa: el mínimo de la derivada direccional no es 0 (eso pasa en las direcciones perpendiculares): es $-\|\nabla g\|$. Y ojo con $F_x(P) = -1$: el doble signo menos hace que g_y y g_z salgan positivos.

Ejercicio 3. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y - z = 0$ y sea L la recta de ecuación $\vec{X} = (-1, -2, 1) + \lambda(-2, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Halle él o los puntos P en los cuales S y L se intersecan ortogonalmente.

Respuesta: Un único punto: P = (1, −1, 0) ($\lambda = -1$). El otro corte, (−2, −5/2, 3/2), no es ortogonal.

Planteo: "se intersecan ortogonalmente" en P significa que $P \in S \cap L$ y que L es perpendicular al plano tangente a S en P, o sea que la dirección $\vec{d} = (-2, -1, 1)$ es paralela a la normal de S en P.
Normal de S: S es el nivel 0 de $G(x, y, z) = x^2 + y - z$, C^1, con $\nabla G = (2x, 1, -1)$, que nunca se anula (la segunda componente es 1).
Paso 1, cortes: un punto de L es $(-1 - 2\lambda, -2 - \lambda, 1 + \lambda)$. En S: $(1 + 2\lambda)^2 + (-2 - \lambda) - (1 + \lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 3 - 2\lambda = 4\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$, o sea $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$: $\lambda = -1$ o $\lambda = 1/2$. Los cortes son (1, −1, 0) y (−2, −5/2, 3/2).
Paso 2, ortogonalidad: en (1, −1, 0), $\nabla G = (2, 1, -1) = -(-2, -1, 1)$: paralelo a $\vec{d}$ ✓. En (−2, −5/2, 3/2), $\nabla G = (-4, 1, -1)$, que no es múltiplo de (−2, −1, 1) (la primera componente pediría factor 2 y la segunda factor −1) ✗.
Resultado: P = (1, −1, 0). Control: $z = x^2 + y$ da $0 = 1 - 1$ ✓.
Trampa: no alcanza con cortar: la recta corta a S en dos puntos, y sólo en uno es normal. Tampoco sirve pedir $\nabla G \cdot \vec{d} = 0$: eso diría que la recta es tangente, que es justo lo contrario.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = \alpha e^{\alpha x} - xy + \beta \operatorname{sen}(y) - x + y + y^2$.
Determine, si existen, los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que f alcance un extremo relativo en el origen y clasifique el tipo de extremo.

Respuesta: $\alpha = 1$ y $\beta = -1$: f tiene un mínimo relativo en el origen, de valor $f(0, 0) = 1$. (Con $\alpha = -1$, $\beta = -1$ el origen es crítico pero es punto silla.)

Planteo: f es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (exponencial, seno y polinomio). Como $\mathbb{R}^2$ es abierto y f es diferenciable, si f tiene un extremo relativo en (0, 0) necesariamente $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.
Gradiente: $f'_x = \alpha \cdot \alpha\, e^{\alpha x} - y - 1 = \alpha^2 e^{\alpha x} - y - 1$, $f'_y = -x + \beta \cos y + 1 + 2y$.
Condición necesaria: $f'_x(0, 0) = \alpha^2 - 1 = 0$ da $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$; $f'_y(0, 0) = \beta + 1 = 0$ da $\beta = -1$. Los candidatos son $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ y $(-1, -1)$.
Hessiano: $f''_{xx} = \alpha^3 e^{\alpha x}$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = -\beta \operatorname{sen} y + 2$. En el origen: $H = \begin{pmatrix} \alpha^3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y como $\alpha = \pm 1$, $\alpha^3 = \alpha$.
Criterio que se usa: si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
$\alpha = 1$, $\beta = -1$: $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 2 - 1 = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 1 > 0$: **mínimo relativo**. Valor: $f(0, 0) = \alpha e^0 + \beta \operatorname{sen} 0 = \mathbf{1}$.

α = −1, β = −1: $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = -2 - 1 = -3 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. Este par se descarta.

Resultado: el único par que sirve es **α = 1, β = −1**, con mínimo relativo en el origen de valor 1.

Trampa: α aparece dos veces (como coeficiente y en el exponente): $f'_x = \alpha^2 e^{\alpha x}$ y $f''_{xx} = \alpha^3 e^{\alpha x}$. Si derivás sólo el exponente o sólo el coeficiente te queda una ecuación lineal en α y perdés uno de los dos candidatos, y justamente hay que clasificar los dos para ver que uno no da extremo.

Ejercicio 5. Sean f(u, v, w) un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^3)$ y h(x, y) = f(x + y, x − y, xy). Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden de h en (1, 0) es

$p(x, y) = 9 - 3x + 2y - xy - x^2 + \tfrac{1}{2}y^2$

y que $f'_w(1, 1, 0) = 2$.

Calcule ∇f(1, 1, 0) y halle el plano tangente al conjunto de nivel de f en el punto (1, 1, 0).

Respuesta: ∇f(1, 1, 0) = (−3, −2, 2); f(1, 1, 0) = 5. Plano tangente al nivel 5 de f en (1, 1, 0): 3x + 2y − 2z = 5.

Qué da el Taylor: h es C^2 (composición de $f \in C^2$ con $\vec{g}(x, y) = (x + y, x - y, xy)$, polinómica). el polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. Ojo: p está escrito en potencias de x e y, no de (x − 1); por eso no se leen los coeficientes, se deriva y se evalúa.

Valor y gradiente de h en (1, 0): h(1, 0) = p(1, 0) = 9 − 3 − 1 = 5. $p'_x = -3 - y - 2x$, $p'_y = 2 - x + y$, y en (1, 0): ∇h(1, 0) = (−5, 1).

Regla de la cadena: $\vec{g}(1, 0) = (1, 1, 0)$ y f es C^1, luego diferenciable allí. $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$, en (1, 0): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\nabla h(1, 0) = \nabla f(1, 1, 0) \cdot D\vec{g}(1, 0)$: con ∇f(1, 1, 0) = (a, b, c), $h'_x = a + b + 0 \cdot c = -5$ y $h'_y = a - b + c = 1$.

Usar el dato: $c = f'_w(1, 1, 0) = 2$ (sin este dato el sistema tendría 3 incógnitas y 2 ecuaciones). Queda a + b = −5 y a − b = −1, de donde a = −3, b = −2. **∇f(1, 1, 0) = (−3, −2, 2)**.

Conjunto de nivel: f(1, 1, 0) = h(1, 0) = 5, así que (1, 1, 0) está en el nivel f = 5. Como f es C^1 y $\nabla f(1, 1, 0) \neq \vec{0}$, ese conjunto de nivel es una superficie regular cerca del punto y el gradiente es normal a ella.

Plano: −3(x − 1) − 2(y − 1) + 2(z − 0) = 0, o sea **3x + 2y − 2z = 5**.

Trampa: leer p como si estuviera centrado en (1, 0) y decir ∇h(1, 0) = (−3, 2) (los coeficientes lineales). Eso es ∇p(0, 0), no ∇p(1, 0).

18/10/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x^2 + y)}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique por separado D y su frontera. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

b) Grafique por separado el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > x^2 - 2,\ y > x\}$, la región arriba de la parábola $y = x^2 - 2$ y de la recta $y = x$. Frontera: la curva $y = \max\{x, x^2 - 2\}$ (parábola para $x \le -1$ y $x \ge 2$, segmento de $y = x$ entre $(-1, -1)$ y $(2, 2)$); nada de ella está en D. D es abierto, no es cerrado y es conexo. b) Nivel 0: la parábola $y = x^2 - 1$ para $x < (1 - \sqrt{5})/2$ o $x > (1 + \sqrt{5})/2$, dos ramas sin los extremos $((1 \pm \sqrt{5})/2, (1 \pm \sqrt{5})/2)$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(2 - x^2 + y)$ pide $2 - x^2 + y > 0$, o sea $y > x^2 - 2$. La raíz del denominador pide $y - x \ge 0$ y además $\neq 0$: $y > x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 2,\ y > x\}$.
> **Cortes:** $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ o $x = 2$: puntos $(-1, -1)$ y $(2, 2)$. Entre -1 y 2 la recta está arriba de la parábola ($x^2 - x - 2 \le 0$ ahí), así que manda $y > x$; afuera de ese intervalo manda $y > x^2 - 2$.
> **Gráfico de D:** la parábola $y = x^2 - 2$ (vértice $(0, -2)$, abre hacia arriba) y la recta $y = x$, ambas en punteado. D es la región de arriba de las dos a la vez: por encima de la parábola en los costados y por encima del segmento diagonal de $(-1, -1)$ a $(2, 2)$ en el medio. Contiene, por ejemplo, a $(0, 1)$.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial D = \{y = \max\{x, x^2 - 2\}\}$: la rama izquierda de la parábola hasta $(-1, -1)$, el segmento de $y = x$ de $(-1, -1)$ a $(2, 2)$ y la rama derecha de la parábola desde $(2, 2)$. Es una sola curva, en trazo lleno; ningún punto suyo está en D (sobre la parábola el ln no existe, sobre la recta se anula el denominador).
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = 2 - x^2 + y$ y $g_2(x, y) = y - x$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. $(0, 0)$ está sobre el segmento de frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, \varepsilon)$, y puntos con $y < x$) y no pertenece a D.
> **Conexo:** sí. $D = \{y > h(x)\}$ con $h(x) = \max\{x, x^2 - 2\}$ continua. Dados dos puntos de D, subí en vertical desde cada uno hasta una altura M mayor que el máximo de h en el intervalo entre sus abscisas y uní por la horizontal $y = M$: todo el camino queda en D.
> **Además** (no lo piden): no es acotado; contiene a $(0, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
> **b) Planteo:** en D el denominador no se anula, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(2 - x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 + y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$. Esos puntos ya cumplen $y > x^2 - 2$; falta pedir $y > x$.
> **Condición:** $x^2 - 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0{,}62$ o $x > (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}62$.
> **Resultado:** C_0 son dos ramas de la parábola $y = x^2 - 1$ (vértice $(0, -1)$): la izquierda para $x < (1 - \sqrt{5})/2$ y la derecha para $x > (1 + \sqrt{5})/2$. Los extremos $((1 - \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2)$ y $((1 + \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2)$ caen sobre la recta $y = x$ y quedan huecos. El vértice $(0, -1)$ no está (no cumple $y > x$).
> **Trampa:** dibujar la parábola $y = x^2 - 1$ entera: el tramo central queda debajo de la recta $y = x$, fuera del dominio.

Ejercicio 2. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ y $f: D \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y^2x + 2x^2 + y^2 + 1$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

> **Respuesta:** En D hay dos puntos críticos: (0, 0), mínimo relativo de valor $f(0, 0) = 1$, y (–1, 2), punto silla ($f(-1, 2) = 3$). (–1, –2) anula el gradiente pero no está en D.
>
> **Planteo:** $D = \{y > -1\}$ es un semiplano abierto y f es polinómica, C^∞ en D. Todos los puntos de D son interiores, así que los extremos relativos sólo pueden estar donde $\nabla f = 0$.
> **Gradiente:** $f'_x = y^2 + 4x$, $f'_y = 2xy + 2y = 2y(x + 1)$.
> **Puntos críticos:** $f'_y = 0$ pide $y = 0$ o $x = -1$. Caso $y = 0$: $f'_x = 4x = 0$, $x = 0$, y sale (0, 0). Caso $x = -1$: $f'_x = y^2 - 4 = 0$, $y = \pm 2$, y salen (–1, 2) y (–1, –2).
> **Dominio:** (–1, –2) tiene $y = -2 < -1$, **no pertenece a D** y se descarta. Quedan **(0, 0)** y **(–1, 2)**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = 2y$, $f''_{yy} = 2x + 2$, $H = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
> **(0, 0):** $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 8 > 0$ y $f''_{xx} = 4 > 0$: **mínimo relativo**, de valor **f(0, 0) = 1**.
> **(–1, 2):** $H = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 0 - 16 = -16 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(-1, 2) = -4 + 2 + 4 + 1 = 3$).
> **Trampa:** el dominio está para algo: (–1, –2) anula la expresión del gradiente pero no es punto crítico de f porque f no está definida ahí. Y en $2y(x + 1) = 0$ no dividas por y: el caso $y = 0$ es el que da el mínimo.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (2, 1, 2), la ecuación
$xz + yz + e^{y+z-3} = 7$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((2, 1), \check{v}) = 0$.

> **Respuesta:** $\nabla f(2, 1) = (-1/2, -3/4)$. $f'((2, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = \pm(3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = xz + yz + e^{y+z-3} - 7$, $P = (2, 1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = 4 + 2 + e^0 - 7 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomio más exponencial de un polinomio) ✓. (3) $F_z = x + y + e^{y+z-3}$, $F_z(P) = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (2, 1), con $f(2, 1) = 2$.
> **Derivadas:** $F_x = z$, $F_x(P) = 2$. $F_y = z + e^{y+z-3}$, $F_y(P) = 2 + 1 = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -1/2$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -3/4$. **$\nabla f(2, 1) = (-1/2, -3/4)$**, paralelo a (2, 3).
> **Derivada direccional:** f es C^1, luego diferenciable en (2, 1), y $f'((2, 1), \check{v}) = \nabla f(2, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-a/2 - 3b/4 = 0$, o sea $2a + 3b = 0$: $\check{v}$ tiene que ser perpendicular al gradiente.
> **Resultado:** $b = -2a/3$ y $a^2 + b^2 = 1$ dan $a^2 (13/9) = 1$, $a = \pm 3/\sqrt{13}$. Los versores son **$\check{v} = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$ y $\check{v} = (-3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$**.
> **Trampa:** son dos versores, no uno; y tiene que ser versor (norma 1), así que (3, –2) solo no alcanza como respuesta.

Ejercicio 4. Sea f(u, v) una función de clase C^1 tal que L(u, v) = 1 + 2v − u es su aproximación lineal en (−1, 1). Sea g(x, y) = f($e^y x$, cos(xy) + y). Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (−1, 0, g(−1, 0)).

> **Respuesta:** g(−1, 0) = 4, ∇g(−1, 0) = (−1, 3). Plano tangente: z = 4 − (x + 1) + 3y, o sea x − 3y + z = 3.
>
> **Datos de f:** la aproximación lineal en (−1, 1) es L(u, v) = f(−1, 1) + f'_u(−1, 1)(u + 1) + f'_v(−1, 1)(v − 1). Como L(u, v) = 1 + 2v − u, evaluando y derivando: f(−1, 1) = L(−1, 1) = 1 + 2 + 1 = 4 y **∇f(−1, 1) = (−1, 2)**.
> **El punto interior:** con u = $e^y x$ y v = cos(xy) + y, en (−1, 0) queda u = −1, v = cos 0 + 0 = 1: justo (−1, 1) ✓. Entonces g(−1, 0) = f(−1, 1) = 4.
> **Hipótesis:** f es C^1 (diferenciable) y (u, v) es C^1 (exponencial, coseno, polinomios), así que g es C^1 y vale la regla de la cadena; además g es diferenciable en (−1, 0), así que tiene plano tangente.
> **Derivadas interiores en (−1, 0):** $u'_x = e^y = 1$; $u'_y = e^y x = -1$; $v'_x = -y \operatorname{sen}(xy) = 0$; $v'_y = -x \operatorname{sen}(xy) + 1 = 1$.
> **Cuenta:** $g'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 = -1$; $g'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = (-1)(-1) + 2\cdot 1 = 3$.
> **Resultado:** z = 4 + (−1)(x + 1) + 3(y − 0), es decir **x − 3y + z = 3**. Control: (−1, 0, 4) cumple −1 − 0 + 4 = 3 ✓.
> **Trampa:** ∇f no son los coeficientes "sueltos" leídos en otro orden: L está escrita como 1 + 2v − u, así que $f'_u = -1$ y $f'_v = 2$. Y no te olvides del +1 en $v'_y = -x \operatorname{sen}(xy) + 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (uv, u + v, 2v - u),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
y C la curva definida por las ecuaciones $xy + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z = 0$. Halle el o los puntos P ∈ Σ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano normal a C en (1, 0, −1).

> **Respuesta:** Un único punto: P = $\vec{X}(8, 2)$ = (16, 10, −4). Plano tangente a Σ en P: x − 4y − 2z = −16 (paralelo al plano normal a C, x − 4y − 2z = 3).
>
> **Paso 1, la curva en el punto:** C = {$F_1 = 0$} ∩ {$F_2 = 0$} con $F_1 = xy + z^2 - 1$, $F_2 = x^2 + y^2 + z$. (1, 0, −1) está: 0 + 1 − 1 = 0 y 1 + 0 − 1 = 0 ✓. Ambas son C^1; $\nabla F_1 = (y, x, 2z) = (0, 1, -2)$ y $\nabla F_2 = (2x, 2y, 1) = (2, 0, 1)$ en el punto.
> **Paso 2, tangente a C:** $\vec{T} = \nabla F_1 \times \nabla F_2 = (1\cdot 1 - (-2)\cdot 0, (-2)\cdot 2 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 2) = (1, -4, -2) \neq \vec{0}$ (los gradientes no son paralelos, así que C es regular ahí). El plano normal a C tiene normal $\vec{T}$: (x − 1) − 4y − 2(z + 1) = 0, o sea x − 4y − 2z = 3.
> **Paso 3, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (v, 1, -1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, 2)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot 2 - (-1)\cdot 1, (-1)\cdot u - v\cdot 2, v\cdot 1 - 1\cdot u) = (3, -u - 2v, v - u)$. La primera componente es 3 ≠ 0: Σ es regular en todos sus puntos.
> **Paso 4, paralelismo:** (3, −u − 2v, v − u) = λ(1, −4, −2). La primera da λ = 3; quedan −u − 2v = −12 y v − u = −6. De la segunda u = v + 6, y en la primera −3v − 6 = −12, v = 2, u = 8. Solución única.
> **Punto:** P = $\vec{X}(8, 2)$ = (16, 10, −4).
> **Plano tangente:** $\vec{N}(8, 2) = (3, -12, -6) \parallel (1, -4, -2)$: (x − 16) − 4(y − 10) − 2(z + 4) = 0, o sea **x − 4y − 2z = −16**, paralelo y distinto del plano normal.
> **Trampa:** el plano normal a una curva tiene como normal al **tangente** de la curva ($\nabla F_1 \times \nabla F_2$), no a uno de los gradientes. Usar ∇F_1 o ∇F_2 como normal es el error que más se cobra.

5/8/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 - 2x}$.
Identifique y grafique el dominio natural de f e indique si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 \neq 1\}$: el disco abierto de radio 2 sin la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1 (tangente por dentro en (2, 0)). D es abierto, no es cerrado y no es conexo.
>
> **Condiciones:** $\ln(4 - x^2 - y^2)$ pide $x^2 + y^2 < 4$. El denominador pide $x^2 + y^2 - 2x \neq 0$; completando cuadrados $x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 - 1$, así que la condición es $(x - 1)^2 + y^2 \neq 1$.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 \neq 1\}$. **Gráfico:** el disco de centro el origen y radio 2 con el borde punteado, al que se le saca la circunferencia C de centro (1, 0) y radio 1 (también punteada). C pasa por el origen y por (2, 0), donde toca por dentro a la circunferencia grande: restando $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$ sale $2x = 4$, así que el único punto común es (2, 0), que igual no es de D. Quedan dos regiones: el disco chico abierto $(x - 1)^2 + y^2 < 1$ y la medialuna $\{x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 > 1\}$.
> **¿Abierto?** Sí: con $g_1 = 4 - x^2 - y^2$ y $g_2 = x^2 + y^2 - 2x$ continuas, $D = g_1^{-1}((0, +\infty)) \cap g_2^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, intersección de dos preimágenes de abiertos, que es un abierto.
> **¿Cerrado?** No: (0, 0) es punto frontera (los $(\varepsilon, 0)$ y los $(-\varepsilon, 0)$ con ε chico están en D) y no es de D porque anula el denominador. Lo mismo pasa con cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
> **¿Conexo?** No: (1, 0) ∈ D (centro del disco chico) y (−1, 0) ∈ D (en la medialuna). Si una curva continua dentro de D los uniera, $h(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ sobre la curva sería continua y pasaría de 0 a 4; por Bolzano valdría 1 en algún punto, que no es de D. Absurdo.
> **Trampa:** creer que el denominador se anula en un punto. Se anula sobre toda una circunferencia, y eso es lo que corta a D en dos. Y abierto no excluye "no cerrado": acá pasan las dos cosas.

Ejercicio 2. Sean $g(x, y, z) = f(\vec{h}(x, y, z))$, con $\vec{h}(x, y, z) = (y - x^2 + z, e^{y+z} - x)$, y $p(u, v) = 1 - uv$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f en (−1, 0). Encuentre la dirección de la máxima derivada direccional de g en el punto (1, 0, 0). Justifique sus cálculos.

> **Respuesta:** $\nabla f(-1, 0) = (0, 1)$; $\nabla g(1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$. Dirección de máxima derivada direccional: $\check{r} = (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$ (valor máximo $\sqrt{3}$).
>
> **Punto imagen:** $\vec{h}(1, 0, 0) = (0 - 1 + 0, e^0 - 1) = (-1, 0)$, justo el punto donde está centrado el Taylor de f.
> **Qué da el Taylor:** que f tenga polinomio de Taylor de orden 2 en (−1, 0) supone f dos veces diferenciable allí (en particular diferenciable). el polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $p(u, v) = 1 - uv$ está escrito en u, v (no en u + 1), así que se deriva: $\nabla p = (-v, -u)$, y en (−1, 0): **$\nabla f(-1, 0) = (0, 1)$**.
> **Jacobiana de $\vec{h}$:** $\vec{h}$ es C^1 (polinomios y exponencial). $D\vec{h}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x & 1 & 1 \\ -1 & e^{y+z} & e^{y+z} \end{pmatrix}$, y en (1, 0, 0): $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Regla de la cadena: h diferenciable en (1, 0, 0) y f diferenciable en h(1, 0, 0), así que g = f ∘ h es diferenciable en (1, 0, 0) y $\nabla g(1,0,0) = (0,1)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = **(–1, 1, 1)** (es la segunda fila de la jacobiana).

Dirección: por ser g diferenciable, $g'(A, \check{r}) = \nabla g(A)\cdot\check{r} \le \|\nabla g(A)\|$, con igualdad cuando ř tiene la dirección y el sentido del gradiente: **$\check{r} = (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$**, y la derivada máxima vale $\sqrt{3}$.

Trampa: leer el gradiente de f en los coeficientes lineales de p (no hay: daría (0, 0) y una dirección indefinida). p no está centrado en (–1, 0): hay que derivarlo y evaluar.

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones

{ u + vx + y = 3 ; $u^2 - x^2 - yv = -1$ }

a) verifique que en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$, el mismo define implícitamente funciones u(x, y) y v(x, y) de clase C^1;

b) calcule $u'_x(1, 1)$ y $v'_x(1, 1)$.

Respuesta: a) F, G son C^1, se anulan en (1, 1, 1, 1) y $\partial(F, G)/\partial(u, v) = -3 \neq 0$: existen u(x, y), v(x, y) de clase C^1. B) $u'_x(1, 1) = 1/3$, $v'_x(1, 1) = -4/3$.

a) Planteo: F(x, y, u, v) = u + vx + y – 3 y G(x, y, u, v) = $u^2 - x^2 - yv + 1$. Las incógnitas a despejar son u y v, así que el determinante que importa es el de las derivadas respecto de u y v.

Hipótesis del TFI (sistemas): (1) F(1, 1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 – 3 = 0 ✓ y G(1, 1, 1, 1) = 1 – 1 – 1 + 1 = 0 ✓. (2) F y G son polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^4$. (3) Jacobiano: $\partial(F, G)/\partial(u, v) = \det\begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2u & -y \end{pmatrix} = -y - 2ux$, que en el punto vale –1 – 2 = –3 ≠ 0 ✓. Entonces existen u = u(x, y), v = v(x, y) de clase C^1 en un entorno de (1, 1), con u(1, 1) = v(1, 1) = 1.

b) Derivamos respecto de x las identidades F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 y G(...) = 0 (regla de la cadena, válida porque todo es C^1): $u'_x + v'_x\cdot x + v = 0$ y $2u\cdot u'_x - 2x - y\cdot v'_x = 0$.

En el punto (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1): $u'_x + v'_x = -1$ y $2u'_x - v'_x = 2$. Sumando: $3u'_x = 1$, **$u'_x(1, 1) = 1/3$**; y **$v'_x(1, 1) = -1 - 1/3 = -4/3$**.

Trampa: en la primera ecuación el término vx es un producto: su derivada es $v'_x\cdot x + v$, y ese v (que vale 1) es el que más se pierde. El sistema que resolvés es justamente el de la matriz jacobiana del punto 3, por eso hace falta que su determinante no sea 0.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = y - x - x^2 - \frac{y^3}{3}$.

Halle los extremos relativos de f y en qué puntos se alcanzan.

Respuesta: Único extremo relativo: máximo relativo en (–1/2, 1), de valor 11/12. En (–1/2, –1) hay punto silla (f = –5/12), no extremo.

Planteo: f es polinómica, C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (abierto), así que todo extremo relativo es punto crítico.

Gradiente: $f'_x = -1 - 2x$, $f'_y = 1 - y^2$.

Puntos críticos: –1 – 2x = 0 da x = –1/2; $1 - y^2 = 0$ da y = ±1. Quedan **(–1/2, 1)** y **(–1/2, –1)**.

Hessiano: $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -2y$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$, det H = 4y. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: det H > 0 y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; det H > 0 y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no

decide.

(–1/2, 1): $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**. Valor: $f(-1/2, 1) = 1 + 1/2 - 1/4 - 1/3 = \dfrac{12 + 6 - 3 - 4}{12} = \mathbf{11/12}$.

(–1/2, –1): $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = -4 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(-1/2, -1) = -5/12$).

Ojo, no es absoluto: $f(0, y) = y - y^3/3$ tiende a $+\infty$ cuando $y \to -\infty$, así que el máximo es sólo local.

Trampa: el término $-y^3/3$ hace que $f''_{yy} = -2y$ cambie de signo según el punto: no clasifiques los dos puntos con el mismo hessiano. Y la consigna pide los *extremos*: la silla se menciona para descartarla, no es respuesta.

Ejercicio 5. Halle una ecuación para el plano normal, en $P = (2, -1, 0)$, a la curva que se obtiene de la intersección de la gráfica de $f(x, y) = 1 - x - y$ con el conjunto de nivel de $g(x, y, z) = xe^z + y^3$ que contiene a P. Justifique sus cálculos.

Respuesta: Plano normal: $x + y - 2z = 1$.

Las dos superficies: la gráfica de f es $z = 1 - x - y$, es decir $G(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$; P está en ella: $2 - 1 + 0 - 1 = 0$ ✓. El conjunto de nivel de g que contiene a P es $g = g(P) = 2e^0 + (-1)^3 = 1$, o sea $xe^z + y^3 = 1$.

Normales: G y g son C^1. $\nabla G = (1, 1, 1)$ y $\nabla g = (e^z, 3y^2, xe^z)$, que en P vale $(1, 3, 2)$. Las dos son no nulas y no paralelas.

Dirección de la curva: $\vec{T} = \nabla G \times \nabla g = (1, 1, 1) \times (1, 3, 2) = (1\cdot 2 - 1\cdot 3, 1\cdot 1 - 1\cdot 2, 1\cdot 3 - 1\cdot 1) = (-1, -1, 2) \neq \vec{0}$, así que la intersección es una curva regular cerca de P y tiene tangente ahí. Control: $\vec{T}\cdot\nabla G = 0$ y $\vec{T}\cdot\nabla g = -1 - 3 + 4 = 0$ ✓.

Plano normal: pasa por P y su normal es $\vec{T}$: $-(x - 2) - (y + 1) + 2(z - 0) = 0$, es decir $\mathbf{x + y - 2z = 1}$. Control: $2 - 1 - 0 = 1$ ✓.

Trampa: el plano *normal* a una curva usa como vector normal la *tangente* de la curva (no un gradiente, que daría un plano tangente a una de las superficies). Y la normal a la gráfica de f es $(-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1)$, con la tercera componente incluida.

15/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$.

a) Grafique en gráficos separados su dominio, la frontera del mismo y el conjunto de nivel 0.

b) Indique si el dominio natural es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > x, x^2 + y^2 < 4\}$: el semidisco abierto de radio 2 que queda arriba de la recta $y = x$. Frontera: el arco de $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq x$ (de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ pasando por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$) más el segmento de $y = x$ entre esos dos puntos; nada de la frontera está en D. Nivel 0: el segmento de la recta $y = x + 1$ con $(-1 - \sqrt{7})/2 < x < (-1 + \sqrt{7})/2$, sin los extremos. b) D es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(y - x)$ pide $y - x > 0$. La raíz pide $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, pero como está dividiendo tampoco puede valer 0: $4 - x^2 - y^2 > 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x, x^2 + y^2 < 4\}$.
> **Gráfico de D:** dibujá la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2 y la recta $y = x$. Se cortan donde $2x^2 = 4$, o sea en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Como la recta pasa por el centro, D es exactamente el semidisco que queda arriba y a la izquierda de la diagonal (contiene a $(0, 1)$ y a $(-1, 0)$). Circunferencia y diagonal van en punteado: no pertenecen.
> **Frontera (gráfico aparte):** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 4, y \geq x\} \cup \{y = x, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$: el arco superior izquierdo de la circunferencia (pasa por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$) cerrado por la cuerda diagonal de $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Es una curva cerrada, en trazo lleno. Ningún punto de ∂D está en D: en el arco se anula el denominador y en la cuerda el ln no está definido.
> **Nivel 0 (tercer gráfico):** en D el denominador nunca es 0, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(y - x) = 0 \Leftrightarrow y - x = 1$. De la recta $y = x + 1$ sólo sirve la parte que está en D ($y - x = 1 > 0$ ya se cumple): $x^2 + (x + 1)^2 < 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow (-1 - \sqrt{7})/2 < x < (-1 + \sqrt{7})/2$. Es el segmento de $y = x + 1$ dentro del disco, **sin sus extremos** ($(-1 \pm \sqrt{7})/2$, $(1 \pm \sqrt{7})/2$), que caen sobre la circunferencia ($\approx (0{,}82; 1{,}82)$ y $(-1{,}82; -0{,}82)$). →
> **b) Abierto:** sí. $g_1(x, y) = y - x$ y $g_2(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. $(0, 2)$ es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, 2 - \varepsilon)$, y puntos fuera de D) y no pertenece a D.
> **Acotado:** sí: todo punto de D cumple $\|(x, y)\| < 2$.
> **Conexo:** sí. Es intersección de dos convexos (un semiplano y un disco), así que es convexo: el segmento que une dos puntos de D queda entero en D. Convexo implica arcoconexo.
> **Trampa:** la raíz está en el denominador. Si ponés $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ metés la circunferencia en D y el conjunto deja de ser abierto; y en el nivel 0 los extremos del segmento no van.

Ejercicio 2. Sea el campo escalar

$f(x, y) = \{ \frac{y}{x^2}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0. \}$

a) ¿Es f continuo en (0, 0)?

b) ¿Existen las derivadas parciales de f en (0, 0)?

c) ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen?

Justifique todas sus respuestas.

> **Respuesta:** a) No: por $y = x^2$ el límite es 1 y por $y = 0$ es 0, el límite no existe. b) Sí: $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$. c) No es diferenciable en (0, 0), porque no es continua ahí.
>
> **a) Planteo:** $f(0, 0) = 0$ (el origen está en la recta $x = 0$). f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
> **Un camino que no da 0:** por la parábola $y = x^2$ (con $x \neq 0$, así que vale la primera fórmula): $f(x, x^2) = x^2/x^2 = 1 \to 1$. Por el eje x ($y = 0$, $x \neq 0$), en cambio, $f(x, 0) = 0 \to 0$.
> **Conclusión:** dos caminos con límites diferentes: el límite doble no existe y f **no es continua** en (0, 0).
> **b) Por definición:** $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$. Para $h \neq 0$, $f(h, 0) = 0/h^2 = 0$, así que el cociente es 0 y $\mathbf{f'_x(0, 0) = 0}$. → $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}$. Los puntos (0, k) tienen $x = 0$, donde f vale 0 por definición: el cociente es $0/k = 0$ y $\mathbf{f'_y(0, 0) = 0}$.
> **Resultado b):** sí, existen las dos y valen 0.
> **c) Teorema:** si f es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto. Por el contrarrecíproco, como f no es continua en (0, 0), **f no es diferenciable** en el origen.
> **Lo mismo por el resto:** el candidato a aproximación lineal es $f(0, 0) + 0\cdot x + 0\cdot y = 0$ y habría que tener $\lim f(x, y)/\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$. Por $y = x^2$ el cociente es $1/(|x|\sqrt{(1 + x^2)}) \to +\infty$, así que no se cumple.
> **Trampa:** la existencia de las derivadas parciales no implica diferenciabilidad (ni continuidad). Con rectas también se prueba que f no es continua: por $y = 0$ vale 0 y por $y = mx$ con $m \neq 0$ vale $f(x, mx) = m/x$, que no tiene límite; pero la forma más limpia de mostrarlo es la parábola $y = x^2$, que da un valor fijo diferente de f(0, 0).

Ejercicio 3. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (0,1) de cierto campo escalar f(u, v) de clase C^2 es $P(u, v) = 1 - u^2 + uv$. Si $\vec{g}(x, y) = (xy, y - x)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = (f \circ \vec{g})(x, y)$ en $(-1, 0, h(-1, 0))$. Justifique todos sus cálculos.

> **Respuesta:** $f(0, 1) = 1$, $\nabla f(0, 1) = (1, 0)$; $h(-1, 0) = 1$, $\nabla h(-1, 0) = (0, -1)$. Plano tangente: $y + z = 1$ ($z = 1 - y$).
>
> **Punto imagen:** $\vec{g}(-1, 0) = ((-1)\cdot 0, 0 - (-1)) = (0, 1)$, donde está centrado el Taylor de f.
> **Qué da el Taylor:** $f \in C^2$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $h(-1, 0) = f(0, 1) = P(0, 1) = 1 - 0 + 0 = \mathbf{1}$. $\nabla P(u, v) = (-2u + v, u)$, y en (0, 1): $\mathbf{\nabla f(0, 1) = (1, 0)}$.
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es polinómica y f es C^2, luego diferenciable en (0, 1). Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en (−1, 0) y vale la regla de la cadena.
> **Cadena:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, en (−1, 0): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(-1, 0) = (1, 0)\cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{(0, -1)}$.
> **Plano tangente:** $z = h(-1, 0) + h'_x(-1, 0)(x + 1) + h'_y(-1, 0)(y - 0) = 1 - y$, o sea $\mathbf{y + z = 1}$. Es un plano

paralelo al eje x (porque $h'_x(-1, 0) = 0$).
Trampa: P no está centrado en (0, 1): no tiene término lineal en u ni en v, pero $\nabla f(0, 1)$ no es (0, 0). Se deriva P y se evalúa en (0, 1).

Ejercicio 4. Considere la curva C definida por la intersección de la superficie parametrizada por $\vec{\sigma}(u, v) = (u + v^2, u^2, u + v)$, con $(u, v) \in [0, 2] \times [-1, 1]$, y la superficie de nivel de $f(x, y, z) = y^3 + xz$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Halle una ecuación para la recta tangente a la curva C en el punto (1, 1, 1).

Respuesta: Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La superficie de nivel: $f(1, 1, 1) = 1 + 1 = 2$, así que S: $y^3 + xz = 2$.
¿Qué (u, v) da el punto? $\vec{\sigma}(u, v) = (1, 1, 1)$ pide $u^2 = 1$, y como $u \in [0, 2]$, $u = 1$. Entonces $1 + v^2 = 1$ da $v = 0$, y la tercera coordenada cierra: $u + v = 1$ ✓. El punto es $\vec{\sigma}(1, 0)$, interior al dominio.
Normal a la paramétrica: $\vec{\sigma}_u = (1, 2u, 1) = (1, 2, 1)$ y $\vec{\sigma}_v = (2v, 0, 1) = (0, 0, 1)$. $\vec{N} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = (2, -1, 0) \neq \vec{0}$: $\vec{\sigma}$ es C^1 y regular en (1, 0).
Normal a la de nivel: f es C^1 y $\nabla f = (z, 3y^2, x) = (1, 3, 1) \neq \vec{0}$.
Dirección de C: $\vec{T} = \nabla f \times \vec{N} = (1, 3, 1) \times (2, -1, 0) = (3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = (1, 2, -7) \neq \vec{0}$. Las normales no son paralelas, así que las superficies se cortan transversalmente y C es regular en el punto. Control: $\vec{T} \cdot \nabla f = 1 + 6 - 7 = 0$ y $\vec{T} \cdot \vec{N} = 2 - 2 + 0 = 0$ ✓.
Resultado: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control por otro camino: la curva en el plano uv es $u^6 + (u + v^2)(u + v) = 2$; su tangente en (1, 0), llevada al espacio con $\vec{\sigma}_u$ y $\vec{\sigma}_v$, da (−1, −2, 7), paralela ✓.
Trampa: $u = -1$ también cumple $u^2 = 1$, pero está fuera de $[0, 2]$ (y pediría $v^2 = 2$). Y verificá siempre $\vec{T}$ ·(cada normal) = 0: un signo mal en una componente del producto vectorial es el error que más puntos cuesta.

Ejercicio 5. Halle valores reales de a y b para los cuales $f(x, y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y^2} + xy$ tiene un extremo en (1, 1). ¿De qué extremo se trata y cuál es su valor? Analice si para esos valores de a y b existen otros puntos críticos de f.

Respuesta: $a = 1$, $b = 1/2$. En (1, 1) hay un mínimo local de valor $f(1, 1) = 5/2$. No hay otros puntos críticos: (1, 1) es el único.

Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{x \neq 0, y \neq 0\}$, que contiene a (1, 1).
Condición necesaria: si hay extremo local en (1, 1), como f es diferenciable ahí, $\nabla f(1, 1) = 0$. $f_x = -a/x^2 + y$, $f_y = -2b/y^3 + x$. En (1, 1): $-a + 1 = 0$ y $-2b + 1 = 0$, así que **$a = 1$, $b = 1/2$**.
Hessiano: $f_{xx} = 2a/x^3$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 6b/y^4$. En (1, 1) con $a = 1$, $b = 1/2$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det H = 6 - 1 = 5 > 0$ y $f_{xx} = 2 > 0$: **mínimo local** (criterio del hessiano, f es C^2 en un entorno).
Valor: $f(1, 1) = 1 + 1/2 + 1 =$ **5/2**.
Otros puntos críticos: con $a = 1$, $b = 1/2$ el sistema es $y = 1/x^2$ y $x = 1/y^3$. Reemplazando: $x = 1/(1/x^2)^3 = x^6$, o sea $x(x^5 - 1) = 0$. Como $x \neq 0$, $x^5 = 1$, y la única raíz real es $x = 1$ ($t \mapsto t^5$ es estrictamente creciente). Entonces $y = 1$. **No hay otros puntos críticos**.
Trampa: olvidarse de que $x = 0$ no está en el dominio (la solución $x = 0$ de $x^6 = x$ se descarta) y no justificar que $x^5 = 1$ tiene una sola raíz real.

8/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 4)}}{\sqrt{(xy - x)}}$.
Exprese y grafique el dominio natural de f, indicando si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x \geq 2, y > 1\} \cup \{(x, y) : x \leq -2, y < 1\}$. No es conexo (dos piezas separadas por la franja $-2 < x < 2$), no es abierto (contiene puntos de las rectas $x = \pm 2$, que son frontera) y no es cerrado (no contiene los puntos de $y = 1$ con $|x| \geq 2$, que son frontera).
>
> **Condiciones:** numerador: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$, o sea $x \leq -2$ o $x \geq 2$. Denominador: $\sqrt{(xy - x)}$ tiene que existir y no ser cero, así que $xy - x > 0$, es decir $x(y - 1) > 0$.
> **Signos:** $x(y - 1) > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ y } y > 1)$ o $(x < 0 \text{ y } y < 1)$. Cruzando con $|x| \geq 2$: si $x \geq 2$ (positivo) hace falta $y > 1$; si $x \leq -2$ (negativo) hace falta $y < 1$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -2, y < 1\}$.
> **Gráfico:** dos "cuadrantes" corridos. Uno a la derecha de $x = 2$ y arriba de $y = 1$: la semirrecta $x = 2$, $y > 1$ en trazo lleno (pertenece), la semirrecta $y = 1$, $x > 2$ punteada (no pertenece) y el vértice $(2, 1)$ con círculo vacío. El otro a la izquierda de $x = -2$ y abajo de $y = 1$: la semirrecta $x = -2$, $y < 1$ llena, la semirrecta $y = 1$, $x < -2$ punteada y el vértice $(-2, 1)$ vacío.
> **Frontera (la usamos para justificar):** $\partial D = \{x = 2, y \geq 1\} \cup \{y = 1, x \geq 2\} \cup \{x = -2, y \leq 1\} \cup \{y = 1, x \leq -2\}$.
> **¿Abierto?** No: $(2, 2) \in D$ y todo entorno suyo tiene puntos con $x < 2$, que no están en D. Es un punto de D que no es interior.
> **¿Cerrado?** No: $(3, 1) \notin D$ (ahí $x(y - 1) = 0$), pero $(3, 1 + 1/n) \in D$ y tiende a $(3, 1)$. D no contiene ese punto de su frontera.
> **¿Conexo?** No: $D \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos semiplanos abiertos disjuntos, y D tiene puntos en los dos, $(2, 2)$ y $(-2, 0)$. Dicho con caminos: una curva continua dentro de D de $(2, 2)$ a $(-2, 0)$ tendría una abscisa que va de 2 a -2 y, por Bolzano, pasaría por $x = 0$, pero D no tiene puntos con $|x| < 2$. Cada pieza por separado sí es conexa (es convexa).
> **Trampa:** "no es abierto" y "no es cerrado" se justifican con un punto concreto cada uno. Y ojo con los vértices $(\pm 2, 1)$: están en $x = \pm 2$ pero tienen $y = 1$, así que no pertenecen.

Ejercicio 2. Sean $f(x, y) = ax^2 + xy$ y C la curva de ecuación vectorial $\vec{X} = (2t, t^2 + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que en el punto $(1, \dfrac{5}{4})$ la curva C y el conjunto de nivel de f tengan la misma recta tangente.

> **Respuesta:** $a = -7/8$; recta tangente común: $(x, y) = (1, 5/4) + \lambda(2, 1)$, o sea $x - 2y = -3/2$.
>
> **Planteo:** las dos rectas tangentes pasan por $P = (1, 5/4)$, así que coinciden si y sólo si tienen la misma dirección.
> **P está en C:** $2t = 1$ y $t^2 + 1 = 5/4$ se cumplen con $t_0 = 1/2$.
> **Tangente a C:** $\vec{X}'(t) = (2, 2t) \rightarrow \vec{X}'(1/2) = (2, 1) \neq \vec{0}$.
> **Conjunto de nivel de f por P:** es $\{(x, y): ax^2 + xy = a + 5/4\}$. f es polinómica ($C^1$) y $\nabla f = (2ax + y, x) \rightarrow$

$\nabla f(P) = (2a + 5/4, 1)$, que nunca es $\vec{0}$ (segunda componente 1). Por el teorema de la función implícita, cerca de P el nivel es una curva regular y su recta tangente es perpendicular a $\nabla f(P)$.
Condición: $(2, 1) \perp \nabla f(P)$: $2(2a + 5/4) + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 7/2 = 0 \Rightarrow$ **$a = -7/8$**.
Control: con $a = -7/8$, $\nabla f(P) = (-1/2, 1)$ y $(-1/2, 1)\cdot(2, 1) = 0$ ✓. La recta común es $(x, y) = (1, 5/4) + \lambda(2, 1)$, o sea $-(1/2)(x - 1) + (y - 5/4) = 0$, que es $x - 2y = -3/2$.
Trampa: pedir $\nabla f(P) \parallel \vec{X}'(t_0)$: el gradiente es normal al conjunto de nivel, no tangente.

Ejercicio 3. Sean $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$, con $\vec{g}(x, y) = (x^2y, y - x^2)$, y, $x + 2y + z = 3$ la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$. Calcule $h(1.02, 1.97)$ utilizando una aproximación lineal.

Respuesta: $f(2, 1) = -1$, $\nabla f(2, 1) = (-1, -2)$; $h(1, 2) = -1$, $\nabla h(1, 2) = (0, -3)$. $h(1.02, 1.97) \approx -0.91$.

Datos de f: el plano tangente al gráfico en $(2, 1, f(2, 1))$ es $z = 3 - x - 2y$, que tiene que ser $z = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x - 2) + f'_y(2, 1)(y - 1)$. Evaluando en $(2, 1)$: $f(2, 1) = 3 - 2 - 2 = -1$, y comparando coeficientes: **$\nabla f(2, 1) = (-1, -2)$**.
Punto base: la aproximación se hace alrededor de un punto (x_0, y_0) cercano a $(1.02, 1.97)$ donde sepamos todo, o sea con $\vec{g}(x_0, y_0) = (2, 1)$: $x^2y = 2$ y $y - x^2 = 1$. De la segunda $y = 1 + x^2$; en la primera $x^2(1 + x^2) = 2$, $x^4 + x^2 - 2 = 0$, $(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$, $x = \pm 1$, $y = 2$. Los candidatos son $(1, 2)$ y $(-1, 2)$; el que está cerca de $(1.02, 1.97)$ es **$(1, 2)$**. Ahí $h(1, 2) = f(\vec{g}(1, 2)) = -1$.
Hipótesis: $f \in C^1$ es diferenciable en $(2, 1)$ y $\vec{g}$ es polinómica, así que h es diferenciable en $(1, 2)$ y vale la regla de la cadena (y la linealización aproxima a h cerca de $(1, 2)$).
Cadena: $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$, en $(1, 2)$: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(1, 2) = (-1, -2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-4 + 4, -1 - 2) =$ **$(0, -3)$**.
Aproximación lineal: $h(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) \approx h(1, 2) + h'_x\Delta x + h'_y\Delta y$ con $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.03$: $h(1.02, 1.97) \approx -1 + 0\cdot 0.02 + (-3)(-0.03) = -1 + 0.09 =$ **-0.91**.
Trampa: linealizar en $(2, 1)$ (el punto de f) en vez de en $(1, 2)$ (el de h), o elegir la preimagen $(-1, 2)$, que queda lejos de $(1.02, 1.97)$. Y ojo con el signo de Δy: $1.97 - 2 = -0.03$.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Respuesta: Puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En $(0, 0)$ hay punto silla ($\det H = -9$). En $(1, 1)$ hay mínimo relativo ($\det H = 27$, $f''_{xx} = 6$), de valor $f(1, 1) = -1$.

Planteo: f es polinómica, así que es C^2 en todo $\mathbb{R}^2$. Por eso un extremo relativo sólo puede estar donde $\nabla f = \vec{0}$, y en cada punto crítico decide el hessiano: $\det H > 0$ y $f''_{xx} > 0$ da mínimo; $\det H > 0$ y $f''_{xx} < 0$ da máximo; $\det H < 0$ da punto silla; $\det H = 0$ no decide.
Puntos críticos: $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$. De $f'_x = 0$, $y = x^2$; en $f'_y = 0$: $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. El factor $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales (discriminante -3), así que $x = 0$ o $x = 1$. Puntos: **$(0, 0)$** y **$(1, 1)$**.
Hessiano: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$, así que $H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$ y $\det H = 36xy - 9$.
En $(0, 0)$: $\det H = -9 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 0) = 0$).
En $(1, 1)$: $\det H = 36 - 9 = 27 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(1, 1) = 1 + 1 - 3 =$ **-1**.

> **Trampa:** en $x^4 = x$ no dividas por x, que perdés el origen. Y el mínimo es sólo relativo: sobre el eje x, $f(x, 0) = x^3$ tiende a $-\infty$, así que f no tiene mínimo absoluto.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u^2 + v, u - v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle la intersección entre la recta normal a Σ en (2, 4, –1) y el plano xy.

> **Respuesta:** (u, v) = (1, 2); $\vec{N} = (-5, 3, -2)$; recta normal $\vec{X} = (2, 4, -1) + t(-5, 3, -2)$; corta al plano xy en (9/2, 5/2, 0).
>
> **Paso 1, parámetros de (2, 4, –1):** $uv = 2$, $2u^2 + v = 4$, $u - v = -1$. De la tercera $v = u + 1$, y en la primera $u^2 + u - 2 = 0$: $u = 1$ o $u = -2$. Con $u = 1$, $v = 2$: $2 + 2 = 4$ ✓. Con $u = -2$, $v = -1$: $8 - 1 = 7 \neq 4$ ✗. Único par: **(u, v) = (1, 2)**.
> **Paso 2, derivadas:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (v, 4u, 1) = (2, 4, 1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, -1) = (1, 1, -1)$.
> **Paso 3, normal:** $\vec{N} = (4\cdot(-1) - 1\cdot1, 1\cdot1 - 2\cdot(-1), 2\cdot1 - 4\cdot1) =$ **(–5, 3, –2)** $\neq \vec{0}$: punto regular. Recta normal: $\vec{X}$ **= (2 – 5t, 4 + 3t, –1 – 2t)**, es decir (2, 4, –1) + t(–5, 3, –2).
> **Paso 4, plano xy:** z = 0 pide $-1 - 2t = 0$, $t = -1/2$. Punto: $(2 + 5/2, 4 - 3/2, 0) =$ **(9/2, 5/2, 0)**.
> **Trampa:** las dos primeras ecuaciones combinadas dan dos candidatos; el que no verifica la tercera coordenada no es el punto. Y el plano xy es z = 0, no “x = y”.

10/5/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2x - x^2 - y^2)}}{\sqrt{(x - y)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (2, 0), (0, 0).

> **Respuesta:** a) $D = \{(x - 1)^2 + y^2 \le 1, y < x\}$: el disco cerrado de centro (1, 0) y radio 1 sin el segmento circular que corta la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Frontera: el arco de la circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)) más la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Interior: $\{(x - 1)^2 + y^2 < 1, y < x\}$. b) Nivel 0: el arco con $y < x$ sin sus extremos (0, 0) y (1, 1). De los puntos: sólo (2, 0) pertenece; (1, 1) y (0, 0) no están en el dominio.
>
> **a) Condiciones:** la raíz del numerador pide $2x - x^2 - y^2 \ge 0$; completando cuadrados, $2x - x^2 - y^2 = 1 - [(x - 1)^2 + y^2]$, así que la condición es $(x - 1)^2 + y^2 \le 1$. La raíz del denominador pide su radicando ≥ 0 y además $\ne 0$: $y < x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \le 1, y < x\}$.
> **Cortes:** la recta $y = x$ corta la circunferencia en (0, 0) y (1, 1) (reemplazando $y = x$ queda $2x^2 - 2x = 0$).
> **Gráfico de D:** el disco de centro (1, 0) y radio 1 y la recta $y = x$, que lo corta en la cuerda de (0, 0) a (1, 1). El centro cumple $y < x$, así que D es el pedazo grande: el disco sin el segmento circular chico que queda arriba y a la izquierda de la cuerda (la cuerda ve un ángulo recto desde el centro). El arco de circunferencia que bordea a D va lleno salvo sus extremos (0, 0) y (1, 1), que van huecos; la cuerda va en punteado.
> **Frontera (gráfico aparte):** ∂D = arco de circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)) $\cup$ cuerda $\{y = x, 0 \le x \le 1\}$. Curva cerrada en trazo lleno. Pertenecen a D los puntos del arco salvo (0, 0) y (1, 1); la cuerda no (anula el denominador).
> **Interior (otro gráfico):** $\operatorname{int} D = \{(x - 1)^2 + y^2 < 1, y < x\}$, todo con borde punteado. Los puntos con las dos desigualdades estrictas tienen una bola dentro de D (preimagen de abiertos por funciones continuas); los del arco no, porque toda bola centrada en ellos se sale del disco.
> **b) Planteo:** el denominador no se anula en D, así que $f = 0 \Leftrightarrow$ el radicando del numerador vale $0 \Leftrightarrow$ el punto está sobre la circunferencia. Además tiene que estar en D: $y < x$.
> **Nivel 0:** el arco de circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)), **sin** los extremos (0, 0) y (1, 1).
> **Los puntos:** (1, 1): $x - y = 0$, no está en D, no pertenece. (2, 0): $2 \cdot 2 - 4 - 0 = 0$ y $x - y = 2 > 0$, $f(2, 0) = 0/\sqrt{2} = 0$, **pertenece**. (0, 0): $x - y = 0$, no está en D, no pertenece.
> **Trampa:** (0, 0) y (1, 1) anulan el numerador, pero también el denominador: f queda 0/0, no está definida y no pertenece al conjunto de nivel 0.

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y$ y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: (1, 3) y (–1, –3). Los dos son puntos silla (f no tiene extremos locales).
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞); buscamos $\nabla f = 0$ y clasificamos con el hessiano.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 - xy = x(3x - y)$; $f_y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

Sistema: $f_y = 0$ da $x = 1$ o $x = -1$. Como $x \neq 0$, $f_x = 0$ pide $y = 3x$. **Puntos: (1, 3) y (–1, –3).**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - y$, $f_{xy} = -x$, $f_{yy} = 0$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(1, 3): $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(1, 3) = 1$).
(–1, –3): $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(-1, -3) = -1$). → En general $\det H = (6x - y)\cdot 0 - x^2 = -x^2$, que es negativo en los dos puntos porque $x = \pm 1$.
Trampa: ver $f_{yy} = 0$ y concluir "det = 0, el criterio no decide". El determinante es $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, y el término cruzado lo hace negativo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$\operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y = 2$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 1), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $z_0 = 1$; $\nabla f(0, 1) = (-1/2, -2)$; $\check{v} = (4/\sqrt{17}, -1/\sqrt{17})$ o $\check{v} = (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$.

Planteo: $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y - 2$ y la ecuación es $F = 0$.
Punto: en $(x, y) = (0, 1)$: $0 + z^3 - z + 0 + 2 - 2 = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1) = 0$. Las raíces son $-1, 0, 1$ y la condición $z_0 > 0$ deja $\mathbf{z_0 = 1}$: punto $(0, 1, 1)$.
Derivadas de F: $F'_x = \cos x - e^xz + 1$, $F'_y = 2yz^3 + 2$, $F'_z = 3y^2z^2 - e^x$. En $(0, 1, 1)$: $F'_x = 1 - 1 + 1 = 1$, $F'_y = 2 + 2 = 4$, $F'_z = 3 - 1 = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(0, 1, 1) = 0$; (ii) F es combinación de seno, exponencial y polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(0, 1, 1) = 2 \neq 0$. Por lo tanto existe $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, 1)$ con $f(0, 1) = 1$.
Gradiente: $f'_x(0, 1) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -1/2$, $f'_y(0, 1) = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -4/2 = -2$. Así $\nabla f(0, 1) = (-1/2, -2)$.
Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable en $(0, 1)$, y entonces $f'((0, 1), \check{v}) = \nabla f(0, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-a/2 - 2b = 0$, o sea $a = -4b$. Reemplazando: $16b^2 + b^2 = 1$, $b = \pm 1/\sqrt{17}$.
Resultado: $\check{v} = (4/\sqrt{17}, -1/\sqrt{17})$ y **$\check{v} = (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$** (los dos versores ortogonales al gradiente, que es tangente a la curva de nivel).
Trampa: son dos versores, no uno: si das sólo uno el ítem queda incompleto. Y la fórmula $\nabla f \cdot \check{v}$ sólo vale porque f es diferenciable; hay que decirlo.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (e^t, -\cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $\nabla g(1, -1)$
b) Calcule aproximadamente $h(0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: a) $\nabla g(1, -1) = (3, -3)$. b) $h(0) = 4$, $h'(0) = 3$, $h(0.05) \approx 4.15$.

Datos de f: el polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$ es $f(-1, 2) + f'_r(-1, 2)(r + 1) + f'_s(-1, 2)(s - 2)$. Con $P(r, s) = 1 - r + s$: $f(-1, 2) = P(-1, 2) = 1 + 1 + 2 = 4$ y **$\nabla f(-1, 2) = (-1, 1)$**.
a) El punto interior: $(xy, x^2 + y^2)$ en $(1, -1)$ da $(-1, 2)$ ✓.

Hipótesis: $f \in C^1$ y la interior es polinómica, así que g es C^1 (diferenciable) y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (1, –1): $r = xy$ da $(y, x) = (–1, 1)$; $s = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (2, –2)$.
Cuenta: $g'_x = (–1)(–1) + 1·2 = 3$; $g'_y = (–1)·1 + 1·(–2) = –3$. **$\nabla g(1, –1) = (3, –3)$**.
b) La curva: $\vec{\alpha}(t) = (e^t, –\cos t)$: $\vec{\alpha}(0) = (1, –1)$ ✓ y $\vec{\alpha}'(t) = (e^t, \operatorname{sen} t)$, $\vec{\alpha}'(0) = (1, 0)$.
Hipótesis: $\vec{\alpha}$ es C^1 y g es diferenciable en $\vec{\alpha}(0)$, así que $h = g \circ \vec{\alpha}$ es derivable en 0 con $h'(0) = \nabla g(\vec{\alpha}(0))·\vec{\alpha}'(0)$.
Cuenta: $h(0) = g(\vec{\alpha}(0)) = f(–1, 2) = 4$; $h'(0) = \nabla g(1, –1)·\vec{\alpha}'(0) = (3, –3)·(1, 0) = 3$.
Resultado: la aproximación lineal de h en $t = 0$ es $h(t) \approx 4 + 3t$, y entonces $h(0.05) \approx h(0) + h'(0)·0.05 = 4 + 3·0.05 =$ **4.15**.
Trampa: $\vec{\alpha}'(0) = (1, 0)$ porque sen 0 = 0: la derivada de $–\cos t$ es $+\operatorname{sen} t$. Y $h(0)$ es $g(\vec{\alpha}(0)) = g(1, –1) = f(–1, 2) = 4$, no $P(0, 0) = 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v^2, u – v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

Respuesta: $P_1 = (1, 1, –1)$ y $P_2 = (–1, –1, 1)$. Π: $x + y – z = –1$; tangentes a Σ_2: $x + y – z = 3$ en P_1 y $x + y – z = –3$ en P_2.

Paso 1, el parámetro de A: $\vec{X}(u, v) = (0, 1, 2)$ pide $u + v = 0$ y $u – v = 2$, de donde $u = 1$, $v = –1$; se comprueba $v^2 = 1$ ✓. Es el único par (u, v) que da A.
Paso 2, normal de Σ_1 en A: $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_u = (1, 0, 1)$, $\vec{X}_v = (1, 2v, –1) = (1, –2, –1)$ en $(1, –1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (0·(–1) – 1·(–2), 1·1 – 1·(–1), 1·(–2) – 0·1) = (2, 2, –2) \neq \vec{0}$: A es punto regular y Π existe, con normal $\vec{n} = (1, 1, –1)$. Π: $x + (y – 1) – (z – 2) = 0$, o sea **$x + y – z = –1$**.
Paso 3, normal de la esfera: Σ_2 es el conjunto de nivel 3 de $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, de clase C^1, con $\nabla G = (2x, 2y, 2z) \neq \vec{0}$ sobre Σ_2 (el origen no está en Σ_2). La normal en P es 2P.
Paso 4, paralelismo: planos paralelos ⟺ normales paralelas: $P = \lambda(1, 1, –1)$. Con $P \in \Sigma_2$: $3\lambda^2 = 3$, $\lambda = \pm 1$. Quedan **$P_1 = (1, 1, –1)$** y **$P_2 = (–1, –1, 1)$**.
Control: el tangente a Σ_2 en P_1 es $(x – 1) + (y – 1) – (z + 1) = 0$, $x + y – z = 3$; en P_2, $x + y – z = –3$. Ninguno coincide con Π ($x + y – z = –1$), así que son paralelos de verdad.
Trampa: son **dos** puntos (antípodas). Quedarse con $\lambda = 1$ solo pierde la mitad; y no hay que pedir $P \in \Sigma_1$, el punto se busca en la esfera.

10/5/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2y - y^2 - x^2)}}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (0, 2), (0, 0).

> **Respuesta:** a) $D = \{x^2 + (y - 1)^2 \le 1, y > x\}$: el disco cerrado de centro (0, 1) y radio 1 sin el segmento circular que corta la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Frontera: el arco de la circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)) más la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Interior: $\{x^2 + (y - 1)^2 < 1, y > x\}$. b) Nivel 0: el arco con $y > x$ sin sus extremos (0, 0) y (1, 1). De los puntos: sólo (0, 2) pertenece; (1, 1) y (0, 0) no están en el dominio.
>
> **a) Condiciones:** la raíz del numerador pide $2y - y^2 - x^2 \ge 0$; completando cuadrados, $2y - y^2 - x^2 = 1 - [x^2 + (y - 1)^2]$, así que la condición es $x^2 + (y - 1)^2 \le 1$. La raíz del denominador pide su radicando ≥ 0 y además $\neq 0$: $y > x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \le 1, y > x\}$.
> **Cortes:** la recta $y = x$ corta la circunferencia en (0, 0) y (1, 1) (reemplazando $y = x$ queda $2x^2 - 2x = 0$).
> **Gráfico de D:** el disco de centro (0, 1) y radio 1 y la recta $y = x$, que lo corta en la cuerda de (0, 0) a (1, 1). El centro cumple $y > x$, así que D es el pedazo grande: el disco sin el segmento circular chico que queda abajo y a la derecha de la cuerda (la cuerda ve un ángulo recto desde el centro). El arco de circunferencia que bordea a D va lleno salvo sus extremos (0, 0) y (1, 1), que van huecos; la cuerda va en punteado.
> **Frontera (gráfico aparte):** ∂D = arco de circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)) $\cup$ cuerda $\{y = x, 0 \le x \le 1\}$. Curva cerrada en trazo lleno. Pertenecen a D los puntos del arco salvo (0, 0) y (1, 1); la cuerda no (anula el denominador).
> **Interior (otro gráfico):** $\operatorname{int} D = \{x^2 + (y - 1)^2 < 1, y > x\}$, todo con borde punteado. Los puntos con las dos desigualdades estrictas tienen una bola dentro de D (preimagen de abiertos por funciones continuas); los del arco no, porque toda bola centrada en ellos se sale del disco.
> **b) Planteo:** el denominador no se anula en D, así que $f = 0 \Leftrightarrow$ el radicando del numerador vale $0 \Leftrightarrow$ el punto está sobre la circunferencia. Además tiene que estar en D: $y > x$.
> **Nivel 0:** el arco de circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)), **sin** los extremos (0, 0) y (1, 1).
> **Los puntos:** (1, 1): $y - x = 0$, no está en D, no pertenece. (0, 2): $2 \cdot 2 - 4 - 0 = 0$ e $y - x = 2 > 0$, $f(0, 2) = 0/\sqrt{2} = 0$, **pertenece**. (0, 0): $y - x = 0$, no está en D, no pertenece.
> **Trampa:** (0, 0) y (1, 1) anulan el numerador, pero también el denominador: f queda 0/0, no está definida y no pertenece al conjunto de nivel 0.

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$ y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: (3, 1) y (–3, –1). Los dos son puntos silla (f no tiene extremos locales).
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞); buscamos $\nabla f = 0$ y clasificamos con el hessiano.
> **Derivadas:** $f_x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - y^2)$; $f_y = 3y^2 - xy = y(3y - x)$.

Sistema: $f_x = 0$ da $y = 1$ o $y = -1$. Como $y \neq 0$, $f_y = 0$ pide $x = 3y$. **Puntos: (3, 1) y (–3, –1).**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -y$, $f_{yy} = 6y - x$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(3, 1): $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(3, 1) = 1$).
(–3, –1): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(-3, -1) = -1$). → En general $\det H = 0 \cdot (6y - x) - y^2 = -y^2$, negativo en los dos puntos porque $y = \pm 1$.
Trampa: ver $f_{xx} = 0$ y decir que el criterio no decide (o que "no se puede saber el signo de f_{xx}"). Con $\det H < 0$ es silla sin mirar f_{xx}. Es el tema 1 con x e y intercambiadas.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$\operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x = 2$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 0), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $z_0 = 1$; $\nabla f(1, 0) = (-2, -1/2)$; $\check{v} = (1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$ o $\check{v} = (-1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})$.

Planteo: $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x - 2$ y la ecuación es $F = 0$.
Punto: en $(x, y) = (1, 0)$: $0 + z^3 - z + 0 + 2 - 2 = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1) = 0$. Con $z_0 > 0$ queda $\mathbf{z_0 = 1}$: punto $(1, 0, 1)$.
Derivadas de F: $F'_x = 2xz^3 + 2$, $F'_y = \cos y - e^yz + 1$, $F'_z = 3x^2z^2 - e^y$. En $(1, 0, 1)$: $F'_x = 4$, $F'_y = 1 - 1 + 1 = 1$, $F'_z = 3 - 1 = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(1, 0, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (seno, exponencial y polinomios); (iii) $F'_z(1, 0, 1) = 2 \neq 0$. Entonces existe $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$.
Gradiente: $f'_x(1, 0) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -4/2 = -2$, $f'_y(1, 0) = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -1/2$. Así $\nabla f(1, 0) = (-2, -1/2)$.
Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable en $(1, 0)$, y $f'((1, 0), \check{v}) = \nabla f(1, 0) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-2a - b/2 = 0$, o sea $b = -4a$. Reemplazando: $a^2 + 16a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{17}$.
Resultado: $\check{v} = (1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$ y **$\check{v} = (-1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})$**.
Trampa: son dos versores opuestos; y hay que justificar que f es diferenciable para usar $f' = \nabla f \cdot \check{v}$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $\nabla g(-1, 1)$
b) Calcule aproximadamente $h(-0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: a) $\nabla g(-1, 1) = (-3, 3)$. b) $h(0) = 4$, $h'(0) = 3$, $h(-0.05) \approx 3.85$.

Datos de f: el polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$ es $f(-1, 2) + f'_r(-1, 2)(r + 1) + f'_s(-1, 2)(s - 2)$. Con $P(r, s) = 1 - r + s$: $f(-1, 2) = P(-1, 2) = 1 + 1 + 2 = 4$ y **$\nabla f(-1, 2) = (-1, 1)$**.
a) El punto interior: $(xy, x^2 + y^2)$ en $(-1, 1)$ da $(-1, 2)$ ✓.
Hipótesis: $f \in C^1$ y la interior es polinómica, así que g es C^1 (diferenciable) y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (–1, 1): $r = xy$ da $(y, x) = (1, -1)$; $s = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (-2, 2)$.

Cuenta: $g'_x = (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = -3$; $g'_y = (-1)(-1) + 1\cdot 2 = 3$. $\nabla g(-1, 1) = (-3, 3)$.
b) La curva: $\vec{\alpha}(t) = (-\cos t, e^t)$: $\vec{\alpha}(0) = (-1, 1)$ ✓ y $\vec{\alpha}'(t) = (\operatorname{sen} t, e^t)$, $\vec{\alpha}'(0) = (0, 1)$.
Hipótesis: $\vec{\alpha}$ es C^1 y g es diferenciable en $\vec{\alpha}(0)$, así que $h = g \circ \vec{\alpha}$ es derivable en 0 con $h'(0) = \nabla g(\vec{\alpha}(0))\cdot \vec{\alpha}'(0)$.
Cuenta: $h(0) = g(\vec{\alpha}(0)) = f(-1, 2) = 4$; $h'(0) = \nabla g(-1, 1)\cdot\vec{\alpha}'(0) = (-3, 3)\cdot(0, 1) = 3$.
Resultado: la aproximación lineal de h en $t = 0$ es $h(t) \approx 4 + 3t$, y entonces $h(-0.05) \approx h(0) + h'(0)\cdot(-0.05) = 4 - 0.15 = \mathbf{3.85}$.
Trampa: el incremento es negativo ($\Delta t = -0.05$), así que la estimación queda por debajo de $h(0)$. Y $h(0)$ es $g(\vec{\alpha}(0)) = g(-1, 1) = f(-1, 2) = 4$, no $P(0, 0) = 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u^2, v - u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

Respuesta: Π: $x + y - z = -1$. Puntos: $P_1 = (1, 1, -1)$ y $P_2 = (-1, -1, 1)$, con planos tangentes $x + y - z = 3$ y $x + y - z = -3$.

Paso 1, el parámetro de A: $\vec{X}(u, v) = (0, 1, 2)$ pide $u + v = 0$, $u^2 = 1$, $v - u = 2$. De la primera y la tercera, $u = -1$, $v = 1$, y $u^2 = 1$ ✓.
Paso 2, normal de Σ_1 en A: $\vec{X}_u = (1, 2u, -1) = (1, -2, -1)$, $\vec{X}_v = (1, 0, 1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = ((-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 0, (-1)\cdot 1 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1) = (-2, -2, 2) \neq \vec{0}$: A es regular y Π existe, con normal $(1, 1, -1)$.
Π: $(x - 0) + (y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea $\mathbf{x + y - z = -1}$.
Paso 3, normal de Σ_2: Σ_2 es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1 con $\nabla G = 2(x, y, z) \neq \vec{0}$ sobre Σ_2; la normal en P es P.
Paso 4, paralelismo: $P = \lambda(1, 1, -1)$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 3$: $3\lambda^2 = 3$, $\lambda = \pm 1$. $\mathbf{P_1 = (1, 1, -1)}$ y $\mathbf{P_2 = (-1, -1, 1)}$.
Planos tangentes: en P_1, $(x - 1) + (y - 1) - (z + 1) = 0$, o sea $x + y - z = 3$; en P_2, $x + y - z = -3$. Ninguno es Π (que tiene término independiente -1), así que son paralelos y no coincidentes.
Trampa: son dos puntos antípodas; y no hace falta normalizar $\vec{N}$ para escribir Π, pero sí imponer que P esté en la esfera.

10/12/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0) \}$.

a) Estudie la continuidad de f en (0, 0).

b) Calcule las derivadas parciales de f en el origen. Indique, con fundamento, si ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

> **Respuesta:** a) No es continua en (0, 0): por $y = mx$ el límite es $2m/(1 + 2m^2)$, que depende de m. b) $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$; ninguna de las dos es continua en el origen ($f'_x(0, y) = 1/y$ y $f'_y(x, 0) = 2/x$).
>
> Lectura del enunciado: en la foto la fracción es muy chica; se toma $2xy/(x^2 + 2y^2)$, como la lee la resolución de la clase de repaso. Si el denominador fuera $x^2 + 2y^3$ las conclusiones serían las mismas (por $y = mx$ daría $2m$ y las parciales en el origen también valen 0).
>
> **a) Planteo:** f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$.
>
> **Rectas y = mx** ($x \neq 0$): $f(x, mx) = \dfrac{2mx^2}{x^2 + 2m^2x^2} = \dfrac{2m}{1 + 2m^2}$, constante. Con $m = 0$ da 0 y con $m = 1$ da 2/3.
>
> **Conclusión:** el límite por cada recta depende de la pendiente, así que el límite doble no existe y f **no es continua** en el origen.
>
> **b) Parciales en el origen, por definición:** $f(h, 0) = 0$ y $f(0, k) = 0$ para $h, k \neq 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to0} \dfrac{0 - 0}{h} = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to0} \dfrac{0 - 0}{k} = 0$.
>
> **Parciales fuera del origen** (regla del cociente): $f'_x(x, y) = \dfrac{2y(x^2 + 2y^2) - 2xy\cdot2x}{(x^2 + 2y^2)^2} = \dfrac{2y(2y^2 - x^2)}{(x^2 + 2y^2)^2}$ y $f'_y(x, y) = \dfrac{2x(x^2 + 2y^2) - 2xy\cdot4y}{(x^2 + 2y^2)^2} = \dfrac{2x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + 2y^2)^2}$.
>
> **¿Son continuas en (0, 0)?** Habría que tener $f'_x(x, y) \to 0$ y $f'_y(x, y) \to 0$. Sobre el eje y ($x = 0, y \neq 0$): $f'_x(0, y) = 4y^3/(4y^4) = 1/y$, que no está acotada cuando $y \to 0$. Sobre el eje x ($y = 0, x \neq 0$): $f'_y(x, 0) = 2x^3/x^4 = 2/x$, tampoco acotada. Ninguna de las dos tiende a 0: **ninguna es continua en el origen**.
>
> **Fundamento sin cuentas:** si f'_x y f'_y (que existen en todo el plano) fueran continuas en (0, 0), por la condición suficiente f sería diferenciable ahí, y entonces continua. Como en a) vimos que f no es continua, las dos parciales no pueden ser continuas a la vez en el origen. Las cuentas de arriba muestran que, de hecho, no lo es ninguna.
>
> **Trampa:** no confundas "existen las parciales en el origen" (sí, valen 0) con "las parciales son continuas en el origen" (no). Para la continuidad hay que mirar el límite de las fórmulas de f'_x y f'_y fuera del origen.

Ejercicio 2. Sea g un función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en (1, –1) es $P(x, y) = 1 - x + y + x^2 + xy + y^2$.

Determine si $f(x, y) = e^{g(x,y)}$ alcanza un extremo relativo en (1, –1). En caso afirmativo indique tipo y valor.

> **Respuesta:** (1, –1) es punto crítico de f y allí f tiene un mínimo relativo, de valor $f(1, -1) = e^0 = 1$.
>
> **Planteo:** g es C^3 y la exponencial es C^∞, así que $f = e^g$ es C^3 en $\mathbb{R}^2$ (abierto). Como P es el Taylor de orden 2 de g en (1, –1), g comparte con P el valor y las derivadas primeras y segundas en ese punto.
>
> **Datos de g en (1, –1):** $g(1, -1) = P(1, -1) = 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$. $P'_x = -1 + 2x + y$ y $P'_y = 1 + x + 2y$,

que en (1, –1) dan –1 + 2 – 1 = 0 y 1 + 1 – 2 = 0: $\nabla g(1,-1) = (0,0)$. $Hg(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (hessiano de P).

Gradiente de f (regla de la cadena): $\nabla f = e^g \nabla g$, que en (1, –1) vale $e^0 \cdot (0,0) = (0,0)$: **(1, –1) es punto crítico de f**.

Hessiano de f: derivando otra vez, $f''_{ij} = e^g(g''_{ij} + g'_i\, g'_j)$. En (1, –1) los g′ valen 0 y $e^g = 1$, así que $Hf(1,-1) = Hg(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: det H > 0 y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; det H > 0 y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no decide.

Clasificación: det Hf = 4 – 1 = 3 > 0 y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $\mathbf{f(1,-1) = e^0 = 1}$.

Otra forma de verlo: Hg(1, –1) da mínimo relativo de g en (1, –1) con g(1, –1) = 0; como e^t es estrictamente creciente, en un entorno vale $g \geq 0$ y entonces $f = e^g \geq e^0 = 1 = f(1,-1)$.

Trampa: en general $f''_{xx} = e^g(g''_{xx} + (g'_x)^2)$, no $e^g g''_{xx}$: el término $(g'_x)^2$ se va sólo porque el punto es crítico. Y el valor del extremo es $e^{g(1,\,-1)} = 1$, no g(1, –1) = 0.

Ejercicio 3. Considere la ecuación

$2z + \cos(y - z) + xy = 4$.

a) Pruebe que en un entorno del punto (1, 1, 1) la ecuación define implícitamente una función y = f(x, z) de clase C^1.

b) Encuentre los versores para los cuales derivada direccional de $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto (1, 1) resulta nula. Justifique sus cálculos.

Respuesta: a) F es C^1, F(1, 1, 1) = 0 y $F'_y(1,1,1) = 1 \neq 0$: y = f(x, z) existe y es C^1 cerca de (1, 1), con f(1, 1) = 1, $f'_x(1,1) = -1$, $f'_z(1,1) = -2$. b) $\nabla h(1,1) = (2,-1)$; derivada direccional nula para $\check{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

a) Planteo: $F(x, y, z) = 2z + \cos(y - z) + xy - 4$. La función a despejar es y = f(x, z), así que la condición clave es $F'_y \neq 0$.

Hipótesis del TFI: (1) F(1, 1, 1) = 2 + cos 0 + 1 – 4 = 0 ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomio más coseno de un polinomio). (3) $F'_y = -\text{sen}(y - z) + x$, que en (1, 1, 1) vale 0 + 1 = 1 ≠ 0 ✓. Entonces existe y = f(x, z) de clase C^1 en un entorno de (1, 1) con f(1, 1) = 1.

Derivadas de f en (1, 1): $F'_x = y \to 1$; $F'_z = 2 + \text{sen}(y - z) \to 2$. Así $f'_x(1,1) = -1/1 = -1$ y $f'_z(1,1) = -2/1 = -2$.

b) Diferenciabilidad de h: $h(x, z) = x^3 + z \cdot f(x, z)$ es C^1 en un entorno de (1, 1) (sumas y productos de funciones C^1), así que es diferenciable y $h'((1,1), \check{v}) = \nabla h(1,1) \cdot \check{v}$.

Gradiente: $h'_x = 3x^2 + z \cdot f'_x \to 3 - 1 = 2$; $h'_z = f + z \cdot f'_z \to 1 - 2 = -1$. $\nabla h(1,1) = (2,-1)$.

Versores: con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$, pedimos 2a – b = 0, o sea b = 2a; entonces $5a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{5}$. Quedan $\mathbf{\check{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})}$ y $\mathbf{\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})}$.

Trampa: el término f(1, 1) en h'_z (regla del producto) se olvida seguido; sin él da $\nabla h = (2,-2)$ y los versores salen mal.

Ejercicio 4. Sea g(u, v) un campo escalar de clase C^1 tal que w = 1 – 2u + 3v es una ecuación del plano tangente al gráfico de g en (2, 1, g(2, 1)). Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy)$.

Calcule f(0.9, 1.05) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: f(1, 1) = 0, $\nabla f(1,1) = (-1,-1)$. $f(0.9, 1.05) \approx 0 + (-1)(-0.1) + (-1)(0.05) = 0.05$.

Datos de g: el plano tangente $w = 1 - 2u + 3v$ en $(2, 1, g(2, 1))$ da $g(2, 1) = 1 - 4 + 3 = 0$ y $\nabla g(2, 1) = (-2, 3)$.
Elección del punto: hace falta un punto cercano a $(0.9, 1.05)$ donde $(x^2 + y^2, xy)$ valga $(2, 1)$: $(1, 1)$ da $(2, 1)$ ✓. Entonces $f(1, 1) = g(2, 1) = 0$.
Hipótesis: g es C^1 y la interior es polinómica, así que f es C^1 en un entorno de $(1, 1)$: es diferenciable y $f(x, y) \approx f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$ cerca de $(1, 1)$.
Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (2, 2)$; $v = xy$ da $(y, x) = (1, 1)$.
Cuenta: $f'_x = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$; $f'_y = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$. $\nabla f(1, 1) = (-1, -1)$.
Resultado: con $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.05$: $f(0.9, 1.05) \approx 0 + (-1)(-0.1) + (-1)(0.05) = \mathbf{0.05}$.
Trampa: el punto de la aproximación no está dado, hay que buscarlo: tiene que estar cerca de $(0.9, 1.05)$ **y** mandar la interior al punto donde conocés g. Y $g(2, 1)$ no es el 1 del plano: hay que evaluar.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u + v, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$.
Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (-1, 1, 1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Respuesta: Un único punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$. Plano tangente: $-x + y + z = -1$; en forma paramétrica, $\vec{X} = (2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Paso 1, normal de la esfera en A: Σ^* es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1, con $\nabla G = 2(x, y, z)$; $A = (-1, 1, 1)$ está $(1 + 1 + 1 = 3)$ y $\nabla G(A) = (-2, 2, 2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{n} = (-1, 1, 1)$. Su plano tangente es $-x + y + z = 3$.
Paso 2, normal de Σ: $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (1, 0, u)$, $\vec{X}_v = (1, v, 0)$. $\vec{N} = (0 \cdot 0 - u \cdot v, u \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot v - 0 \cdot 1) = (-uv, u, v)$. Con $u, v > 0$, $\vec{N} \neq \vec{0}$: Σ es regular.
Paso 3, paralelismo: $(-uv, u, v) = \lambda(-1, 1, 1)$: $u = \lambda$, $v = \lambda$ y $uv = \lambda$, o sea $\lambda^2 = \lambda$. $\lambda = 0$ queda afuera (daría $u = 0$, que no está en el dominio, y además $\vec{N} = \vec{0}$ no define plano); entonces $\lambda = 1$, $\mathbf{u = v = 1}$.
Punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$.
Plano tangente: normal $(-1, 1, 1)$: $-(x - 2) + (y - 1/2) + (z - 1/2) = 0$, o sea $\mathbf{-x + y + z = -1}$, paralelo y distinto de $-x + y + z = 3$. Forma paramétrica (con los vectores tangentes $\vec{X}_u(1, 1) = (1, 0, 1)$ y $\vec{X}_v(1, 1) = (1, 1, 0)$): $\vec{X} = \mathbf{(2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Trampa: la ecuación $\lambda^2 = \lambda$ tiene la raíz $\lambda = 0$, que hay que descartar justificándolo (dominio $u, v > 0$); y la ecuación paramétrica del plano se arma con $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$, no con la normal.

9/11/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(y + 2x)}{\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}}$.

Exprese el dominio natural de f mediante ecuaciones y/o inecuaciones, grafíquelo e indique si es abierto o cerrado. Represente en otro gráfico su frontera.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x > 0,\ 9x^2 + y^2 < 9\}$: la parte del interior de la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ que está por encima de la recta $y = -2x$. D es abierto y no es cerrado. $\partial D = \{9x^2 + y^2 = 9,\ y + 2x \geq 0\} \cup \{y = -2x,\ -3/\sqrt{13} \leq x \leq 3/\sqrt{13}\}$.
>
> **Condiciones:** $\ln(y + 2x)$ pide $y + 2x > 0$. $\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}$ está en el denominador: pide $9 - 9x^2 - y^2 \geq 0$ por la raíz y $\neq 0$ por el cociente, o sea $9x^2 + y^2 < 9 \iff x^2 + y^2/9 < 1$, el interior de la elipse de centro el origen, semieje 1 en x y 3 en y.
> **D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -2x,\ x^2 + y^2/9 < 1\}$.
> **Cortes de $y = -2x$ con la elipse:** $9x^2 + 4x^2 = 9 \implies x = \pm 3/\sqrt{13}$: puntos $(3/\sqrt{13}, -6/\sqrt{13})$ y $(-3/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13})$.
> **Gráfico:** la región de la elipse a la derecha de la recta $y = -2x$ (contiene a $(1/2, 0)$). Todo el borde va en punteado: el arco de elipse de $(-3/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13})$ a $(3/\sqrt{13}, -6/\sqrt{13})$ pasando por $(0, 3)$ y $(1, 0)$, y la cuerda sobre $y = -2x$.
> **¿Abierto?** Sí: con $g_1 = y + 2x$ y $g_2 = 9 - 9x^2 - y^2$ continuas, $D = g_1^{-1}((0, +\infty)) \cap g_2^{-1}((0, +\infty))$, intersección de dos abiertos.
> **¿Cerrado?** No: $(0, 3)$ es punto frontera (los $(0, 3 - \varepsilon)$ están en D) y no es de D porque anula la raíz del denominador. (También: en $\mathbb{R}^2$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^2$, y D no es ninguno de los dos.)
> **Frontera** (otro gráfico, en trazo lleno): $\partial D = \{9x^2 + y^2 = 9,\ y + 2x \geq 0\} \cup \{y = -2x,\ -3/\sqrt{13} \leq x \leq 3/\sqrt{13}\}$, el arco más la cuerda, con los dos puntos de corte incluidos. Como D es abierto, $\partial D \cap D = \emptyset$.
> **Trampa:** la raíz en el denominador exige radicando > 0 estricto. Si se pone ≥ 0, el borde de la elipse queda adentro y se concluye mal que D no es abierto.

Ejercicio 2. Sea

$f(x, y) = y^3 - 6\mathbf{a}^2xy + 3\mathbf{a}x^2y$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Halle el o los valores de **a** para que f tenga un punto crítico en $(1, 1)$ y clasifíquelo para cada valor hallado.

> **Respuesta:** Sólo $a = 1$. Para $a = 1$, $(1, 1)$ es mínimo relativo, de valor $f(1, 1) = -2$.
>
> **Planteo:** f es polinómica en (x, y) para cada a, así que es C^∞ en $\mathbb{R}^2$. $(1, 1)$ es punto crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$.
> **Gradiente:** $f'_x = -6a^2y + 6axy$, $f'_y = 3y^2 - 6a^2x + 3ax^2$.
> **Evaluado en (1, 1):** $f'_x(1, 1) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$, que se anula para $a = 0$ o $a = 1$. $f'_y(1, 1) = 3 - 6a^2 + 3a = -3(2a^2 - a - 1) = -3(a - 1)(2a + 1)$, que se anula para $a = 1$ o $a = -1/2$.
> **Las dos a la vez:** el único valor común es **a = 1**. Control de los descartados: con $a = 0$, $f'_y(1, 1) = 3 \neq 0$; con $a = -1/2$, $f'_x(1, 1) = -6 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) = -9/2 \neq 0$.

Hessiano: $f''_{xx} = 6ay$, $f''_{xy} = -6a^2 + 6ax$, $f''_{yy} = 6y$. Con $a = 1$ en $(1, 1)$: $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
Clasificación: $\det H = 36 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**. Con $a = 1$, $f = y^3 - 6xy + 3x^2y$, y su valor es **$f(1, 1) = 1 - 6 + 3 = -2$**.
Trampa: cada ecuación por separado da dos valores de a; sólo sirve el que anula *las dos*. Si te quedás con $a = 0$ o $a = -1/2$, $(1, 1)$ ni siquiera es punto crítico.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4 = 0$
define implícitamente en un entorno del punto $(-1, 1, 2)$ a $z = f(x, y)$ con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (-1, 1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Respuesta: $\nabla f(-1, 1) = (-1, -2)$. Máximo $\sqrt{5}$, en la dirección $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = 2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4$, $P = (-1, 1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 0 + 1 \cdot 4 - 4 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = 2 \operatorname{sen}(x + y) + 2yz$, $F_z(P) = 0 + 4 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $A = (-1, 1)$, con $f(A) = 2$.
Derivadas: $F_x = 2z \cos(x + y)$, $F_x(P) = 4$. $F_y = 2z \cos(x + y) + z^2$, $F_y(P) = 4 + 4 = 8$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -1$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -2$. **$\nabla f(A) = (-1, -2)$**.
Derivada direccional: como f es C^1, es diferenciable en A, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $f'(A, \check{v}) = \nabla f(A) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla f \cdot \check{v} = \|\nabla f\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇f y $\check{v}$. El máximo es con $\theta = 0$: dirección **$\check{v} = \nabla f / \|\nabla f\| = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$**, y el máximo vale **$\|\nabla f(A)\| = \sqrt{5}$**.
Trampa: el valor máximo de la derivada direccional es positivo ($\|\nabla f\| > 0$ si $\nabla f \neq 0$), aunque el versor tenga componentes negativas.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{h}(r, s)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, donde $\vec{h} = \vec{F} \circ \vec{g}$ con $\vec{g}(r, s) = (r + s, r - s, s^2)$ y $\vec{F}(u, v, w) = (v, u + v, u^2 + v^2 + w)$.
Halle una ecuación del plano tangente a Σ en $P = \vec{h}(0, 1)$.

Respuesta: $P = (-1, 0, 3)$; $\vec{h}_r = (1, 2, 0)$, $\vec{h}_s = (-1, 0, 6)$, $\vec{N} = (12, -6, 2) \parallel (6, -3, 1)$. Plano tangente: $6x - 3y + z = -3$.

Punto: $\vec{g}(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1, 1) = (1, -1, 1)$ y $P = \vec{F}(1, -1, 1) = (-1, 1 - 1, 1 + 1 + 1) =$ **$(-1, 0, 3)$**.
Hipótesis: $\vec{g}$ y $\vec{F}$ son polinómicas, diferenciables; vale $D\vec{h}(0, 1) = D\vec{F}(1, -1, 1) \cdot D\vec{g}(0, 1)$.
Jacobianas: $D\vec{g}(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2s \end{pmatrix}$, en $(0, 1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D\vec{F}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2u & 2v & 1 \end{pmatrix}$, en $(1, -1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Producto: fila 1: $(1, -1)$; fila 2: $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0)$; fila 3: $2(1, 1) - 2(1, -1) + (0, 2) = (0, 6)$. $D\vec{h}(0, 1) =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$: $\vec{h}_r = (1, 2, 0)$, $\vec{h}_s = (-1, 0, 6)$.

Normal: $\vec{h}_r \times \vec{h}_s = (2\cdot 6 - 0\cdot 0,\ 0\cdot(-1) - 1\cdot 6,\ 1\cdot 0 - 2\cdot(-1)) = (12, -6, 2) \neq \vec{0}$, así que P es punto regular de Σ. Usamos $n = (6, -3, 1)$.

Plano: $6(x + 1) - 3(y - 0) + (z - 3) = 0$, o sea **$6x - 3y + z = -3$**. Control: $-6 - 0 + 3 = -3$ ✓.

Control alternativo: componiendo a mano, $\vec{h}(r, s) = (r - s, 2r, 2r^2 + 3s^2)$; $\vec{h}_r = (1, 2, 4r)$ y $\vec{h}_s = (-1, 0, 6s)$, que en (0, 1) dan lo mismo.

Trampa: evaluar $D\vec{F}$ en (0, 1) (el punto de los parámetros) en vez de en $\vec{g}(0, 1) = (1, -1, 1)$.

Ejercicio 5. Halle el o los puntos de la curva C definida por las ecuaciones
$\{ x^2 + y^2 = 1 ; x + y + z = 1 \}$,
para los cuales la recta tangente a C en ellos es paralela al plano yz.

Respuesta: (1, 0, 0) y (–1, 0, 2).

Parametrización: la proyección de C sobre el plano xy es $x^2 + y^2 = 1$, así que $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, y del plano $z = 1 - x - y$. Queda $\vec{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi)$, de clase C^1.

Vector tangente: $\vec{g}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t - \cos t)$. Nunca es nulo (sus dos primeras componentes no se anulan a la vez), así que C es regular y en cada punto hay recta tangente.

Condición: la recta es paralela al plano yz si su dirección es perpendicular a la normal de ese plano, (1, 0, 0): $\vec{g}'(t)\cdot(1, 0, 0) = -\operatorname{sen} t = 0$, o sea $t = 0$ o $t = \pi$.

Resultado: $\vec{g}(0) =$ **(1, 0, 0)**, con dirección (0, 1, –1), y $\vec{g}(\pi) =$ **(–1, 0, 2)**, con dirección (0, –1, 1). Las dos direcciones tienen componente x nula ✓.

Control con gradientes: $(2x, 2y, 0) \times (1, 1, 1) = (2y, -2x, 2x - 2y)$; la primera componente se anula si $y = 0$, y entonces $x = \pm 1$ y $z = 1 - x$: los mismos dos puntos ✓.

Trampa: “paralela al plano yz” no es “paralela al eje x”, es justo lo contrario. La condición es que la componente x de la dirección sea 0, no que la dirección sea (1, 0, 0).

21/10/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$. Es abierto, no es cerrado, no es acotado y no es conexo (dos componentes: $y > x^2$ e $y < x^2$). b) Nivel 0: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ sin los puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$.
>
> **a) Condición:** el numerador es un polinomio (definido en todo $\mathbb{R}^2$); sólo molesta el denominador: $y - x^2 \neq 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$.
> **Gráfico:** todo el plano sombreado, con la parábola de vértice (0, 0) que abre hacia arriba dibujada en punteado (excluida). La parábola parte a D en dos pedazos: el de adentro ($y > x^2$, contiene a (0, 1)) y el de afuera ($y < x^2$, contiene a (0, –1)).
> **Abierto:** sí. $g(x, y) = y - x^2$ es continua y $D = \{g > 0\} \cup \{g < 0\}$, unión de dos abiertos (preimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ por una función continua). Equivalente: ∂D es la parábola y ningún punto de ella está en D.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos como $(0, -\varepsilon)$ en D y el propio (0, 0), que no está) y no pertenece a D. D no contiene a su frontera, que es toda la parábola.
> **Acotado:** no: contiene a todos los puntos $(0, -n)$, $n \in \mathbb{N}$, de norma tan grande como quieras.
> **Conexo:** no. $g(x, y) = y - x^2$ es continua en D, nunca se anula ahí y vale 1 en (0, 1) y –1 en (0, –1). Si una curva continua dentro de D uniera esos dos puntos, g sobre la curva pasaría de positivo a negativo y por Bolzano se anularía en algún punto de D: absurdo. D tiene dos componentes, $\{y > x^2\}$ e $\{y < x^2\}$.
> **b) Nivel 0 (otro gráfico):** $f = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = 0$ con $(x, y) \in D$: la circunferencia de centro (0, 0) y radio 3, menos los puntos donde la corta la parábola (ahí f no está definida).
> **Cortes:** reemplazando $x^2 = y$ en $x^2 + y^2 = 9$ queda $y^2 + y - 9 = 0$, $y = (-1 \pm \sqrt{37})/2$. Como $y = x^2 \geq 0$, sirve sólo $y_0 = (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$, con $x = \pm\sqrt{y_0} \approx \pm 1{,}59$.
> **Resultado:** $C_0 = \{x^2 + y^2 = 9\}$ sin los dos puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2)$. En el dibujo: la circunferencia de radio 3 con dos puntitos huecos arriba, donde la atraviesa la parábola.
> **Trampa:** dar como nivel 0 la circunferencia entera. En esos dos puntos queda 0/0: f no está definida, así que no pueden estar en ningún conjunto de nivel.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$.

Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

> **Respuesta:** $h(2, -3) = 0$, $\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$, $\nabla h(2, -3) = (-2, 4)$. Plano tangente: $z = -2x + 4y + 16$ (o sea $2x - 4y + z = 16$).
>
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es C^1, luego diferenciable en (2, –3). $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$ es C^1 en el semiplano abierto $y > 0$, que contiene a $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$; por lo tanto f es diferenciable en (2, 1). Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en (2, –3) y vale la regla de la cadena en forma matricial: $Dh(2, -3) = Df(2, 1) \cdot D\vec{g}(2,$

-3).

f y su gradiente en (2, 1): $f(2, 1) = 2 \ln 1 + \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 0 = 0$. $f_x = \ln y + \frac{2}{3}x(1 - y)$, que en (2, 1) da $0 + 0 = 0$; $f_y = x/y - \frac{1}{3}x^2$, que en (2, 1) da $2 - 4/3 = 2/3$. $\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$.

Cadena: $\nabla h(2, -3) = (0, 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 1 + (2/3)(-3), 0\cdot 2 + (2/3)\cdot 6) = \mathbf{(-2, 4)}$. Y $h(2, -3) = f(\vec{g}(2, -3)) = f(2, 1) = 0$.

Plano tangente: $z = 0 - 2(x - 2) + 4(y + 3)$, es decir $\mathbf{z = -2x + 4y + 16}$ (equivalente: $2x - 4y + z = 16$).

Trampa: f se deriva y evalúa en $(2, 1) = \vec{g}(2, -3)$, no en $(2, -3)$ (ahí $\ln(-3)$ ni existe). Y el orden del producto importa: es el gradiente (fila) por la jacobiana, $(0, 2/3)\cdot D\vec{g}$; multiplicar la matriz por la columna da $(4/3, 4)$, que está mal.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Respuesta: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$ y $f'(P, \check{v}) = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.

Planteo: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $F_2 = x^2 + z^2 - y$. $P = (1, 2, -1)$ está en C: $1 + 4 + 1 = 6$ y $1 + 1 = 2$ ✓.

Gradientes en P: $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) \to (2, 4, -2) \parallel (1, 2, -1)$; $\nabla F_2 = (2x, -1, 2z) \to (2, -1, -2)$. Son C^1 y no paralelos, así que C es regular en P y su tangente es perpendicular a ambos.

Tangente: $(1, 2, -1) \times (2, -1, -2) = (2\cdot(-2) - (-1)(-1), (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2), 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (-5, 0, -5) \parallel (1, 0, 1)$.

Sentido y versor: la tangente tiene dos sentidos, $\pm(1, 0, 1)$; el de coordenada x negativa es $(-1, 0, -1)$. La derivada direccional se toma sobre versores, así que se normaliza: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$.

Diferenciabilidad: $f = xy^2 + yz$ es polinómica, por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.

Gradiente de f: $\nabla f = (y^2, 2xy + z, y) \to \nabla f(P) = (4, 4 - 1, 2) = (4, 3, 2)$.

Cuenta: $f'(P, \check{v}) = (4\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1))/\sqrt{2} = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.

Trampa: usar $(-1, 0, -1)$ sin normalizar (da -6) o quedarse con el sentido $(1, 0, 1)$ (da $+3\sqrt{2}$). Y antes de usar la fórmula del gradiente hay que decir que f es diferenciable.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u\cos(v), u, u\,\mathrm{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Respuesta: L: $(x, y, z) = (0, 2, 2) + s(0, -1, 1)$. No tiene puntos en común con la curva (el sistema es incompatible).

Parámetros del punto: $\vec{\varphi}(u, v) = (0, 2, 2)$ pide $u = 2$ (segunda coordenada), $\cos v = 0$ y $\mathrm{sen}\, v = 1$, o sea $v = \pi/2$, que está en $[0, \pi]$ (y $u = 2$ en $[1, 3]$).

Normal: $\vec{\varphi}_u = (\cos v, 1, \mathrm{sen}\, v) = (0, 1, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v, 0, u\cos v) = (-2, 0, 0)$ en $(2, \pi/2)$. Producto vectorial: $(1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot(-2) - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)) = (0, -2, 2) \neq \vec{0}$: el punto es regular. Director de L: $(0, -1, 1)$.

Control geométrico: Σ está sobre el cono $x^2 + z^2 = y^2$, cuyo gradiente $(2x, -2y, 2z)$ en $(0, 2, 2)$ es $(0, -4, 4) \parallel (0, -1, 1)$ ✓.

Recta normal: L: $(x, y, z) = (0, 2 - s, 2 + s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Intersección con la curva: igualamos $(0, 2 - s, 2 + s) = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$. Primera coordenada: $t = 3$. Tercera: $2 + s = 2$, $s = 0$. Segunda: $2 - 0 = 2$ contra $t^2 + 1 = 10$. Contradicción: el sistema no tiene

solución.

Resultado: L y la curva no tienen ningún punto en común. (El único punto de la curva con $x = 0$ es $(0, 10, 2)$, que no está en L.)

Trampa: usar el mismo parámetro para la recta y la curva. Tienen que ser parámetros distintos (s y t); con uno solo, el sistema cambia y podés sacar una conclusión falsa.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en $(1/2, 0)$ un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

Respuesta: $b = 2$ y $a > 0$ (cualquier a positivo). En $(1/2, 0)$ hay un mínimo local, de valor $f(1/2, 0) = -3/8$. Si $a < 0$ (con $b = 2$) el punto es silla.

Condición necesaria: f es polinómica, diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y $(1/2, 0)$ es interior; si allí hay extremo local, $\nabla f(1/2, 0) = (0, 0)$.

Derivadas: $f_x = ay^2 + 4bx^3 - 1$, $f_y = 2axy$.

En el punto: $f_x(1/2, 0) = 4b\cdot(1/8) - 1 = b/2 - 1 = 0$, así que **$b = 2$**. $f_y(1/2, 0) = 2a\cdot(1/2)\cdot 0 = 0$ vale para todo a: la primera condición no dice nada de a.

Hessiano: $f_{xx} = 12bx^2 = 12\cdot 2\cdot(1/4) = 6$; $f_{xy} = 2ay = 0$; $f_{yy} = 2ax = a$. $H(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\det H = 6a$.

Casos ($a \neq 0$): si **$a > 0$**, $\det H = 6a > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**. Si $a < 0$, $\det H < 0$: punto silla, no hay extremo.

Valor: $f(1/2, 0) = 0 + 2\cdot(1/16) - 1/2 = 1/8 - 1/2 =$ **$-3/8$** (no depende de a).

Resultado: $b = 2$, $a > 0$, mínimo local de valor $-3/8$.

Trampa: quedarse con $\nabla f = 0$ y contestar "$b = 2$, a cualquiera". Anular el gradiente es necesario pero no suficiente: con $a < 0$ el punto es crítico y es silla. (El caso $a = 0$, que daría $\det H = 0$, lo excluye el enunciado al pedir valores no nulos.)

19/10/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (1 + \ln(xy), \sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** 1. $D = \{(x, y) : xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1\}$: la elipse llena de centro (1, 0) y semiejes 2 y 1, sólo en el primer y el tercer cuadrante (ejes excluidos). Frontera: en el 1er cuadrante, el arco de elipse de $(0, \sqrt{3}/2)$ a (3, 0) con los segmentos de los ejes $[0, 3] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, \sqrt{3}/2]$; en el 3ro, el arco de (–1, 0) a $(0, -\sqrt{3}/2)$ con los segmentos $[-1, 0] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [-\sqrt{3}/2, 0]$. Interior: $\{xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 < 1\}$. 2. No es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo.
>
> **1. Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los de sus componentes. $1 + \ln(xy)$ pide $xy > 0$: x e y del mismo signo, o sea primer o tercer cuadrante, sin los ejes. $\sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)}$ pide $3 - x^2 + 2x - 4y^2 \geq 0$.
> **Completar cuadrados:** $3 - x^2 + 2x - 4y^2 = 4 - (x - 1)^2 - 4y^2$, así que la condición es $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1$: elipse llena (con borde) de centro (1, 0), semieje 2 en x y 1 en y. Va de $x = -1$ a $x = 3$ y corta el eje y donde $1/4 + y^2 = 1$, en $(0, \pm\sqrt{3}/2)$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1\}$.
> **Gráfico de D:** dos pedazos de la elipse. Uno grande en el primer cuadrante (de $x = 0$ a $x = 3$, contiene a (1, 1/2)) y uno chico en el tercero (x entre –1 y 0, $y < 0$, contiene a (–1/2, –1/4)). Los arcos de elipse en trazo lleno; los tramos de los ejes en punteado.
> **Frontera (otro gráfico):** en el 1er cuadrante, el arco de elipse de $(0, \sqrt{3}/2)$ a (3, 0) pasando por (1, 1), cerrado por los segmentos $[0, 3] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, \sqrt{3}/2]$; en el 3ro, el arco de (–1, 0) a $(0, -\sqrt{3}/2)$ cerrado por $[-1, 0] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [-\sqrt{3}/2, 0]$. Los dos contornos se tocan en el origen. Pertenecen a D los puntos de los arcos salvo sus extremos (que están sobre los ejes); los segmentos de los ejes no (ahí $xy = 0$).
> **Interior (otro gráfico):** int $D = \{xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 < 1\}$: los mismos dos pedazos, con todo el borde punteado.
> **2. Abierto:** no. $(1, 1) \in D$ ($xy = 1 > 0$ y $0 + 1 \leq 1$), pero toda bola centrada en él tiene puntos fuera de la elipse.
> **Cerrado:** no. (1, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(1, \varepsilon)$) y no pertenece a D ($xy = 0$).
> **Acotado:** sí: D está dentro de la elipse, $|x - 1| \leq 2$ y $|y| \leq 1$.
> **Conexo:** no. La función x es continua, no se anula en D ($xy > 0$ obliga $x \neq 0$) y vale 1 en (1, 1/2) y –1/2 en (–1/2, –1/4). Una curva continua dentro de D que uniera esos puntos tendría abscisa que pasa de positiva a negativa y, por Bolzano, se anularía: absurdo. D tiene dos componentes, la del 1er y la del 3er cuadrante.
> **Trampa:** traducir $xy > 0$ como "$x > 0$ e $y > 0$" y perder el pedazo del tercer cuadrante; justo ese pedazo es el que hace que D no sea conexo. El 1 + de la primera componente no cambia nada.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(x - 2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y + 1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (1, 0) y clasifíquelo.

Respuesta: a = 1, b = 1. En (1, 0) hay punto silla (det H = –20); no hay extremo. f(1, 0) = 8.

Planteo: f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que (1, 0) es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 0) = \vec{0}$.

Derivadas: $f'_x = 2a(x - 2) - 6bx^2 + 8$ y $f'_y = 2a + 2b(y + 1) - 4$ (el término 2ay aporta 2a a la derivada en y).

Sistema: en (1, 0): $f'_x = -2a - 6b + 8 = 0$ y $f'_y = 2a + 2b - 4 = 0$, o sea a + 3b = 4 y a + b = 2. Restando: 2b = 2, **b = 1** y **a = 1**.

Hessiano: $f''_{xx} = 2a - 12bx$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2b$. Con a = b = 1, en (1, 0): $H = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, det H = –20 < 0.

Clasificación: det H < 0, así que (1, 0) es un **punto silla**: no hay extremo relativo. El punto silla del gráfico es (1, 0, f(1, 0)) con f(1, 0) = [1 + 0] + [1 – 2] + 8 = 8.

Trampa: "clasifíquelo" no quiere decir que sea extremo: punto silla es una clasificación válida y es la respuesta. Ojo también con perder el 2a de f'_y, que sale de derivar a·2y.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$
define implícitamente una función x = f(y, z) de clase C^1 en un entorno de $(y_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente f(0.95, 0.02) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $x_0 = 1$; $f_y(1, 0) = -1$, $f_z(1, 0) = -3$; f(0.95, 0.02) ≈ 0.99.

Planteo: llamamos $F(x, y, z) = 3zy - \cos(z)x + yx^2$; la ecuación es F = 0 y queremos despejar x en función de (y, z).

Punto: en (y, z) = (1, 0) queda $0 - x + x^2 = 0$, o sea x(x – 1) = 0: x = 0 o x = 1. Como piden $x_0 > 0$, **$x_0 = 1$**, y el punto es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

Derivadas de F: $F'_x = -\cos z + 2xy$, $F'_y = 3z + x^2$, $F'_z = 3y + x \operatorname{sen} z$. En (1, 1, 0): $F'_x = -1 + 2 = 1$, $F'_y = 0 + 1 = 1$, $F'_z = 3 + 0 = 3$.

Hipótesis del TFI: (i) F(1, 1, 0) = 0; (ii) F es suma de productos de polinomios y coseno, así que es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (en particular en un entorno del punto); (iii) $F'_x(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Entonces existe un entorno de (1, 0) y una única x = f(y, z) de clase C^1 ahí, con f(1, 0) = 1 y F(f(y, z), y, z) = 0.

Derivadas de f: $f'_y(1, 0) = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -1/1 = -1$; $f'_z(1, 0) = -\dfrac{F'_z}{F'_x} = -3/1 = -3$.

Aproximación lineal: como f es C^1, es diferenciable en (1, 0) y $f(y, z) \approx f(1, 0) + f'_y(1, 0)(y - 1) + f'_z(1, 0)(z - 0)$. Con (y, z) = (0.95, 0.02): $f(0.95, 0.02) \approx 1 + (-1)(-0.05) + (-3)(0.02) = 1 + 0.05 - 0.06 =$ **0.99**.

Trampa: acá la variable que se despeja es x, así que el denominador es F'_x (no F'_z por costumbre). Y sin descartar x = 0 con la condición $x_0 > 0$ el punto queda mal definido (en x = 0 además $F'_x = -1$, también sirve, pero es otra función).

Ejercicio 4. Sea g(x, y) = f(x + y, x^3y^2) con f(r, s) un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que f(0, 1) = 1 y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (1, –1, g(1, –1)).

Respuesta: $\nabla f(0, 1) = (3, -1)$; g(1, –1) = 1, $\nabla g(1, -1) = (0, 5)$. Plano tangente: z = 1 + 5(y + 1), o sea z = 5y + 6.

∇f con las direccionales: f es C^1, luego diferenciable en (0, 1), así que $f'((0,1), \check{w}) = \nabla f(0,1)\cdot\check{w}$ para todo versor $\check{w}$. Con $\nabla f(0,1) = (a, b)$: por $\check{v}$, $(\sqrt{2}/2)(a + b) = \sqrt{2}$, o sea $a + b = 2$; por $\check{u}$, $(\sqrt{2}/2)(a - b) = 2\sqrt{2}$, o sea $a - b = 4$. Entonces **$\nabla f(0, 1) = (3, -1)$**.
El punto interior: $(x + y, x^3y^2)$ en $(1, -1)$ da $(0, 1\cdot 1) = (0, 1)$ ✓. Entonces $g(1, -1) = f(0, 1) = 1$.
Hipótesis: f ∈ C^1 y la interior es polinómica: g es diferenciable en $(1, -1)$, tiene plano tangente y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (1, –1): $r = x + y$ da $(1, 1)$; $s = x^3y^2$ da $(3x^2y^2, 2x^3y) = (3, -2)$.
Cuenta: $g'_x = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 0$; $g'_y = 3\cdot 1 + (-1)(-2) = 5$. **$\nabla g(1, -1) = (0, 5)$**.
Resultado: $z = 1 + 0\cdot(x - 1) + 5(y + 1)$, es decir **$z = 5y + 6$** (no depende de x).
Trampa: para pasar de derivadas direccionales a gradiente hace falta que f sea diferenciable (acá lo es por ser C^1); sin eso no se puede usar $\nabla f\cdot\check{v}$. Y que g'_x dé 0 no es error: el plano queda paralelo al eje x.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y - 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 - 2y - x + 1 = 0 \ ; \ y - z = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

Respuesta: 1. (1, 2, 1) y (1, 0, –1). 2. En (1, 2, 1): $(1, 2, 1) + \lambda(2, 1, 1)$; en (1, 0, –1): $(1, 0, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Lectura de Γ: $y^2 - 2y - x + 1 = 0$ es $x = (y - 1)^2$, y $y - z = 1$ es $z = y - 1$. Así Γ se parametriza con $y = t$: $\vec{g}(t) = ((t - 1)^2, t, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.
1. Sistema: reemplazando en Σ: $(y - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y - 1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2$ o $y = 0$.
Puntos: $y = 2$: $x = 1$, $z = 1$
$P_1 = (1, 2, 1)$; $y = 0$: $x = 1$, $z = -1$
$P_2 = (1, 0, -1)$. Control en Σ: $1 + 1 + 1 = 3$ en los dos ✓.
2. Tangente: $\vec{g}'(t) = (2(t - 1), 1, 1)$, nunca nulo (segunda componente 1): Γ es regular. P_1 corresponde a $t = 2$ y P_2 a $t = 0$.
En P_1: $\vec{g}'(2) = (2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En P_2: $\vec{g}'(0) = (-2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control con gradientes: con $G_1 = y^2 - 2y - x + 1$ y $G_2 = y - z - 1$: $\nabla G_1 \times \nabla G_2 = (-1, 2y - 2, 0) \times (0, 1, -1) = (2 - 2y, -1, -1)$, que da $(-2, -1, -1) \parallel (2, 1, 1)$ en P_1 y $(2, -1, -1) \parallel (-2, 1, 1)$ en P_2 ✓.
Trampa: la recta pedida es tangente a Γ, no a Σ: el gradiente de Σ no entra en el ítem 2. Y no olvidar la raíz $y - 1 = -1$.

19/10/24, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (2 - \ln(xy), \sqrt{(3 - y^2 + 2y - 4x^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : xy > 0, 4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$: la elipse cerrada de centro (0, 1), semieje 1 en x y 2 en y, restringida a los cuadrantes 1° y 3° abiertos (dos pedazos). $\text{int } D = \{xy > 0, 4x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$. $\partial D = \{4x^2 + (y - 1)^2 = 4, xy \geq 0\} \cup \{x = 0, -1 \leq y \leq 3\} \cup \{y = 0, -\sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2\}$. D no es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de sus componentes. La primera pide $xy > 0$ (logaritmo); la segunda, $3 - y^2 + 2y - 4x^2 \geq 0$ (raíz cuadrada).
> **Completar cuadrados:** $3 - y^2 + 2y - 4x^2 = 4 - 4x^2 - (y - 1)^2$, así que la condición es $4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$, o sea $x^2 + (y - 1)^2/4 \leq 1$: la elipse **cerrada** (borde incluido) de centro (0, 1), semieje 1 en x y 2 en y. Corta al eje y en (0, –1) y (0, 3), y al eje x en $(\pm\sqrt{3}/2, 0)$ (con $y = 0$ queda $4x^2 + 1 = 4$).
> **xy > 0:** x e y no nulos y del mismo signo, o sea los cuadrantes 1° y 3° **abiertos** (los ejes quedan afuera). Fijate que ln(xy) no es ln x + ln y: el 3° cuadrante también entra.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, 4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$. **Gráfico:** dos pedazos de la elipse. El grande, en el 1° cuadrante, limitado por el eje y de 0 a 3 y el eje x de 0 a $\sqrt{3}/2$ (los dos en punteado) y por el arco de elipse de $(\sqrt{3}/2, 0)$ a (0, 3) pasando por (1, 1) (trazo lleno, extremos huecos). El chico, en el 3° cuadrante, entre el eje y de –1 a 0, el eje x de $-\sqrt{3}/2$ a 0 (punteados) y el arco de (0, –1) a $(-\sqrt{3}/2, 0)$ (lleno, extremos huecos). El pedazo chico existe: (–1/2, –1/2) cumple $xy = 1/4 > 0$ y $4 \cdot (1/4) + 9/4 = 13/4 \leq 4$.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : xy > 0, 4x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$, los mismos dos pedazos sin los arcos.
> **Frontera:** $\partial D = \{4x^2 + (y - 1)^2 = 4, xy \geq 0\} \cup \{x = 0, -1 \leq y \leq 3\} \cup \{y = 0, -\sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2\}$: los dos arcos con sus extremos más los dos segmentos de los ejes que quedan dentro de la elipse. Los arcos sin sus extremos son de D; los segmentos de los ejes no.
> **¿Abierto?** No: $P = (1/2, 1 + \sqrt{3})$ está en D ($4 \cdot (1/4) + 3 = 4$ y $xy > 0$), pero toda bola centrada en P contiene puntos $(1/2, 1 + \sqrt{3} + \varepsilon)$ con $4x^2 + (y - 1)^2 > 4$, que no son de D. P es de D y no es interior.
> **¿Cerrado?** No: (0, 1) es punto frontera (los $(\varepsilon, 1)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, 1)$ no) y no pertenece a D porque ahí $xy = 0$. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
> **¿Acotado?** Sí: en D vale $|x| \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 3$, así que $\|(x, y)\| \leq \sqrt{10}$.
> **¿Conexo?** No: (1/2, 1) y (–1/2, –1/2) están en D. Si una curva continua dentro de D los uniera, su primera coordenada sería continua y pasaría de 1/2 a –1/2; por Bolzano habría un punto de la curva con $x = 0$, donde $xy = 0$, y ese punto no es de D. Absurdo: D tiene dos componentes (una por cuadrante).
> **Trampa:** pedir $x > 0$ e $y > 0$ por separado (como si fuera ln x + ln y) pierde el pedazo del 3° cuadrante y lleva a decir, mal, que D es conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(y - 2)^2 + 2x] + \mathbf{b}[(x + 1)^2 - 2y^3] + 8y - 4x$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (0, 1) y clasifíquelo.

> **Respuesta:** a = 1, b = 1. En (0, 1) hay punto silla ($\det H = -20$); no hay extremo. $f(0, 1) = 8$.

Planteo: f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que (0, 1) es crítico si y sólo si $\nabla f(0, 1) = 0$.
Derivadas: $f'_x = 2a + 2b(x + 1) - 4$ (el término 2ax aporta 2a) y $f'_y = 2a(y - 2) - 6by^2 + 8$.
Sistema: en (0, 1): $f'_x = 2a + 2b - 4 = 0$ y $f'_y = -2a - 6b + 8 = 0$, o sea $a + b = 2$ y $a + 3b = 4$. Restando: $2b = 2$, **b = 1** y **a = 1**.
Hessiano: $f''_{xx} = 2b$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2a - 12by$. Con a = b = 1, en (0, 1): $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\det H = -20 < 0$.
Clasificación: det H < 0, así que (0, 1) es un **punto silla**: no hay extremo relativo. El punto silla del gráfico es (0, 1, f(0, 1)) con f(0, 1) = [1 + 0] + [1 − 2] + 8 = 8.
Trampa: "clasifíquelo" no quiere decir que sea extremo: punto silla es una clasificación válida y es la respuesta. Es el Tema 1 con x e y intercambiados, por eso da lo mismo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$3zx - \cos(z)y + xy^2 = 0$

define implícitamente una función y = f(x, z) de clase C^1 en un entorno de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(x_0, z_0) = y_0 > 0$. Calcule aproximadamente f(0.95, 0.02) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $y_0 = 1$, $\nabla f(1, 0) = (-1, -3)$. f(0.95, 0.02) ≈ 0.99.

Planteo: $F(x, y, z) = 3zx - \cos(z)\, y + xy^2$, queremos y = f(x, z) cerca de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ con $y_0 > 0$.
Punto: $F(1, y, 0) = -y + y^2 = y(y - 1) = 0$ da y = 0 o y = 1; la condición $y_0 > 0$ elige **$y_0 = 1$**. P = (1, 1, 0).
Hipótesis del TFI: (1) F(P) = 0 ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_y = -\cos z + 2xy$, $F_y(P) = -1 + 2 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces y = f(x, z) es C^1 en un entorno de (1, 0), con f(1, 0) = 1.
Derivadas: $F_x = 3z + y^2$, $F_x(P) = 1$. $F_z = 3x + \text{sen}(z)\, y$, $F_z(P) = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_y} = -1$, $f_z = -\dfrac{F_z}{F_y} = -3$.
Aproximación lineal: f es diferenciable en (1, 0), así que $f(x, z) \approx f(1, 0) + f_x \Delta x + f_z \Delta z$, con $\Delta x = 0.95 - 1 = -0.05$ y $\Delta z = 0.02$.
Resultado: f(0.95, 0.02) ≈ 1 + (−1)(−0.05) + (−3)(0.02) = 1 + 0.05 − 0.06 = 0.99.
Trampa: el segundo argumento de f es z, no y: el incremento 0.02 va con f_z. Y sin la condición $y_0 > 0$ hay dos puntos posibles; con $y_0 = 0$ tendrías $F_y = -1$ y otra función distinta.

Ejercicio 4. Sea g(x, y) = f(x − y, x^2y^3) con f(r, s) un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Se sabe que f(0, 1) = 1 y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (1, 1, g(1, 1)).

Respuesta: $\nabla f(0, 1) = (3, 1)$, g(1, 1) = 1, $\nabla g(1, 1) = (5, 0)$. Plano tangente: z = 5x − 4 (o sea 5x − z = 4).

Planteo: g(x, y) = f(r(x, y), s(x, y)) con r = x − y, $s = x^2y^3$. En (1, 1) el punto interior es (r, s) = (1 − 1, 1·1) = (0, 1), así que g(1, 1) = f(0, 1) = 1.
Hipótesis: f es C^1 en $\mathbb{R}^2$, luego diferenciable en (0, 1), y entonces $f'((0, 1), \check{w}) = \nabla f(0, 1) \cdot \check{w}$ para todo versor $\check{w}$. Las funciones r y s son polinómicas (C^∞). Así g es diferenciable en (1, 1) y vale la regla de la cadena.
∇f(0, 1) con las derivadas direccionales: llamando $\nabla f(0, 1) = (a, b)$: $(a, b)\cdot(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)(a - b) = \sqrt{2}$, o sea a − b = 2; $(a, b)\cdot(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)(a + b) = 2\sqrt{2}$, o sea a + b = 4. Sumando: a = 3, b = 1. **∇f(0, 1) = (3, 1)**.
Jacobiana interior en (1, 1): $r_x = 1$, $r_y = -1$; $s_x = 2xy^3 = 2$, $s_y = 3x^2y^2 = 3$.
Cadena: $g_x(1, 1) = f_r \cdot r_x + f_s \cdot s_x = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = 5$; $g_y(1, 1) = f_r \cdot r_y + f_s \cdot s_y = 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 0$.

Plano tangente: $z = g(1, 1) + g_x(x - 1) + g_y(y - 1) = 1 + 5(x - 1)$, es decir $\mathbf{z = 5x - 4}$.
Trampa: las derivadas de f se evalúan en (0, 1), el punto *interior*, no en (1, 1). Y para usar $f' = \nabla f \cdot \check{v}$ hace falta decir que f es diferenciable (acá sale de ser C^1).

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y + 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 + 2y - x + 1 = 0 \; ; \; z - y = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

Respuesta: 1. (1, 0, 1) y (1, −2, −1). 2. En (1, 0, 1): (1, 0, 1) + λ(2, 1, 1); en (1, −2, −1): (1, −2, −1) + λ(−2, 1, 1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lectura de Γ: $y^2 + 2y - x + 1 = 0$ es $x = (y + 1)^2$, y $z - y = 1$ es $z = y + 1$. Así Γ se parametriza con $y = t$: $\vec{g}(t) = ((t + 1)^2, t, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.
1. Sistema: reemplazando en Σ: $(y + 1)^2 + (y + 1)^2 + (y + 1)^2 = 3 \Rightarrow (y + 1)^2 = 1 \Rightarrow y + 1 = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ o $y = -2$.
Puntos: $y = 0$: $x = 1$, $z = 1$
$P_1 = (1, 0, 1)$; $y = -2$: $x = 1$, $z = -1$
$P_2 = (1, -2, -1)$. Control en Σ: $1 + 1 + 1 = 3$ en los dos ✓.
2. Tangente: $\vec{g}'(t) = (2(t + 1), 1, 1)$, nunca nulo (segunda componente 1): Γ es regular. P_1 corresponde a $t = 0$ y P_2 a $t = -2$.
En P_1: $\vec{g}'(0) = (2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En P_2: $g'(-2) = (-2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, -2, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control con gradientes: con $G_1 = y^2 + 2y - x + 1$ y $G_2 = z - y - 1$: $\nabla G_1 \times \nabla G_2 = (-1, 2y + 2, 0) \times (0, -1, 1) = (2y + 2, 1, 1)$, que da $(2, 1, 1)$ en P_1 y $(-2, 1, 1)$ en P_2 ✓.
Trampa: la recta pedida es tangente a Γ, no a Σ: el gradiente de Σ no entra en el ítem 2. Y no olvidar la raíz negativa de $(y + 1)^2 = 1$.

2/7/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = 6x^2y - x^3y - x^2y^2$ en la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
y clasifíquelos.

> **Respuesta:** En D hay un único punto crítico, (3, 3/2), y es un máximo local con f(3, 3/2) = 81/4.
>
> **Planteo:** f es polinómica y D es abierto, así que los candidatos en D son los puntos de D con $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 12xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(12 - 3x - 2y)$; $f_y = 6x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(6 - x - 2y)$.
> **Sistema en D:** como $x > 0$ e $y > 0$, $xy \neq 0$ y $x^2 \neq 0$; queda $3x + 2y = 12$ y $x + 2y = 6$. Restando: $2x = 6$, $x = 3$, y entonces $y = 3/2$. **Punto: (3, 3/2)**, que está en D. (Fuera de D, ∇f también se anula en todo el eje $x = 0$ y en (6, 0), pero no pertenecen a D y no se analizan.)
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 12y - 6xy - 2y^2$, $f_{xy} = 12x - 3x^2 - 4xy$, $f_{yy} = -2x^2$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
> **En (3, 3/2):** $f_{xx} = 18 - 27 - 9/2 = -27/2$; $f_{xy} = 36 - 27 - 18 = -9$; $f_{yy} = -18$. $\det H = (-27/2)(-18) - 81 = 243 - 81 = 162 > 0$ y $f_{xx} < 0$: **máximo local**.
> **Valor:** $f = x^2y(6 - x - y) = 9 \cdot (3/2) \cdot (3/2) =$ **81/4**.
> **Trampa:** dividir por x o por y sin decir por qué se puede. Acá se puede justamente porque D excluye los ejes; si el dominio fuera $\mathbb{R}^2$, habría que estudiar aparte la recta $x = 0$ de puntos críticos (no aislados), donde el hessiano tiene det = 0.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$f(x, y) = \sqrt{(x + y)}\, \ln(2 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x + y \geq 0, x^2 + y^2 < 2\}$: medio disco abierto de radio $\sqrt{2}$ con el diámetro sobre $y = -x$ incluido, salvo sus extremos (1, –1) y (–1, 1). No es abierto, no es cerrado, es conexo (y acotado). b) $N_0 = \{x + y = 0, x^2 + y^2 < 2\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$: el diámetro abierto de (–1, 1) a (1, –1) más la semicircunferencia de radio 1 del lado $x + y \geq 0$, con sus extremos $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$.
>
> **a) Condiciones:** $\sqrt{(x + y)}$ pide $x + y \geq 0$; $\ln(2 - x^2 - y^2)$ pide $2 - x^2 - y^2 > 0$, o sea $x^2 + y^2 < 2$.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x^2 + y^2 < 2\}$: el semiplano cerrado por encima de la recta $y = -x$ intersecado con el disco abierto de centro el origen y radio $\sqrt{2}$. La recta corta a la circunferencia en (1, –1) y (–1, 1).
> **Gráfico:** el medio disco del lado del 1° cuadrante; el diámetro sobre $y = -x$ en trazo lleno (pertenece), la semicircunferencia en punteado (no pertenece) y los puntos (1, –1) y (–1, 1) huecos.
> **¿Abierto?** No: $(0, 0) \in D$ ($x + y = 0$ y $0 < 2$), pero toda bola centrada en el origen contiene puntos $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ con $x + y < 0$, que no son de D.
> **¿Cerrado?** No: (1, 1) es punto frontera (los $(1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ están en D) y no es de D porque $x^2 + y^2 = 2$.
> **¿Conexo?** Sí: el semiplano y el disco son convexos, su intersección también; y un convexo es arcoconexo porque el segmento entre dos puntos cualesquiera queda adentro. (Además es acotado,

pero no compacto por no ser cerrado.)

b) Planteo: $N_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}$. En D los dos factores están definidos, y un producto vale 0 si y sólo si se anula alguno de los factores.

Primer factor: $\sqrt{(x + y)} = 0 \iff x + y = 0$. Dentro de D es el diámetro $\{y = -x, x^2 + y^2 < 2\}$, de (–1, 1) a (1, –1) sin los extremos.

Segundo factor: $\ln(2 - x^2 - y^2) = 0 \iff 2 - x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$, pero sólo los puntos con $x + y \geq 0$ (tienen que ser de D): la semicircunferencia de radio 1 del lado del 1° cuadrante, de $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ a $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ pasando por (1, 0) y (0, 1), con los extremos incluidos (caen justo sobre el diámetro).

Resultado: $N_0 = \{x + y = 0, x^2 + y^2 < 2\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$. Gráfico: el diámetro y, apoyada sobre él, la semicircunferencia de radio 1.

Trampa: dibujar la circunferencia unitaria entera (la mitad con $x + y < 0$ no está en D) u olvidarse del diámetro, que también es nivel 0 porque ahí se anula la raíz.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$, la ecuación
$e^{y+z} + xz^2 + y = 1$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1. Encuentre los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 1), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $\nabla f(1, 1) = (-1/2, -3/2)$. $f'((1, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = \pm(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$.

Planteo: $F(x, y, z) = e^{y+z} + xz^2 + y - 1$, $P = (1, -1, 1)$, queremos $y = f(x, z)$. Ojo: el dominio de f es el plano (x, z), y el punto (1, 1) del enunciado es (x_0, z_0).

Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = e^0 + 1 - 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) La variable que se despeja es y: $F_y = e^{y+z} + 1$, $F_y(P) = 1 + 1 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces $y = f(x, z)$ es C^1 en un entorno de (1, 1), con $f(1, 1) = -1$.

Derivadas: $F_x = z^2$, $F_x(P) = 1$. $F_z = e^{y+z} + 2xz$, $F_z(P) = 1 + 2 = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_y} = -1/2$, $f_z = -\dfrac{F_z}{F_y} = -3/2$. **$\nabla f(1, 1) = (-1/2, -3/2)$**, paralelo a (1, 3).

Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable, y $f'((1, 1), \check{v}) = \nabla f(1, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-a/2 - 3b/2 = 0$, o sea $a = -3b$. Con $a^2 + b^2 = 1$: $10b^2 = 1$.

Resultado: $\check{v} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$ y $\check{v} = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.

Trampa: el gradiente de f tiene componentes en x y en z (no en y, que es la variable dependiente). Si derivás respecto de y estás calculando otra cosa.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
Sabiendo que $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$ es el polinomio de Taylor de orden 1 de g en (0, 2, 0), halle la aproximación lineal de f alrededor del punto (1, 1).

Respuesta: $f(1, 1) = 8$, $\nabla f(1, 1) = (-1, 5)$. $L(x, y) = 8 - (x - 1) + 5(y - 1) = -x + 5y + 4$.

Datos de g: el polinomio de Taylor de orden 1 en (0, 2, 0) es $g(0, 2, 0) + \nabla g(0, 2, 0) \cdot (u, v - 2, w)$. Con $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$: $g(0, 2, 0) = p(0, 2, 0) = 4 + 4 = 8$ y **$\nabla g(0, 2, 0) = (-1, 2, -1)$**.

El punto interior: $(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ en (1, 1) da (0, 2, 0) ✓, así que $f(1, 1) = 8$.

Hipótesis: $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y la función interior es polinómica, así que f es C^1, diferenciable en (1, 1), y su aproximación lineal es $L(x, y) = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$.

Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (2, -2)$; $v = x + y$ da (1, 1); $w = x - y$ da (1, –1).

Cuenta: $f'_x = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -1$; $f'_y = (-1)(-2) + 2 \cdot 1 + (-1)(-1) = 5$. **$\nabla f(1, 1) = (-1, 5)$**.

Resultado: $L(x, y) = 8 - (x - 1) + 5(y - 1)$, o desarrollado, $-x + 5y + 4$.

> **Trampa:** $g(0, 2, 0)$ no es el término independiente 4: hay que evaluar p en el punto (el $2v$ aporta 4 más). Lo mismo pasa con cualquier Taylor que venga desarrollado y no en potencias de $(v - 2)$.

Ejercicio 5. Halle los puntos P de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie

$\vec{X} = (uv, u + v, u - v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

en $Q = (1, 2, 0)$.

> **Respuesta:** $P_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y $P_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Planos tangentes: $-x + y = \sqrt{2}$ y $-x + y = -\sqrt{2}$ (ambos paralelos a $-x + y = 1$, el tangente en Q).
>
> **Paso 1, el parámetro de Q:** $\vec{X}(u, v) = (1, 2, 0)$ pide $u + v = 2$, $u - v = 0$, de donde $u = v = 1$, y se comprueba $uv = 1$ ✓.
> **Paso 2, normal en Q:** $\vec{X}_u = (v, 1, 1) = (1, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, -1) = (1, 1, -1)$ en $(1, 1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot(-1) - 1\cdot1, 1\cdot1 - 1\cdot(-1), 1\cdot1 - 1\cdot1) = (-2, 2, 0) \neq \vec{0}$, así que Q es punto regular y el plano tangente existe; su normal es $\vec{n} = (-1, 1, 0)$. Plano tangente en Q: $-(x - 1) + (y - 2) = 0$, o sea $-x + y = 1$.
> **Paso 3, normal de la esfera:** Σ es el conjunto de nivel 1 de $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, que es C^1 con $\nabla G = (2x, 2y, 2z) \neq \vec{0}$ sobre Σ (el origen no está en Σ). Entonces la normal en $P = (x, y, z)$ es $\nabla G(P) = 2P$.
> **Paso 4, paralelismo:** $P = \lambda(-1, 1, 0)$ con $|P| = 1$: $2\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Quedan **$P_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$** y **$P_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$**.
> **Planos:** en P_1, $-(x + 1/\sqrt{2}) + (y - 1/\sqrt{2}) = 0$, o sea $-x + y = \sqrt{2}$; en P_2, $-x + y = -\sqrt{2}$. Ninguno coincide con $-x + y = 1$, así que son paralelos de verdad.
> **Trampa:** son **dos** puntos (antípodas). Quedarse sólo con λ positivo pierde la mitad de la respuesta.

3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado y/o conexo.

> **Respuesta:** $h(x, y) = 9x(y - x^2)$. $A = \{x = 0\} \cup \{y = x^2\}$ (eje y más parábola): cerrado, no abierto, conexo. $B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$ (arriba de la parábola a la derecha del eje y, abajo a la izquierda): abierto, no cerrado, no conexo.
>
> **Derivadas:** $f(x, y) = 3xy - x^3$ es polinómica; $f'_x = 3y - 3x^2$ y $f'_y = 3x$. Entonces $h(x, y) = (3y - 3x^2)(3x) =$ **$9x(y - x^2)$**, continua en $\mathbb{R}^2$.
> **A:** $h = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = x^2$. **$A = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = x^2\}$**: el eje y entero y la parábola $y = x^2$ (vértice en el origen), que se cortan sólo en (0, 0). Gráfico: las dos curvas en trazo lleno.
> **B:** $h > 0 \Leftrightarrow x$ e $y - x^2$ tienen el mismo signo: ($x > 0$ y $y > x^2$) o ($x < 0$ y $y < x^2$). **$B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$**. Gráfico: en el semiplano derecho, la zona de arriba de la rama derecha de la parábola (entre el eje y y la parábola); en el izquierdo, la zona de abajo de la rama izquierda (incluye todo el tercer cuadrante). Bordes punteados: el eje y y la parábola.
> **A, ¿cerrado?** Sí: $A = h^{-1}(\{0\})$ con h continua y {0} cerrado. (Directo: si $(x_n, y_n) \in A$ tiende a (a, b), $h(a, b) = \lim h(x_n, y_n) = 0$.)
> **A, ¿abierto?** No: $(0, 1) \in A$, pero en cualquier entorno está $(\varepsilon, 1)$ con $0 < \varepsilon < 1$, y $h(\varepsilon, 1) = 9\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \neq 0$. Ningún punto de A es interior: es unión de dos curvas.
> **A, ¿conexo?** Sí: el eje y es conexo (una recta) y la parábola también (imagen de la curva continua (t, t^2), $t \in \mathbb{R}$). Comparten el origen, y la unión de dos conexos con un punto en común es conexa: cualquier punto de una se une con cualquiera de la otra pasando por (0, 0).
> **B, ¿abierto?** Sí: $B = h^{-1}((0, +\infty))$ con h continua y $(0, +\infty)$ abierto. (Directo: si $h(P) > 0$, por continuidad $h > 0$ en todo un entorno de P.)
> **B, ¿cerrado?** No: $(1, 1) \notin B$ ($h = 0$), pero $(1, 1 + 1/n) \in B$ ($h = 9/n > 0$) y tiende a (1, 1). (Otra forma: B no es $\emptyset$ ni $\mathbb{R}^2$, y en $\mathbb{R}^2$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son esos dos.)
> **B, ¿conexo?** No: en B nunca es $x = 0$, así que $B \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos semiplanos abiertos disjuntos, y B tiene puntos en los dos, (1, 2) y (–1, 0). (Con caminos: una curva en B de (1, 2) a (–1, 0) tendría que cruzar $x = 0$, donde $h = 0$.) Cada una de las dos piezas, por separado, sí es conexa.
> **Trampa:** olvidarse del factor x que viene de f'_y y quedarse sólo con la parábola. Y B no es "el interior de la parábola": en el semiplano izquierdo es la parte de abajo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación
$z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$
en un entorno del punto (1, 1). Calcular mediante una aproximación lineal el valor de h(2.01, 0.97), siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

> **Respuesta:** $z_0 = 0$; $\nabla f(1, 1) = (-2, 0)$; $h(2, 1) = 0$, $\nabla h(2, 1) = (-2, 4)$; $h(2.01, 0.97) \approx -0.14$.
>
> **Planteo:** $F(u, v, z) = z^3u + zv^2 + u^2 - 1$.
> **Punto:** en $(u, v) = (1, 1)$: $z^3 + z + 1 - 1 = z(z^2 + 1) = 0$; como $z^2 + 1 > 0$, la única raíz real es **$z_0 = 0$**. Punto (1, 1, 0).
> **Derivadas de F:** $F'_u = z^3 + 2u$, $F'_v = 2zv$, $F'_z = 3z^2u + v^2$. En (1, 1, 0): $F'_u = 2$, $F'_v = 0$, $F'_z = 0 + 1 = 1$.

Hipótesis del TFI: (i) $F(1, 1, 0) = 0$; (ii) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Entonces $z = f(u, v)$ es C^1 en un entorno de $(1, 1)$, con $f(1, 1) = 0$, $f_u(1, 1) = -2/1 = -2$ y $f_v(1, 1) = -0/1 = 0$.
Dónde centrar h: necesitamos (x, y) cerca de $(2.01, 0.97)$ con $(x - y^2, x^2 - 3y) = (1, 1)$. De la primera, $x = 1 + y^2$; en la segunda, $(1 + y^2)^2 - 3y = 1$, o sea $y^4 + 2y^2 - 3y = y(y - 1)(y^2 + y + 3) = 0$: $y = 0$ ($x = 1$) o $y = 1$ ($x = 2$). El que está cerca es **(2, 1)**, y $h(2, 1) = f(1, 1) = 0$.
Regla de la cadena: f es diferenciable en $(1, 1)$ y la interior es polinómica, así que h es diferenciable en $(2, 1)$. Con $U = x - y^2$, $V = x^2 - 3y$: $U_x = 1$, $U_y = -2y = -2$, $V_x = 2x = 4$, $V_y = -3$. $h_x(2, 1) = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 4 = -2$; $h_y(2, 1) = (-2)(-2) + 0\cdot(-3) = 4$.
Aproximación lineal: $h(x, y) \approx 0 - 2(x - 2) + 4(y - 1)$. Con $(2.01, 0.97)$: $-2(0.01) + 4(-0.03) = -0.02 - 0.12 =$ **-0.14**.
Trampa: el enunciado no da z_0 ni el punto donde centrar h: los dos hay que deducirlos (y justificar que $z_0 = 0$ es la única opción). No centres en $(2.01, 0.97)$ ni en $(1, 1)$.

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie
$\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$
en $A = (1, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto $(0, -1, 2)$ es tangente a la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Respuesta: $y_0 = 2$, r_0: $\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$; Π: $2y + z = 0$; $r_0 \cap \Pi = \{(6, -11/2, 11)\}$.

Paso 1, el punto A: $A \in \Sigma$ pide $2\cdot 1^2 + 1\cdot y_0 - y_0^2 = 0$, o sea $y_0^2 - y_0 - 2 = 0$, $y_0 = 2$ o $y_0 = -1$. Como Σ exige $y > 0$, **$y_0 = 2$** y $A = (1, 2, 1)$.
Paso 2, recta normal: $G(x, y, z) = 2z^2 + xy - y^2$ es C^1; $\nabla G = (y, x - 2y, 4z)$, y en A: $\nabla G(A) = (2, -3, 4) \neq \vec{0}$. Entonces r_0: **$\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$**, $t \in \mathbb{R}$.
Paso 3, parámetros de (0, –1, 2): $u^2 + v = 0$, $uv = -1$, $u^2 + v^2 = 2$. De la primera $v = -u^2$, y en la segunda $-u^3 = -1$, $u = 1$ (única raíz real), $v = -1$; se comprueba $u^2 + v^2 = 2$ ✓.
Paso 4, plano tangente Π: $\vec{X}_u = (2u, v, 2u) = (2, -1, 2)$, $\vec{X}_v = (1, u, 2v) = (1, 1, -2)$. $\vec{N} = ((-1)(-2) - 2\cdot 1, 2\cdot 1 - 2\cdot(-2), 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = (0, 6, 3) \neq \vec{0}$ (punto regular), proporcional a $(0, 2, 1)$. Π: $2(y + 1) + (z - 2) = 0$, o sea **$2y + z = 0$**.
Paso 5, intersección: reemplazo r_0 en Π: $2(2 - 3t) + (1 + 4t) = 5 - 2t = 0$, $t = 5/2$. Punto: $(1 + 5, 2 - 15/2, 1 + 10) =$ **$(6, -11/2, 11)$**. Control: $2(-11/2) + 11 = 0$ ✓. Como r_0 no es paralela a Π ($\nabla G(A) \cdot (0, 2, 1) = -2 \neq 0$), la intersección es ese único punto.
Trampa: la condición $y > 0$ está para descartar $y_0 = -1$; si no la usás tenés dos rectas y dos respuestas. Y la componente z de $\vec{X}_u$ es $2u$ (de $u^2 + v^2$), no 0.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Respuesta: $A = (1, -1)$, con $f(A) = 1$. $Hf(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = -12 < 0$: punto silla, no hay extremo relativo.

Planteo: f es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto). Su polinomio de Taylor de orden 2 en $A = (a, b)$ es $p_2(x, y) = f(A) + \nabla f(A)\cdot(x - a, y - b) + \tfrac{1}{2}(x - a, y - b)\, Hf(A)\, (x - a, y - b)^t$, y por construcción tiene, en A, el mismo valor, el mismo gradiente y el mismo hessiano que f. Entonces $\nabla p_2(A) = \nabla f(A)$ y $Hp_2 = Hf(A)$.
Hallar A: como A es crítico, $\nabla f(A) = 0$, o sea $\nabla p_2(A) = 0$. Con $\nabla p_2 = (2x + 4y + 2, 4x + 2y - 2)$: el sistema

$2x + 4y = -2$, $4x + 2y = 2$ equivale a $x + 2y = -1$, $2x + y = 1$. De la primera $x = -1 - 2y$; en la segunda, $-2 - 4y + y = 1$, $y = -1$ y $x = 1$. Como el sistema tiene determinante $2\cdot 2 - 4\cdot 4 = -12 \neq 0$, la solución es única: **A = (1, –1)**.

Valor: $f(A) = p_2(1, -1) = 1 - 4 + 2 + 1 + 2 - 1 = 1$.

Hessiano: $Hf(A) = Hp_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 4 - 16 = -12 < 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.

Conclusión: $\det Hf(A) < 0$, así que A = (1, –1) es un **punto silla**: f **no** tiene extremo relativo en A (aunque $f(A) = 1$ y $\nabla f(A) = 0$).

Trampa: p_2 está desarrollado en potencias de x e y, no de $(x - a, y - b)$: A no es el origen ni sale de mirar los coeficientes. Se encuentra pidiendo $\nabla p_2(A) = 0$, que es lo que traduce "A es punto crítico de f".

Ejercicio 5. Considere el campo escalar

$f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0$. $\}$

Determine todas las direcciones para las cuales la derivada direccional de f es nula en el origen.

Respuesta: $\breve{u} = (1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. En el resto, $f'((0, 0), \breve{u}) = a^2/b \neq 0$ (con $\breve{u} = (a, b)$, $b \neq 0$).

Planteo: la derivada direccional en A = (0, 0) según el versor $\breve{u} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, sale por definición: $f'(A, \breve{u}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t}$. Como f tiene dos fórmulas, primero fijate cuál corresponde a los puntos (ta, tb): eso depende de si tb es cero, o sea de si b = 0.

Caso b ≠ 0: para $t \neq 0$ es $tb \neq 0$, así que $f(ta, tb) = \frac{t^2a^2}{tb} = t\cdot\frac{a^2}{b}$. El cociente incremental queda $(t\cdot a^2/b - 0)/t = a^2/b$, que no depende de t: $f'(A, \breve{u}) = \frac{a^2}{b}$.

Caso b = 0 ($\breve{u} = (1, 0)$ o $(-1, 0)$): los puntos (ta, 0) están sobre el eje x, donde f vale 0 por definición. El cociente es $(0 - 0)/t = 0$ y $f'(A, \breve{u}) = 0$.

Derivada en cada dirección: $f'(A, \breve{u}) = a^2/b$ si $b \neq 0$ y 0 si b = 0 (existe en toda dirección).

Planteo: buscamos los versores $\breve{u} = (a, b)$ con $f'(A, \breve{u}) = 0$.

Si b = 0: la derivada vale 0 siempre, así que sirven $\breve{u} = (1, 0)$ y $\breve{u} = (-1, 0)$.

Si b ≠ 0: $a^2/b = 0 \Leftrightarrow a = 0$, y con $a^2 + b^2 = 1$ queda $b = \pm 1$: $\breve{u} = (0, 1)$ y $\breve{u} = (0, -1)$.

Resultado: son exactamente cuatro direcciones, las de los ejes: **$\breve{u}$ = (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1)**. En cualquier otra dirección $f'(A, \breve{u}) = a^2/b \neq 0$ (positiva si $b > 0$, negativa si $b < 0$).

Trampa: no uses $f'(A, \breve{u}) = \nabla f(A)\cdot\breve{u}$. Como $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, esa fórmula daría 0 en todas las direcciones, y en realidad, por ejemplo, $f'(A, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)) = (1/2)/(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 \neq 0$. La fórmula del gradiente vale sólo si f es diferenciable, y esta f ni siquiera es continua en el origen: sobre la parábola $y = x^2$ ($x \neq 0$) vale $f = x^2/x^2 = 1$, que no tiende a $f(0, 0) = 0$. Otro error típico es olvidarse del caso b = 0 (ahí se usa la segunda fórmula) y perder las direcciones $(\pm 1, 0)$.

1/6/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ax^2 + by^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = x^2 + xy - x - y^2 - 2y + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

> **Respuesta:** $a = -1$, $b = 1$. En (1, 1) no hay extremo relativo: $\det Hf(1, 1) = -1 < 0$, es punto silla ($f(1, 1) = 1$).
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** como g es C^2, su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1) tiene el mismo valor, las mismas derivadas primeras y las mismas derivadas segundas que g en ese punto. Así que todo lo que necesitamos de g lo sacamos derivando p_2 y evaluando en (1, 1).
> **Datos de g:** $g(1, 1) = p_2(1, 1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 2 + 3 = 1$. $\nabla p_2 = (2x + y - 1, x - 2y - 2)$, así que $\nabla g(1, 1) = (2, -3)$. $Hp_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (constante), así que $Hg(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
> **Punto crítico:** $f = g + ax^2 + by^3$ es C^2 (suma de C^2). $\nabla f(1, 1) = \nabla g(1, 1) + (2a \cdot 1, 3b \cdot 1^2) = (2 + 2a, -3 + 3b) = \vec{0}$, así que **$a = -1$** y **$b = 1$**.
> **Hessiano de f:** $Hf(1, 1) = Hg(1, 1) + \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 6b \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 1 \\ 1 & -2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 0 \cdot 4 - 1 = -1 < 0$.
> **Conclusión:** $\det Hf < 0$, así que (1, 1) es un **punto silla**: **no hay extremo relativo**. (El valor ahí es $f(1, 1) = g(1, 1) - 1 + 1 = 1$, pero no es extremo.)
> **Trampa:** la derivada segunda de by^3 es $6by$ y se evalúa en $y = 1$; no te quedes con 3b. Y que f''_{xx} dé 0 no importa: el determinante es negativo y eso ya alcanza para decir silla.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x + y), \sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x + y > 0, x^2 + 4y^2 \le 4\}$: la elipse cerrada $x^2/4 + y^2 \le 1$ cortada por el semiplano abierto $x + y > 0$. $\text{int } D = \{x + y > 0, x^2 + 4y^2 < 4\}$. $\partial D = \{x^2 + 4y^2 = 4, x + y \ge 0\} \cup \{y = -x, -2/\sqrt{5} \le x \le 2/\sqrt{5}\}$. b) D no es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de las componentes. El ln pide $x + y > 0$; la raíz pide $x^2 + 4y^2 \le 4$, o sea $x^2/4 + y^2 \le 1$: elipse cerrada centrada en el origen, semieje 2 en x y 1 en y.
> **Cortes de la recta $y = -x$ con la elipse:** reemplazando queda $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5}$: puntos $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ ($2/\sqrt{5} \approx 0{,}89$).
> **a) D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, x^2 + 4y^2 \le 4\}$: la parte de la elipse que queda estrictamente del lado $x + y > 0$ de la recta (contiene a (2, 0) y (0, 1)). **Gráfico:** el arco de elipse de $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ a $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ pasando por (0, 1) y (2, 0) en trazo lleno; la cuerda sobre $y = -x$ en punteado; los dos extremos huecos.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : x + y > 0, x^2 + 4y^2 < 4\}$ (sin el arco).
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + 4y^2 = 4, x + y \ge 0\} \cup \{y = -x, -2/\sqrt{5} \le x \le 2/\sqrt{5}\}$: el arco con sus extremos más la cuerda. El arco sin los extremos está en D; la cuerda no.

b) ¿Abierto? No: $(2, 0) \in D$ (está sobre el borde de la elipse y cumple $x + y > 0$), y toda bola centrada ahí tiene puntos $(2 + \varepsilon, 0)$ afuera de la elipse.
¿Cerrado? No: $(0, 0)$ es punto frontera (los puntos $(\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ no) y no es de D porque anula el argumento del ln. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
¿Acotado? Sí: $x^2 + y^2 \le x^2 + 4y^2 \le 4$, así que $\|(x, y)\| \le 2$ en todo D.
¿Conexo? Sí: la elipse llena y el semiplano son convexos, su intersección es convexa, y todo convexo es arcoconexo (el segmento que une dos puntos queda adentro).
Trampa: el borde de la elipse entra (la raíz admite 0) y la recta no (el ln no admite 0). Por eso D no es ni abierto ni cerrado: no son opuestos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(1, 2)$. Calcule mediante una aproximación lineal $f(1.1, 1.95)$.

Respuesta: $z_0 = -3$, $\nabla f = (4, -1)$. $f(1.1, 1.95) \approx -2.55$.

Planteo: $F(x, y, z) = (x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z)$. El enunciado da sólo el punto $(1, 2)$ del dominio de f: el z_0 hay que buscarlo.
Punto: en $(x, y) = (1, 2)$ queda $0 \cdot z + \ln(4 + z) = 0$, o sea $4 + z = 1$, $\mathbf{z_0 = -3}$. $P = (1, 2, -3)$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0$ por construcción ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{2x + y + z > 0\}$ y P está ahí $(2 + 2 - 3 = 1 > 0)$ ✓. (3) $F_z = (x^2 - 1) + \dfrac{1}{2x + y + z}$, $F_z(P) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $(1, 2)$, con $f(1, 2) = -3$.
Derivadas: $F_x = 2xz + \dfrac{2}{2x + y + z}$, $F_x(P) = -6 + 2 = -4$. $F_y = \dfrac{1}{2x + y + z}$, $F_y(P) = 1$. $f_x = -F_x/F_z = 4$, $f_y = -F_y/F_z = -1$.
Aproximación lineal: f es diferenciable en $(1, 2)$, así que $f(x, y) \approx f(1, 2) + f_x\Delta x + f_y\Delta y$, con $\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$, $\Delta y = 1.95 - 2 = -0.05$.
Resultado: $f(1.1, 1.95) \approx -3 + 4(0.1) + (-1)(-0.05) = -3 + 0.4 + 0.05 = -2.55$.
Trampa: no saltees el cálculo de z_0 (ni el chequeo de que el argumento del ln es positivo): sin el punto en $\mathbb{R}^3$ no podés evaluar ninguna derivada. Y fijate el signo del incremento negativo.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $2x - 3y = 1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en el punto $(2, 1)$;
b) la derivada direccional de f en $(2, 1)$ en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(2, 1)$.

Respuesta: $\nabla f(2, 1) = (-4, 6)$.

Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en $(2, 1)$, y vale la fórmula $f'((2, 1), \check{v}) = \nabla f(2, 1) \cdot \check{v}$.
Gradiente ⊥ curva de nivel: si $g(t)$ es una parametrización de la curva de nivel $f = 2$ con $g(0) = (2, 1)$, entonces $f(g(t)) = 2$ para todo t; derivando con la regla de la cadena, $\nabla f(2, 1) \cdot g'(0) = 0$. O sea $\nabla f(2, 1)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel.
Dirección de la recta: La recta $2x - 3y = 1$ pasa por $(2, 1)$ (se verifica reemplazando) y su normal es $(2, -3)$; un director es $(3, 2)$. Entonces $\nabla f(2, 1) = \lambda(2, -3)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
Uso de la derivada direccional: $f'((2, 1), \check{v}) = \lambda(2, -3) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (2 - 3)\lambda/\sqrt{2} = -\lambda/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, de donde $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Resultado: $\nabla f(2, 1) = (-4, 6)$. Control: $(-4, 6) \cdot (3, 2) = 0$ ✓ y $(-4 + 6)/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ✓.
Trampa: el director de la recta, $(3, 2)$, no es el gradiente: el gradiente es la normal de la recta. Además λ puede salir negativo; no lo fuerces a positivo.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$x^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en $(1, 1, 1)$ con el plano tangente a Σ en $(1, 1, 2)$.

Respuesta: Recta: $(1, 1, 1) + \lambda(-3, -1, 2)$; plano tangente: $2x + 2y - z = 2$; se cortan en **$(7/10, 9/10, 6/5)$**.

Planteo: $F_1 = x^2 - xy + z - 1$ y $F_2 = xy + z^2 - 2$; $(1, 1, 1)$ cumple las dos ($1 - 1 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2$).
Tangente a Γ: $\nabla F_1 = (2x - y, -x, 1) \to (1, -1, 1)$; $\nabla F_2 = (y, x, 2z) \to (1, 1, 2)$. Son C^1 y no paralelos (curva regular en el punto). $\vec{T} = (1, -1, 1) \times (1, 1, 2) = ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 1\cdot 2, 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = (-3, -1, 2)$. Recta tangente: $(x, y, z) = (1 - 3\lambda, 1 - \lambda, 1 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Parámetros del punto en Σ: $u + v = 1$ y $u - v = 1 \Rightarrow u = 1, v = 0$; control: $2\cdot 1^2 + 2\cdot 0^2 = 2$ ✓.
Normal a Σ: $\vec{X}_u = (1, 1, 4u) \to (1, 1, 4)$; $\vec{X}_v = (1, -1, 4v) \to (1, -1, 0)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot 0 - 4\cdot(-1), 4\cdot 1 - 1\cdot 0, 1\cdot(-1) - 1\cdot 1) = (4, 4, -2) \parallel (2, 2, -1)$, no nulo: Σ es regular ahí.
Plano tangente: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea **$2x + 2y - z = 2$**. Control: $x^2 + y^2 = 2u^2 + 2v^2 = z$, así que Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, cuyo plano tangente en $(1, 1)$ es $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, el mismo.
Corte: $2(1 - 3\lambda) + 2(1 - \lambda) - (1 + 2\lambda) = 3 - 10\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1/10$.
Resultado: $(1 - 3/10, 1 - 1/10, 1 + 2/10) =$ **$(7/10, 9/10, 6/5)$**.
Trampa: evaluar $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ en $(1, 1)$ (las coordenadas x, y del punto) en lugar de en $(u, v) = (1, 0)$.

1/6/24, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x - y), \sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$: la elipse cerrada $x^2 + y^2/4 \leq 1$ cortada por el semiplano abierto $x - y > 0$. $\text{int } D = \{x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 < 4\}$. $\partial D = \{4x^2 + y^2 = 4,\ x - y \geq 0\} \cup \{y = x,\ -2/\sqrt{5} \leq x \leq 2/\sqrt{5}\}$. b) D no es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de las componentes. El ln pide $x - y > 0$; la raíz pide $4x^2 + y^2 \leq 4$, o sea $x^2 + y^2/4 \leq 1$: elipse cerrada centrada en el origen, semieje 1 en x y 2 en y.
> **Cortes de la recta y = x con la elipse:** reemplazando queda $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5}$: puntos $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ $(2/\sqrt{5} \approx 0{,}89)$.
> **a) D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$: la parte de la elipse que queda estrictamente del lado $x - y > 0$ de la recta (contiene a (1, 0) y (0, –2)). **Gráfico:** el arco de elipse de $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ a $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ pasando por (1, 0) y (0, –2) en trazo lleno; la cuerda sobre y = x en punteado; los dos extremos huecos.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 < 4\}$ (sin el arco).
> **Frontera:** $\partial D = \{4x^2 + y^2 = 4,\ x - y \geq 0\} \cup \{y = x,\ -2/\sqrt{5} \leq x \leq 2/\sqrt{5}\}$: el arco con sus extremos más la cuerda. El arco sin los extremos está en D; la cuerda no.
> **b) ¿Abierto?** No: $(0, -2) \in D$ (está sobre el borde de la elipse y cumple $x - y > 0$), y toda bola centrada ahí tiene puntos $(0, -2 - \varepsilon)$ afuera de la elipse.
> **¿Cerrado?** No: (0, 0) es punto frontera (los puntos $(\varepsilon, -\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, \varepsilon)$ no) y no es de D porque anula el argumento del ln. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
> **¿Acotado?** Sí: $x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 4$, así que $\|(x, y)\| \leq 2$ en todo D.
> **¿Conexo?** Sí: la elipse llena y el semiplano son convexos, su intersección es convexa, y todo convexo es arcoconexo (el segmento que une dos puntos queda adentro).
> **Trampa:** el borde de la elipse entra (la raíz admite 0) y la recta no (el ln no admite 0). Por eso D no es ni abierto ni cerrado: no son opuestos.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ay^2 + bx^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = y^2 + xy - y - x^2 - 2x + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

> **Respuesta:** $a = -1$, $b = 1$. En (1, 1) no hay extremo relativo: $\det Hf(1, 1) = -1 < 0$, es punto silla ($f(1, 1) = 1$).
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** como g es C^2, su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1) tiene el mismo valor, las mismas derivadas primeras y las mismas derivadas segundas que g en ese punto. Así que todo lo que necesitamos de g lo sacamos derivando p_2 y evaluando en (1, 1).
> **Datos de g:** $g(1, 1) = p_2(1, 1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 2 + 3 = 1$. $\nabla p_2 = (y - 2x - 2, 2y + x - 1)$, así que $\nabla g(1, 1) =$

(−3, 2). $Hp_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (constante), así que $Hg(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Punto crítico: $f = g + ay^2 + bx^3$ es C^2 (suma de C^2). $\nabla f(1, 1) = \nabla g(1, 1) + (3b\cdot 1^2, 2a\cdot 1) = (-3 + 3b, 2 + 2a) = \vec{0}$, así que **a = −1** y **b = 1**.

Hessiano de f: $Hf(1, 1) = Hg(1, 1) + \begin{pmatrix} 6b\cdot 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 & 1 \\ 1 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = 4\cdot 0 - 1 = -1 < 0$.

Conclusión: $\det Hf < 0$, así que (1, 1) es un **punto silla**: **no hay extremo relativo**. (El valor ahí es $f(1, 1) = g(1, 1) - 1 + 1 = 1$, pero no es extremo.)

Trampa: la derivada segunda de bx^3 es $6bx$ y se evalúa en $x = 1$; no te quedes con $3b$. Y que f''_{yy} dé 0 no importa: el determinante es negativo y eso ya alcanza para decir silla.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$(y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z) = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (2, 1). Calcule mediante una aproximación lineal $f(1.95, 1.1)$.

Respuesta: $z_0 = -3$, $\nabla f = (-1, 4)$. $f(1.95, 1.1) \approx -2.55$.

Planteo: $F(x, y, z) = (y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z)$. El enunciado da sólo el punto (2, 1) del dominio de f: el z_0 hay que buscarlo.

Punto: en $(x, y) = (2, 1)$ queda $0\cdot z + \ln(4 + z) = 0$, o sea $4 + z = 1$, **$z_0 = -3$**. $P = (2, 1, -3)$.

Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0$ por construcción ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{2y + x + z > 0\}$ y P está ahí $(2 + 2 - 3 = 1 > 0)$ ✓. (3) $F_z = (y^2 - 1) + \dfrac{1}{2y + x + z}$, $F_z(P) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (2, 1), con $f(2, 1) = -3$.

Derivadas: $F_x = \dfrac{1}{2y + x + z}$, $F_x(P) = 1$. $F_y = 2yz + \dfrac{2}{2y + x + z}$, $F_y(P) = -6 + 2 = -4$. $f_x = -F_x/F_z = -1$, $f_y = -F_y/F_z = 4$.

Aproximación lineal: f es diferenciable en (2, 1), así que $f(x, y) \approx f(2, 1) + f_x\Delta x + f_y\Delta y$, con $\Delta x = 1.95 - 2 = -0.05$, $\Delta y = 1.1 - 1 = 0.1$.

Resultado: $f(1.95, 1.1) \approx -3 + (-1)(-0.05) + 4(0.1) = -3 + 0.05 + 0.4 = -2.55$.

Trampa: no saltees el cálculo de z_0 (ni el chequeo de que el argumento del ln es positivo): sin el punto en $\mathbb{R}^3$ no podés evaluar ninguna derivada. Y fijate el signo del incremento negativo.

Ejercicio 4. Sea f(x, y) una función de clase C^1 tal que:

a) la recta de ecuación $3x - 2y = -1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = -2$ en el punto (1, 2);

b) la derivada direccional de f en (1, 2) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $-\sqrt{2}$.

Calcule $\nabla f(1, 2)$.

Respuesta: $\nabla f(1, 2) = (-6, 4)$.

Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en (1, 2), y vale la fórmula $f'((1, 2), \check{v}) = \nabla f(1, 2) \cdot \check{v}$.

Gradiente ⊥ curva de nivel: si g(t) es una parametrización de la curva de nivel $f = -2$ con $g(0) = (1, 2)$, entonces $f(g(t)) = -2$ para todo t; derivando con la regla de la cadena, $\nabla f(1, 2) \cdot g'(0) = 0$. O sea $\nabla f(1, 2)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel.

Dirección de la recta: La recta $3x - 2y = -1$ pasa por (1, 2) (se verifica reemplazando) y su normal es (3, −2); un director es (2, 3). Entonces $\nabla f(1, 2) = \lambda(3, -2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uso de la derivada direccional: $f'((1, 2), \check{v}) = \lambda(3, -2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (3 - 2)\lambda/\sqrt{2} = \lambda/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, de

donde **$\lambda = -2$**.

Resultado: $\nabla f(1, 2) = (-6, 4)$. Control: $(-6, 4) \cdot (2, 3) = 0$ ✓ y $(-6 + 4)/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ ✓.

Trampa: el director de la recta, $(2, 3)$, no es el gradiente: el gradiente es la normal de la recta. Además λ puede salir negativo; no lo fuerces a positivo.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones

$y^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$

y Σ la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, v - u, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Halle la intersección de la recta tangente a Γ en $(1, 1, 1)$ con el plano tangente a Σ en $(1, 1, 2)$.

Respuesta: Recta: $(1, 1, 1) + \lambda(1, 3, -2)$; plano tangente: $2x + 2y - z = 2$; se cortan en **$(9/10, 7/10, 6/5)$**.

Planteo: $F_1 = y^2 - xy + z - 1$ y $F_2 = xy + z^2 - 2$; $(1, 1, 1)$ cumple las dos $(1 - 1 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2)$.

Tangente a Γ: $\nabla F_1 = (-y, 2y - x, 1) \to (-1, 1, 1)$; $\nabla F_2 = (y, x, 2z) \to (1, 1, 2)$. Son C^1 y no paralelos (curva regular en el punto). $\vec{T} = (-1, 1, 1) \times (1, 1, 2) = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (1, 3, -2)$. Recta tangente: $(x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + 3\lambda, 1 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Parámetros del punto en Σ: $u + v = 1$ y $v - u = 1 \Rightarrow u = 0$, $v = 1$; control: $2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 = 2$ ✓.

Normal a Σ: $\vec{X}_u = (1, -1, 4u) \to (1, -1, 0)$; $\vec{X}_v = (1, 1, 4v) \to (1, 1, 4)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = ((-1) \cdot 4 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = (-4, -4, 2) \parallel (2, 2, -1)$, no nulo: Σ es regular ahí.

Plano tangente: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea **$2x + 2y - z = 2$**. Control: $(u + v)^2 + (v - u)^2 = 2u^2 + 2v^2 = z$, así que Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con el mismo plano tangente en $(1, 1, 2)$.

Corte: $2(1 + \lambda) + 2(1 + 3\lambda) - (1 - 2\lambda) = 3 + 10\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -1/10$.

Resultado: $(1 - 1/10, 1 - 3/10, 1 + 2/10) =$ **$(9/10, 7/10, 6/5)$**.

Trampa: evaluar $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ en $(1, 1)$ en lugar de en $(u, v) = (0, 1)$; o derivar mal $y^2 - xy$ respecto de y (es $2y - x$).

13/5/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

> **Respuesta:** $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, y fuera del origen $f'_x = \operatorname{sen} y\ (3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$, $f'_y = x[(x^2 + 3y^2) \cos y - 6y \operatorname{sen} y]/(x^2 + 3y^2)^2$: existen en todo punto. f no es continua en (0, 0): por $y = mx$ el límite es $m/(1 + 3m^2)$ (0 por $y = 0$, 1/4 por $y = x$).
>
> **Parciales fuera del origen:** si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, en un entorno de ese punto que no contiene al origen $f = x \operatorname{sen} y/(x^2 + 3y^2)$, cociente de funciones C^1 con denominador distinto de 0 ($x^2 + 3y^2 = 0$ sólo en el origen). Ahí las parciales existen y salen con la regla del cociente: $f'_x = [\operatorname{sen} y\ (x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 2x]/(x^2 + 3y^2)^2 = \operatorname{sen} y\ (3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$ y $f'_y = [x \cos y\ (x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 6y]/(x^2 + 3y^2)^2$.
> **Parciales en el origen (por definición, no con las fórmulas):** $f(h, 0) = h \operatorname{sen} 0/h^2 = 0$ y $f(0, k) = 0 \cdot \operatorname{sen} k/(3k^2) = 0$. Entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} (f(h, 0) - f(0, 0))/h = \lim 0/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} (f(0, k) - f(0, 0))/k = 0$. **Existen en todo punto.**
> **Continuidad en (0, 0):** $f(0, 0) = 0$; busco dos caminos con límites distintos. Sobre la recta $y = mx$, con $x \neq 0$: $f(x, mx) = x \operatorname{sen}(mx)/((1 + 3m^2)x^2) = \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + 3m^2} \to m/(1 + 3m^2)$, porque $\operatorname{sen}(mx)/x \to m$.
> **Dos caminos:** por $y = 0$ ($m = 0$) el límite es 0 y por $y = x$ ($m = 1$) es 1/4. Dan distinto, así que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y **f no es continua en (0, 0)**.
> **Trampa:** en $\mathbb{R}^2$ la existencia de las derivadas parciales no implica continuidad (este ejercicio es justamente el contraejemplo). Y no calcules las parciales en el origen reemplazando (0, 0) en las fórmulas de afuera: ahí no valen (ni siquiera están definidas), tenés que ir al cociente incremental.

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, −4) y la dirección en la cual este valor se produce.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$. Máxima derivada direccional: $\sqrt{109}/4$, en la dirección $\check{v} = (10, -3)/\sqrt{109}$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(2, 1) = (2 - 1^2, -2 \cdot 2 \cdot 1) = (1, -4)$: justo el punto donde se pide la derivada de f.
> **Qué dice p_1:** $p_1(x, y) = h(2, 1) + h_x(2, 1)(x - 2) + h_y(2, 1)(y - 1)$. Como es lineal, sus coeficientes son las derivadas: **$\nabla h(2, 1) = (4, -2)$** ($h(2, 1) = p_1(2, 1) = 7$).
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en (1, −4); $\vec{g}$ es polinómica. Vale la cadena: $\nabla h(2, 1) = \nabla f(1, -4) \cdot D\vec{g}(2, 1)$.
> **Jacobiana:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$, y en (2, 1) da $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, con determinante $-4 - 4 = -8 \neq 0$: el sistema tiene solución única.
> **Sistema:** con $\nabla f(1, -4) = (a, b)$: $(a, b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = (a - 2b, -2a - 4b) = (4, -2)$. De la primera, $a = 4 +$

2b; en la segunda, $-8 - 4b - 4b = -2$, así que $b = -3/4$ y $a = 5/2$. **$\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$**.
Máximo: f diferenciable, entonces $f'((1, -4), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v} \leq \|\nabla f\|$, con igualdad en la dirección de ∇f. $\|\nabla f\| = \sqrt{(25/4 + 9/16)} = \sqrt{(109/16)} = $ **$\sqrt{109}/4$**, y la dirección es **$\check{v} = (5/2, -3/4)/(\sqrt{109}/4) = (10, -3)/\sqrt{109}$**.
Trampa: el 1 de p_1 no es $h(2, 1)$ (es 7): p_1 está escrito en x, y sin centrar. Y en el producto va el gradiente (fila) a la izquierda de la jacobiana; si lo ponés a la derecha te queda otro sistema y otro ∇f.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización
$\vec{X} = (2u^2, u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto $(-1, -1, 1)$.

Respuesta: r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$. Plano tangente: $x + y - z = -3$. Hay un único punto de intersección: $(-10/7, 1/7, 12/7)$.
Σ_2 en cartesianas: $\vec{X} = (2u^2, u, v)$ dice $y = u$, $x = 2u^2$ y z libre: Σ_2 es el cilindro $x = 2y^2$.
El punto: con $y = 1$, $x_0 = 2 \cdot 1^2 = 2$ y, de Σ_1, $z_0 = 1 - x_0 + y^2 = 1 - 2 + 1 = 0$. $P = (2, 1, 0)$.
Parametrización de C: con $y = t$, $x = 2t^2$ y $z = 1 - x + y^2 = 1 - t^2$. $\vec{g}(t) = (2t^2, t, 1 - t^2)$, de clase C^1, con $\vec{g}(1) = P$.
Tangente: $\vec{g}'(t) = (4t, 1, -2t)$, $\vec{g}'(1) = (4, 1, -2) \neq \vec{0}$. Control: $\nabla(x - y^2 + z) = (1, -2y, 1) = (1, -2, 1)$ y $\nabla(x - 2y^2) = (1, -4y, 0) = (1, -4, 0)$ en P; su producto vectorial es $(4, 1, -2)$ ✓. Entonces r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Plano tangente a $xyz = 1$ en $(-1, -1, 1)$: el punto está en la superficie ($(-1)(-1)(1) = 1$ ✓); $H = xyz$ es C^1 y $\nabla H = (yz, xz, xy) = (-1, -1, 1) \neq \vec{0}$. Plano: $-(x + 1) - (y + 1) + (z - 1) = 0$, o sea $x + y - z = -3$.
¿Cuántos puntos? $(4, 1, -2) \cdot (1, 1, -1) = 7 \neq 0$: r_0 no es paralela al plano, así que lo corta en exactamente un punto.
Cuenta: $(2 + 4\lambda) + (1 + \lambda) - (-2\lambda) = -3$, $3 + 7\lambda = -3$, $\lambda = -6/7$.
Resultado: el único punto es **$(-10/7, 1/7, 12/7)$**. Control: $-10/7 + 1/7 - 12/7 = -21/7 = -3$ ✓.
Trampa: "todos los puntos" no quiere decir que haya varios: hay que justificar que es uno solo mirando el producto escalar de la dirección con la normal. Si diera 0, habría que ver si la recta está contenida en el plano (infinitos puntos) o es paralela sin tocarlo (ninguno).

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$.
Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Respuesta: Puntos críticos: $(0, 1)$, punto silla (no hay extremo); $(2, 1)$, mínimo local (con valor $f(2, 1) = 4$).

Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{(x, y): y \neq 0\}$; los extremos locales están entre los puntos con $\nabla f = 0$.
Derivadas: $f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f_y = 4y - 4/y^2$.
Sistema: $f_x = 0$ da $x = 0$ o $x = 2$. $f_y = 0$ da $4y^3 = 4$, $y^3 = 1$, $y = 1$ (única raíz real: $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ y $y^2 + y + 1 > 0$). **Puntos: $(0, 1)$ y $(2, 1)$.**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 4 + 8/y^3$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si

det H = 0 el criterio no decide.

(0, 1): $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, det = −72 < 0: **punto silla**, no hay extremo (f(0, 1) = 8).

(2, 1): $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, det = 72 > 0 y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**, f(2, 1) = 2 + 4 + 8 − 12 + 2 = 4.

Trampa: el término 4/y deriva a $-4/y^2$ y otra vez a $+8/y^3$; un signo mal ahí cambia f_{yy}. Y el mínimo es sólo local: cuando $y \to 0^-$, $4/y \to -\infty$.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función w = f(u, v) de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$.
Sea C es la curva de ecuación
C : f(x + y, 2x − y) = 1.
Halle la recta normal a C en el punto (1, −1).

Respuesta: $F'_w(0, 3, 1) = 6 \neq 0$, $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$. $\nabla\varphi(1, -1) = (-3/2, 0)$. Recta normal a C en (1, −1): (x, y) = (1, −1) + t(1, 0), es decir y = −1.

Planteo: $F(u, v, w) = ve^{uw} + 2vw - 9$. Primero el TFI para f, después la curva C como conjunto de nivel 1 de φ(x, y) = f(x + y, 2x − y).
Hipótesis del TFI: (1) $F(0, 3, 1) = 3e^0 + 6 - 9 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$. (3) $F'_w = uve^{uw} + 2v \to 0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces w = f(u, v) existe y es C^1 en un entorno de (0, 3), con f(0, 3) = 1.
Derivadas de f: $F'_u = vwe^{uw} \to 3$; $F'_v = e^{uw} + 2w \to 3$. $f'_u(0, 3) = -3/6 = -1/2$ y $f'_v(0, 3) = -1/2$.
El punto está en C: (x + y, 2x − y) en (1, −1) da (0, 3), y f(0, 3) = 1 ✓.
Regla de la cadena: la función interna (x + y, 2x − y) es lineal (diferenciable) y f es diferenciable en (0, 3), así que φ es diferenciable en (1, −1) (de hecho C^1 en un entorno) con $\nabla\varphi(1, -1) = (f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2,\ f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot (-1)) = (-1/2 - 1, -1/2 + 1/2) =$ **(−3/2, 0)**.
Normal a C: C es el conjunto de nivel φ = 1, con φ de clase C^1 y $\nabla\varphi(1, -1) \neq \vec{0}$; entonces cerca de (1, −1) C es una curva regular y ∇φ(1, −1) es perpendicular a ella. La recta normal tiene dirección (−3/2, 0) ∥ (1, 0): **(x, y) = (1, −1) + t(1, 0)**, t ∈ ℝ, o sea **y = −1**. (La recta tangente es x = 1.)
Trampa: la normal de la curva es ∇φ en (x, y) = (1, −1), no ∇f(0, 3): hay que pasar por la jacobiana de (x + y, 2x − y). Usar ∇f(0, 3) = (−1/2, −1/2) directamente da la recta y + 1 = x − 1, que está mal.

11/5/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización $\vec{X} = (t^2, 0, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

> **Respuesta:** 1. Un solo punto: $P = \Gamma(0) = (0, 0, 1)$. 2. Plano tangente a Σ en P: $x - y + 2z = 2$.
>
> **1) Planteo:** un punto de Γ es $(t^2, 0, 1 + t)$; está en Σ si $F(t^2, 0, 1 + t) = 0$ con $F(x, y, z) = x^2y + xz - e^y + z^2$.
> **Cuenta:** con $y = 0$, $x^2y = 0$ y $e^0 = 1$: $t^2(1 + t) - 1 + (1 + t)^2 = t^3 + t^2 - 1 + 1 + 2t + t^2 = t^3 + 2t^2 + 2t = t(t^2 + 2t + 2)$.
> **Raíces:** $t = 0$, y $t^2 + 2t + 2 = 0$ no tiene raíces reales (discriminante $4 - 8 = -4 < 0$). Único punto: **$P = (0, 0, 1)$**. Control: $F(0, 0, 1) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$ ✓.
> **2) Hipótesis:** F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomio más exponencial) y Σ es su conjunto de nivel 0; si $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, el plano tangente en P tiene normal $\nabla F(P)$.
> **Gradiente:** $\nabla F = (2xy + z, x^2 - e^y, x + 2z)$; en $(0, 0, 1)$: $\nabla F(P) = (1, -1, 2) \neq \vec{0}$.
> **Plano:** $1\cdot(x - 0) - 1\cdot(y - 0) + 2(z - 1) = 0$, o sea **$x - y + 2z = 2$**.
> **Trampa:** e^y en $y = 0$ vale 1, no 0; si lo ponés en 0 te queda $t^3 + 2t^2 + 2t + 1$ y aparecen raíces que no existen. Y la cuadrática sin raíces reales hay que justificarla con el discriminante, no descartarla en silencio.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. En $(0, 0)$ hay punto silla ($\det H = -36$). En $(-1, 1)$ hay mínimo relativo ($\det H = 36$, $f''_{xx} = 6$), de valor $f(-1, 1) = -1$.
>
> **Planteo:** f es polinómica, así que es C^2 en todo $\mathbb{R}^2$. Por eso un extremo relativo sólo puede estar donde $\nabla f = \vec{0}$, y en cada punto crítico decide el hessiano: $\det H > 0$ y $f''_{xx} > 0$ da mínimo; $\det H > 0$ y $f''_{xx} < 0$ da máximo; $\det H < 0$ da punto silla; $\det H = 0$ no decide.
> **Puntos críticos:** $f'_x = 6x + 6y$, $f'_y = 6x + 6y^2$. De $f'_x = 0$ sale $x = -y$; reemplazando en $f'_y = 0$: $-6y + 6y^2 = 6y(y - 1) = 0$, o sea $y = 0$ o $y = 1$. Puntos críticos: **$(0, 0)$** y **$(-1, 1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 12y$, así que $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix}$ y $\det H = 72y - 36$.
> **En $(0, 0)$:** $\det H = -36 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 0) = 0$).
> **En $(-1, 1)$:** $\det H = 72 - 36 = 36 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(-1, 1) = 3 - 6 + 2 =$ **-1**.
> **Trampa:** en $6y^2 - 6y = 0$ no dividas por y, factorizá: si simplificás perdés el origen. Y con $\det H < 0$ el signo de f''_{xx} no importa: es silla igual.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0, 1)$ se anula.

> **Respuesta:** $\nabla f(0, 1) = (-2, -1)$. La derivada direccional se anula en $\check{v} = \pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = 2xy - \cos(x)\, z + yz^2$, $P = (0, 1, 1)$, queremos $z = f(x, y)$ con $f(0, 1) = 1$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0 - 1 + 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = -\cos x + 2yz$, $F_z(P) = -1 + 2 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $(0, 1)$, con $f(0, 1) = 1$. (Hace falta fijar $f(0, 1) = 1$ porque $F(0, 1, z) = z^2 - z$ se anula también en $z = 0$: por ese otro punto pasa otra función implícita distinta.)
Derivadas: $F_x = 2y + \operatorname{sen}(x)\, z$, $F_x(P) = 2$. $F_y = 2x + z^2$, $F_y(P) = 1$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -2$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -1$. **$\nabla f(0, 1) = (-2, -1)$**.
Derivada direccional: f es diferenciable en $(0, 1)$ y $f'((0, 1), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-2a - b = 0$, $b = -2a$; con $a^2 + b^2 = 1$, $5a^2 = 1$.
Resultado: $\check{v} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
Trampa: la derivada de $-\cos(x)\, z$ respecto de x es $+\operatorname{sen}(x)\, z$ (el menos se cancela con el de la derivada del coseno); acá vale 0 en $x = 0$, pero en otro punto ese signo te cuesta el ejercicio.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(ye^x, x + 2y)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r, s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en $(1, 2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0, 1))$.

Respuesta: $g(0, 1) = -3$, $\nabla g(0, 1) = (-1, -4)$. Plano tangente: $x + 4y + z = 1$. Recta normal: $(x, y, z) = (0, 1, -3) + t(1, 4, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Punto interior: en $(x, y) = (0, 1)$ es $(r, s) = (y\, e^x, x + 2y) = (1, 2)$.
Qué dice L: la aproximación lineal de f en $(1, 2)$ es $L(r, s) = f(1, 2) + f_r(1, 2)(r - 1) + f_s(1, 2)(s - 2)$. Comparando con $1 + 2r - 3s$: **$f(1, 2) = L(1, 2) = 1 + 2 - 6 = -3$** y **$\nabla f(1, 2) = (2, -3)$** (los coeficientes de r y s).
Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en $(1, 2)$; la interior $(y\, e^x, x + 2y)$ es C^∞. Entonces g es diferenciable en $(0, 1)$ y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (0, 1): $r_x = y\, e^x = 1$, $r_y = e^x = 1$; $s_x = 1$, $s_y = 2$.
Cadena: $g_x(0, 1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -1$; $g_y(0, 1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -4$. Y $g(0, 1) = f(1, 2) = -3$.
Plano tangente: $z = -3 - 1 \cdot (x - 0) - 4(y - 1) = 1 - x - 4y$, o sea **$x + 4y + z = 1$**.
Recta normal: un normal al gráfico es $(g_x, g_y, -1) = (-1, -4, -1) \parallel (1, 4, 1)$; por el punto $(0, 1, -3)$: **$(x, y, z) = (0, 1, -3) + t(1, 4, 1)$**, $t \in \mathbb{R}$.
Trampa: $f(1, 2)$ no es 1 (el término independiente de L): hay que evaluar L en $(1, 2)$. Lo mismo al revés: $\nabla f(1, 2)$ son los coeficientes de r y s, no hace falta reescribir L centrada.

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

estudie la continuidad f en $(0, 0)$ y la existencia de $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$.

Respuesta: f no es continua en $(0, 0)$ (por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = x$ es 1). Existen $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$.

Continuidad: f es continua en $(0, 0)$ si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe y vale $f(0, 0) = 0$.

Dos caminos: por el eje x ($y = 0$, $x \neq 0$): $f(x, 0) = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{x^2} = 0 \to 0$. Por la recta $y = x$ ($x \neq 0$): $f(x, x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \to 1$, por el límite notable $\operatorname{sen} u / u \to 1$ con $u = 3x^2 \to 0$.

Conclusión: dos caminos que llegan al origen dan límites diferentes (0 y 1), así que el límite doble **no**

existe y f **no es continua** en (0, 0). (En general, por y = mx se obtiene $3m/(1 + 2m^2)$, que cambia con m.)

Derivadas parciales por definición: para $h \neq 0$, $f(h, 0) = \text{sen } 0/h^2 = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$. Igual, $f(0, k) = \text{sen } 0/(2k^2) = 0$ para $k \neq 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$.

Resultado: f no es continua en el origen, pero existen $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$.

Trampa: las parciales en el origen no se sacan derivando la fórmula y reemplazando (0, 0), porque esa fórmula no vale ahí: se hacen por definición. Y que existan las parciales no dice nada sobre la continuidad: sólo miran a f sobre los ejes, donde acá vale 0.

29/2/24 (libre)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Decida, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

> **Respuesta:** f no es continua en (0, 0): por $y = mx$ vale $m/(2 + m^2)$ (0 por $y = 0$, 1/3 por $y = x$). Por lo tanto no es diferenciable en el origen. Las parciales en el origen existen y valen 0.
>
> **Continuidad, planteo:** $f(0, 0) = 0$. Busco dos caminos con límites distintos.
> **Rectas $y = mx$ ($x \neq 0$):** $f(x, mx) = mx^2/(2x^2 + m^2x^2) = m/(2 + m^2)$. Sobre cada recta f es constante, así que el límite por esa recta es $m/(2 + m^2)$.
> **Dos caminos:** por $y = 0$ vale 0; por $y = x$ vale 1/3. Como son distintos, **no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y f no es continua en (0, 0)**.
> **Diferenciabilidad:** diferenciable implica continua; por el contrarrecíproco, **f no es diferenciable en el origen**.
> **Las parciales sí existen:** $f(h, 0) = 0$ y $f(0, k) = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} 0/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$. Es el ejemplo típico de que tener parciales no alcanza ni siquiera para la continuidad.
> **Trampa:** no cortes después de ver que las parciales existen para escribir el plano tangente $z = 0$: el gráfico no tiene plano tangente en el origen. Y un único camino nunca prueba que el límite existe.

Ejercicio 2. Sean C la curva plana de ecuación $2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x = 6$ y $f(x, y) = xy - y^2$. Halla la derivada direccional de f en (1, –1) en la dirección tangente a C en el punto (1, 2) orientada hacia y^+.

> **Respuesta:** Versor tangente: $(-3/5, 4/5)$. $f'((1, -1), \check{v}) = 3$.
>
> **Ojo con los dos puntos:** la dirección se toma de C en (1, 2), pero la derivada de f se calcula en (1, –1). Son puntos distintos y así está el enunciado.
> **C cerca de (1, 2):** C es el conjunto de nivel 6 de $F(x, y) = 2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x$. (1, 2) está en C: $4 + \ln 1 + 2 = 6$ ✓. F es C^1 donde $x^2 + y^2 > 4$, que es un abierto que contiene a (1, 2) (ahí $x^2 + y^2 - 4 = 1$).
> **Gradiente de F:** $F_x = 2y + 2x/(x^2 + y^2 - 4) + 2$, $F_y = 2x + 2y/(x^2 + y^2 - 4)$. En (1, 2): $F_x = 4 + 2 + 2 = 8$, $F_y = 2 + 4 = 6$. $\nabla F(1, 2) = (8, 6) \neq \vec{0}$, así que por el teorema de la función implícita C es una curva regular cerca de (1, 2) y su tangente es perpendicular a $(8, 6) \parallel (4, 3)$.
> **Versor tangente orientado hacia y^+:** los perpendiculares a (4, 3) son $\pm(3, -4)$; el que tiene componente y positiva es $(-3, 4)$. Normalizado: $\check{v} = (-3/5, 4/5)$.
> **Derivada de f:** $f(x, y) = xy - y^2$ es polinómica, luego diferenciable, y $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$. $\nabla f = (y, x - 2y)$, en (1, –1) vale (–1, 3). Entonces $f'((1, -1), \check{v}) = (-1)(-3/5) + 3 \cdot (4/5) = 3/5 + 12/5 = \mathbf{3}$.
> **Trampa:** la derivada direccional se hace con un **versor** (dividir por 5) y con la orientación pedida: con $(3, -4)/5$ daría –3.

Ejercicio 3. Sea f un campo escalar de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto (3, –1) es $p(u, v) = -1 - 3v + uv + u^2 - 3v^2$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y - xy)$ en el punto $(2, 1, g(2, 1))$.

Respuesta: $g(2, 1) = 5$, $\nabla g(2, 1) = (14, -16)$. Plano tangente: $z = 5 + 14(x - 2) - 16(y - 1)$, o sea $14x - 16y - z = 7$.

Datos de f: el Taylor de orden 2 en $(3, -1)$ coincide con f en valor y derivadas (hasta orden 2) en ese punto. Como está desarrollado, se evalúa y se deriva: $f(3, -1) = p(3, -1) = -1 + 3 - 3 + 9 - 3 = 5$; $p'_u = v + 2u \to -1 + 6 = 5$; $p'_v = -3 + u - 6v \to -3 + 3 + 6 = 6$. **$\nabla f(3, -1) = (5, 6)$**.
El punto interior: $(x^2 - y^2, y - xy)$ en $(2, 1)$ da $(4 - 1, 1 - 2) = (3, -1)$ ✓. Entonces $g(2, 1) = 5$.
Hipótesis: f es C^2 (en particular diferenciable) y la interior es polinómica: g es diferenciable en $(2, 1)$, tiene plano tangente y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (2, 1): $u = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (4, -2)$; $v = y - xy$ da $(-y, 1 - x) = (-1, -1)$.
Cuenta: $g'_x = 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) = 14$; $g'_y = 5 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) = -16$.
Resultado: $z = 5 + 14(x - 2) - 16(y - 1)$, es decir **$14x - 16y - z = 7$**. Control: $28 - 16 - 5 = 7$ ✓.
Trampa: no leas $f'_u(3, -1)$ como el coeficiente de u en p (que es 0): eso sería la derivada en el origen. Primero derivás p, después evaluás en $(3, -1)$.

Ejercicio 4. Demuestre que el sistema
$\{ x - yz - \cos(yz) = 0 \; ; \; x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3 = 0 \}$
define una curva regular C en un entorno del punto $P = (1, 0, 2)$, y halle la intersección de la recta tangente a C en P con el plano de ecuación $2y - x + z = 5$.

Respuesta: C es regular cerca de P ($\partial(F_1, F_2)/\partial(y, z) = -2 \neq 0$). Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, -4)$; corta al plano en $(-1, -1, 6)$.

P está en C: $F_1(P) = 1 - 0 - \cos 0 = 0$ y $F_2(P) = 1 + 0 + 2 - 0 - 3 = 0$ ✓.
Hipótesis del teorema (TFI para sistemas): $F_1 = x - yz - \cos(yz)$ y $F_2 = x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomios y coseno). Gradientes: $\nabla F_1 = (1, -z + z\,\mathrm{sen}(yz), -y + y\,\mathrm{sen}(yz))$, que en P vale $(1, -2, 0)$; $\nabla F_2 = (2x + z, 3y^2 - z^2, x - 2yz)$, que en P vale $(4, -4, 1)$. El jacobiano respecto de (y, z) en P es $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$.
Conclusión: existen un entorno de $x = 1$ y funciones $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ de clase C^1, con $\varphi(1) = 0$ y $\psi(1) = 2$, tales que cerca de P las soluciones del sistema son exactamente los puntos $(x, \varphi(x), \psi(x))$. Esa parametrización es C^1 y su derivada $(1, \varphi', \psi')$ nunca es nula: **C es una curva regular en un entorno de P**.
Vector tangente: $\vec{T} = \nabla F_1(P) \times \nabla F_2(P) = (1, -2, 0) \times (4, -4, 1) = ((-2) \cdot 1 - 0 \cdot (-4), 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 4) = (-2, -1, 4)$, que es paralelo a $(2, 1, -4)$. Control derivando el sistema respecto de x en P: $1 - 2\varphi' = 0$ y $4 - 4\varphi' + \psi' = 0$ dan $\varphi'(1) = 1/2$ y $\psi'(1) = -2$, o sea $(1, 1/2, -2) \parallel (2, 1, -4)$ ✓.
Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, -4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Corte con $2y - x + z = 5$: $(2, 1, -4) \cdot (-1, 2, 1) = -4 \neq 0$, hay un único punto. Reemplazando: $2\lambda - (1 + 2\lambda) + (2 - 4\lambda) = 5$, o sea $1 - 4\lambda = 5$ y $\lambda = -1$.
Resultado: $(-1, -1, 6)$. Control: $-2 + 1 + 6 = 5$ ✓.
Trampa: "demuestre que define una curva regular" no se contesta con el producto vectorial suelto: hay que nombrar el teorema, decir que F_1 y F_2 son C^1, que P cumple el sistema y que un menor 2×2 del jacobiano es no nulo (equivalente a que los gradientes no sean paralelos). Y al derivar cos(yz) va la regla de la cadena: su gradiente es $-\mathrm{sen}(yz) \cdot (0, z, y)$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ y determine en qué puntos del disco se producen dichos extremos absolutos. .

Respuesta: Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; mínimo absoluto $-\sqrt{2}$ en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Existencia (Weierstrass): el disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es cerrado (contiene su borde) y acotado, o sea compacto, y f es continua (polinomio). Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en D.
Interior: $\nabla f = (1, 1) \neq \vec{0}$ en todo punto, así que no hay puntos críticos en el interior: los extremos tienen que estar en la frontera $x^2 + y^2 = 1$.
Regularidad de la restricción: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\nabla g = (2x, 2y)$, que sólo se anula en (0, 0), que no está en la circunferencia. Vale Lagrange en todos sus puntos.
Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$ da $1 = 2\lambda x$ y $1 = 2\lambda y$. Tiene que ser $\lambda \neq 0$, así que $x = y = 1/(2\lambda)$. Reemplazando en $x^2 + y^2 = 1$: $2x^2 = 1$, $x = \pm\sqrt{2}/2$. Candidatos $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. La circunferencia es una curva cerrada, sin puntas de tramo que agregar.
Comparación: $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ y $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$.
Resultado: máximo absoluto **$\sqrt{2}$** en **$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$**; mínimo absoluto **$-\sqrt{2}$** en **$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$**.
Control: con $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ queda $f = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$, que recorre $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ✓.
Trampa: "∇f nunca se anula, entonces no hay extremos" está mal: eso sólo descarta el interior. Por Weierstrass los extremos existen, y están en el borde.

12/12/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0. \}$

a) Analice la existencia de derivadas direccionales y parciales de f en el origen.

b) Halle las direcciones para las cuales las derivadas direccionales de f en el origen resultan nulas.

> **Respuesta:** a) Existen en toda dirección: con $\check{u} = (a, b)$ versor, $f'((0, 0), \check{u}) = a^2/b$ si $b \neq 0$ y 0 si $b = 0$; $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. b) Se anulan sólo en $\check{u} = (1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
>
> **a) Planteo:** la derivada direccional en $A = (0, 0)$ según el versor $\check{u} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, sale por definición: $f'(A, \check{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t}$. Como f tiene dos fórmulas, primero fijate cuál corresponde a los puntos (ta, tb): eso depende de si tb es cero, o sea de si $b = 0$.
>
> **Caso $b \neq 0$:** para $t \neq 0$ es $tb \neq 0$, así que $f(ta, tb) = \frac{t^2a^2}{tb} = t \cdot \frac{a^2}{b}$. El cociente incremental queda $(t \cdot a^2/b - 0)/t = a^2/b$, que no depende de t: $f'(A, \check{u}) = \frac{a^2}{b}$.
>
> **Caso $b = 0$** ($\check{u} = (1, 0)$ o $(-1, 0)$): los puntos $(ta, 0)$ están sobre el eje x, donde f vale 0 por definición. El cociente es $(0 - 0)/t = 0$ y $f'(A, \check{u}) = 0$.
>
> **Conclusión a):** existen las derivadas direccionales de f en el origen en **todas** las direcciones: $f'(A, \check{u}) = a^2/b$ si $b \neq 0$ y $f'(A, \check{u}) = 0$ si $b = 0$. Las parciales son dos casos particulares: $f'_x(0, 0) = f'(A, (1, 0)) = 0$ (caso $b = 0$) y $f'_y(0, 0) = f'(A, (0, 1)) = 0^2/1 = 0$.
>
> **b) Planteo:** buscamos los versores $\check{u} = (a, b)$ con $f'(A, \check{u}) = 0$.
>
> **Si $b = 0$:** la derivada vale 0 siempre, así que sirven $\check{u} = (1, 0)$ y $\check{u} = (-1, 0)$.
>
> **Si $b \neq 0$:** $a^2/b = 0 \Leftrightarrow a = 0$, y con $a^2 + b^2 = 1$ queda $b = \pm 1$: $\check{u} = (0, 1)$ y $\check{u} = (0, -1)$.
>
> **Resultado:** son exactamente cuatro direcciones, las de los ejes: **$\check{u} = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$**. En cualquier otra dirección $f'(A, \check{u}) = a^2/b \neq 0$ (positiva si $b > 0$, negativa si $b < 0$).
>
> **Trampa:** no uses $f'(A, \check{u}) = \nabla f(A) \cdot \check{u}$. Como $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, esa fórmula daría 0 en todas las direcciones, y en realidad, por ejemplo, $f'(A, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)) = (1/2)/(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 \neq 0$. La fórmula del gradiente vale sólo si f es diferenciable, y esta f ni siquiera es continua en el origen: sobre la parábola $y = x^2$ ($x \neq 0$) vale $f = x^2/x^2 = 1$, que no tiende a $f(0, 0) = 0$. Otro error típico es olvidarse del caso $b = 0$ (ahí se usa la segunda fórmula) y perder las direcciones $(\pm 1, 0)$.

Ejercicio 2. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (2,1) de cierto campo escalar $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $P(u, v) = 1 - u - v + u^2 - 2v^2$. Si $\vec{f}(x, y) = (x + y, e^{x+3y})$, halle una ecuación para el plano tangente a la gráfica de $h(x, y) = (g \circ \vec{f})(x, y)$ en $(3, -1, h(3, -1))$. Justifique todos sus cálculos.

> **Respuesta:** $g(2, 1) = 0$, $\nabla g(2, 1) = (3, -5)$; $h(3, -1) = 0$, $\nabla h(3, -1) = (-2, -12)$. Plano tangente: $2x + 12y + z = -6$.
>
> **Punto imagen:** $\vec{f}(3, -1) = (3 - 1, e^{3-3}) = (2, 1)$, donde está centrado el Taylor de g.
>
> **Qué da el Taylor:** $g \in C^3$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $h(3, -1) = g(2, 1) = P(2, 1) = 1 - 2 - 1 + 4 - 2 =$ **0**. $\nabla P(u, v) = (-1 + 2u, -1 - 4v)$, y en (2, 1): **$\nabla g(2, 1) = (3, -5)$**.
>
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es C^1 y g es diferenciable en (2, 1); entonces $h = g \circ \vec{f}$ es diferenciable en (3, –1) y vale la

regla de la cadena.

Cadena: $D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{x+3y} & 3e^{x+3y} \end{pmatrix}$, en $(3, -1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. $\nabla h(3, -1) = (3, -5)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (3 - 5, 3 - 15) =$ **$(-2, -12)$**.

Plano tangente: $z = 0 - 2(x - 3) - 12(y + 1)$, o sea **$2x + 12y + z = -6$**. Control con el punto $(3, -1, 0)$: $6 - 12 + 0 = -6$ ✓.

Trampa: olvidarse del factor 3 que sale al derivar e^{x+3y} respecto de y (la cadena interna), o leer $\nabla g(2, 1) = (-1, -1)$ de los coeficientes lineales de P, que no está centrado en $(2, 1)$.

Ejercicio 3. Considere la curva C, definida por la intersección de la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + zy$ que pasa por el punto $(-1, 1, 2)$ y la superficie imagen de $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u^2, -2u + v)$, con $(u, v) \in [-2, 2] \times [-1, 1]$. Halle una ecuación para la recta tangente a C en el punto $(-1, 1, 2)$.

Respuesta: Recta tangente: $(x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(1, -2, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La superficie de nivel: $F(-1, 1, 2) = 1 + 2\cdot 1 = 3$, así que S_1: $x^2 + zy = 3$.
¿Qué (u, v) da el punto? $\vec{\Gamma}(u, v) = (-1, 1, 2)$ pide $u^2 = 1$ y $-2u + v = 2$. Con $u = 1$ sale $v = 4$, fuera de $[-1, 1]$ (y además $u + v^2 = 17 \neq -1$); con $u = -1$ sale $v = 0$ y $u + v^2 = -1$ ✓. El punto es $\vec{\Gamma}(-1, 0)$, con $(-1, 0)$ interior al dominio.
Normal a S_2 (la paramétrica): $\vec{\Gamma}_u = (1, 2u, -2) = (1, -2, -2)$ y $\vec{\Gamma}_v = (2v, 0, 1) = (0, 0, 1)$ en $(-1, 0)$. $\vec{N} = \vec{\Gamma}_u \times \vec{\Gamma}_v = ((-2)\cdot 1 - (-2)\cdot 0, (-2)\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - (-2)\cdot 0) = (-2, -1, 0) \neq \vec{0}$: $\vec{\Gamma}$ es C^1 y regular ahí, hay plano tangente.
Normal a S_1 (la de nivel): F es C^1 (polinomio) y $\nabla F = (2x, z, y) = (-2, 2, 1) \neq \vec{0}$ en el punto.
Dirección de C: la tangente a C está en los dos planos tangentes, así que es perpendicular a las dos normales: $\vec{T} = \nabla F \times \vec{N} = (-2, 2, 1) \times (-2, -1, 0) = (2\cdot 0 - 1\cdot(-1), 1\cdot(-2) - (-2)\cdot 0, (-2)(-1) - 2\cdot(-2)) = (1, -2, 6)$. Como $\vec{T} \neq \vec{0}$ (normales no paralelas), las superficies se cortan transversalmente y C es una curva regular cerca del punto. Control: $\vec{T}\cdot\nabla F = -2 - 4 + 6 = 0$ y $\vec{T}\cdot\vec{N} = -2 + 2 + 0 = 0$ ✓.
Resultado: recta tangente **$(x, y, z) = (-1, 1, 2) + \lambda(1, -2, 6)$**, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control por otro camino: reemplazando $\vec{\Gamma}$ en F, la curva en el plano uv es $(u + v^2)^2 + u^2(v - 2u) = 3$; su vector tangente en $(-1, 0)$, llevado al espacio con $\vec{\Gamma}_u$ y $\vec{\Gamma}_v$, da $(-1, 2, -6)$, paralelo ✓.
Trampa: buscar el (u, v) del punto es obligatorio (sin él no podés evaluar $\vec{\Gamma}_u$ ni $\vec{\Gamma}_v$), y $u = 1$ se descarta por el dominio y por la primera coordenada. El otro error típico es cruzar $\vec{\Gamma}_u$ con ∇F: la tangente sale del producto entre las dos *normales*.

Ejercicio 4. Considere el campo escalar $G(x, y, z) = z + \cos(z - x) + xy$
a) Pruebe que, en un entorno del punto $(1, 1, 1)$, la ecuación $G(x, y, z) = 3$ define, implícitamente, $y = f(x, z)$.
b) Encuentre el valor de la máxima derivada direccional de la función $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto $(1, 1)$. Justifique sus cálculos.

Respuesta: a) $F = G - 3$ es C^1, $F(1, 1, 1) = 0$ y $F'_y(1, 1, 1) = 1 \neq 0$: $y = f(x, z)$ existe y es C^1 cerca de $(1, 1)$, con $f(1, 1) = 1$, $f'_x(1, 1) = -1$, $f'_z(1, 1) = -1$. b) $\nabla h(1, 1) = (2, 0)$; la máxima derivada direccional vale 2 (en la dirección $(1, 0)$).

a) Planteo: $F(x, y, z) = G(x, y, z) - 3 = z + \cos(z - x) + xy - 3$. Ojo que la variable a despejar es **y**, así que la derivada que no tiene que anularse es F'_y.
Hipótesis del TFI: (1) $F(1, 1, 1) = 1 + \cos 0 + 1 - 3 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomio más coseno de un polinomio). (3) $F'_y = x$, que en $(1, 1, 1)$ vale $1 \neq 0$ ✓. Entonces existe $y = f(x, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, 1)$, con $f(1, 1) = 1$.

Derivadas de f en (1, 1): $F'_x = \text{sen}(z - x) + y \to 0 + 1 = 1$; $F'_z = 1 - \text{sen}(z - x) \to 1$. Así $f'_x(1, 1) = -F'_x/F'_y = -1$ y $f'_z(1, 1) = -F'_z/F'_y = -1$.
b) Diferenciabilidad de h: $h(x, z) = x^3 + z \cdot f(x, z)$ es suma y producto de funciones C^1 en un entorno de (1, 1), así que es C^1, en particular diferenciable, y vale $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1) \cdot \check{v}$.
Gradiente (regla del producto): $h'_x = 3x^2 + z \cdot f'_x \to 3 + 1 \cdot (-1) = 2$; $h'_z = f(x, z) + z \cdot f'_z \to 1 + 1 \cdot (-1) = 0$. $\nabla h(1, 1) = (2, 0)$.
Máximo: por Cauchy Schwarz, $\nabla h \cdot \check{v} \leq \|\nabla h\|$ con igualdad para $\check{v} = \nabla h / \|\nabla h\|$. Como $\nabla h(1, 1) \neq \vec{0}$, la máxima derivada direccional es $\mathbf{\|\nabla h(1, 1)\| = 2}$, en la dirección $\check{v} = (1, 0)$.
Trampa: en h'_z aparece f(1, 1) sola (regla del producto con el factor z): hay que acordarse de que f(1, 1) = 1, que sale de que el punto es (1, 1, 1) con y en el medio.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2(1 + x) + y^2$ sobre el arco de curva $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. ¿En qué puntos de la curva se alcanzan esos extremos? ¿Cuáles son sus valores?

Respuesta: Máximo absoluto 2 en (1, 0); mínimo absoluto 0 en (–1, 0). (El candidato (0, 1), con f = 1, no es extremo.)

Existencia: el arco $C = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ es la semicircunferencia superior con sus dos puntas (±1, 0) incluidas: cerrado y acotado, compacto. f es polinómica, continua. Por Weierstrass alcanza máximo y mínimo absolutos sobre C.
Candidatos: (i) los puntos del arco abierto ($y > 0$) que cumplen Lagrange; (ii) las puntas del arco, (1, 0) y (–1, 0), que se evalúan siempre.
Regularidad: $g = x^2 + y^2 - 1$, $\nabla g = (2x, 2y) \neq \vec{0}$ sobre C (sólo se anula en el origen).
Lagrange: $f = x^2 + x^3 + y^2$, $\nabla f = (2x + 3x^2, 2y)$. Sistema: $2x + 3x^2 = 2\lambda x$, $2y = 2\lambda y$, $x^2 + y^2 = 1$. En el arco abierto es $y > 0$, así que la segunda ecuación da $\lambda = 1$ y la primera queda $3x^2 = 0$: $x = 0$, $y = 1$. Candidato (0, 1), con f(0, 1) = 1. (Si resolvés el sistema completo aparece además (0, –1), que se descarta porque $y < 0$.)
Puntas: f(1, 0) = 1·(1 + 1) + 0 = 2; f(–1, 0) = 1·(1 – 1) + 0 = 0.
Resultado: máximo absoluto **2** en **(1, 0)**; mínimo absoluto **0** en **(–1, 0)**. El punto (0, 1), con valor 1, no es ni máximo ni mínimo.
Control por sustitución: sobre C es $y^2 = 1 - x^2$, así que $f = x^2 + x^3 + 1 - x^2 = x^3 + 1$ con $x \in [-1, 1]$. Es estrictamente creciente: mínimo en $x = -1$ (valor 0) y máximo en $x = 1$ (valor 2) ✓. Ahí se ve por qué (0, 1) no es extremo: es el punto de inflexión de $x^3 + 1$.
Trampa: Lagrange sólo da candidatos en el interior del arco; las puntas (±1, 0), donde está justamente la respuesta, hay que agregarlas a mano. Y un punto crítico de Lagrange no es automáticamente un extremo: hay que comparar valores.

13/11/23, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) determine y grafique su dominio natural, ¿es abierto?, ¿es acotado?,

b) halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$. Es abierto y no es acotado. b) Nivel 0: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ sin los puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$.
>
> **a) Condición:** el numerador es un polinomio (definido en todo $\mathbb{R}^2$); sólo molesta el denominador: $y - x^2 \neq 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$.
> **Gráfico:** todo el plano sombreado, con la parábola de vértice (0, 0) que abre hacia arriba dibujada en punteado (excluida). La parábola parte a D en dos pedazos: el de adentro ($y > x^2$, contiene a (0, 1)) y el de afuera ($y < x^2$, contiene a (0, –1)).
> **Abierto:** sí. $g(x, y) = y - x^2$ es continua y $D = \{g > 0\} \cup \{g < 0\}$, unión de dos abiertos (preimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ por una función continua). Equivalente: ∂D es la parábola y ningún punto de ella está en D.
> **Acotado:** no: contiene a todos los puntos $(0, -n)$, $n \in \mathbb{N}$, de norma tan grande como quieras.
> **b) Nivel 0 (otro gráfico):** $f = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = 0$ con $(x, y) \in D$: la circunferencia de centro (0, 0) y radio 3, menos los puntos donde la corta la parábola (ahí f no está definida).
> **Cortes:** reemplazando $x^2 = y$ en $x^2 + y^2 = 9$ queda $y^2 + y - 9 = 0$, $y = (-1 \pm \sqrt{37})/2$. Como $y = x^2 \geq 0$, sirve sólo $y_0 = (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$, con $x = \pm\sqrt{y_0} \approx \pm 1{,}59$.
> **Resultado:** $C_0 = \{x^2 + y^2 = 9\}$ sin los dos puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2)$. En el dibujo: la circunferencia de radio 3 con dos puntitos huecos arriba, donde la atraviesa la parábola.
> **Trampa:** dar como nivel 0 la circunferencia entera. En esos dos puntos queda 0/0: f no está definida, así que no pueden estar en ningún conjunto de nivel.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$. Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

> **Respuesta:** $h(2, -3) = 0$, $\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$, $\nabla h(2, -3) = (-2, 4)$. Plano tangente: $z = -2x + 4y + 16$ (o sea $2x - 4y + z = 16$).
>
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es C^1, luego diferenciable en $(2, -3)$. $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$ es C^1 en el semiplano abierto $y > 0$, que contiene a $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$; por lo tanto f es diferenciable en (2, 1). Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en $(2, -3)$ y vale la regla de la cadena en forma matricial: $Dh(2, -3) = Df(2, 1) \cdot D\vec{g}(2, -3)$.
> **f y su gradiente en (2, 1):** $f(2, 1) = 2 \ln 1 + \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 0 = 0$. $f_x = \ln y + \frac{2}{3}x(1 - y)$, que en (2, 1) da $0 + 0 = 0$; $f_y = x/y - \frac{1}{3}x^2$, que en (2, 1) da $2 - 4/3 = 2/3$. **$\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$**.
> **Cadena:** $\nabla h(2, -3) = (0, 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 1 + (2/3)(-3),\ 0\cdot 2 + (2/3)\cdot 6) =$ **$(-2, 4)$**. Y $h(2, -3) = f(\vec{g}(2, -3)) = f(2, 1) = 0$.

Plano tangente: $z = 0 - 2(x - 2) + 4(y + 3)$, es decir $\mathbf{z = -2x + 4y + 16}$ (equivalente: $2x - 4y + z = 16$).
Trampa: f se deriva y evalúa en $(2, 1) = \vec{g}(2, -3)$, no en $(2, -3)$ (ahí $\ln(-3)$ ni existe). Y el orden del producto importa: es el gradiente (fila) por la jacobiana, $(0, 2/3)\cdot D\vec{g}$; multiplicar la matriz por la columna da $(4/3, 4)$, que está mal.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Respuesta: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$ y $f'(P, \check{v}) = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.

Planteo: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $F_2 = x^2 + z^2 - y$. $P = (1, 2, -1)$ está en C: $1 + 4 + 1 = 6$ y $1 + 1 = 2$ ✓.
Gradientes en P: $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) \to (2, 4, -2) \parallel (1, 2, -1)$; $\nabla F_2 = (2x, -1, 2z) \to (2, -1, -2)$. Son C^1 y no paralelos, así que C es regular en P y su tangente es perpendicular a ambos.
Tangente: $(1, 2, -1) \times (2, -1, -2) = (2\cdot(-2) - (-1)(-1), (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2), 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (-5, 0, -5) \parallel (1, 0, 1)$.
Sentido y versor: la tangente tiene dos sentidos, $\pm(1, 0, 1)$; el de coordenada x negativa es $(-1, 0, -1)$. La derivada direccional se toma sobre versores, así que se normaliza: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$.
Diferenciabilidad: $f = xy^2 + yz$ es polinómica, por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.
Gradiente de f: $\nabla f = (y^2, 2xy + z, y) \to \nabla f(P) = (4, 4 - 1, 2) = (4, 3, 2)$.
Cuenta: $f'(P, \check{v}) = (4\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1))/\sqrt{2} = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.
Trampa: usar $(-1, 0, -1)$ sin normalizar (da -6) o quedarse con el sentido $(1, 0, 1)$ (da $+3\sqrt{2}$). Y antes de usar la fórmula del gradiente hay que decir que f es diferenciable.

Ejercicio 4. Sea L la recta normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{F}(u, v) = (u\cos(v), u, u\,\mathrm{sen}(v))$ con $(u, v) \in [1, 3] \times [0, \pi]$, en el punto $(0, 2, 2)$. Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Respuesta: L: $(x, y, z) = (0, 2, 2) + s(0, -1, 1)$. No tiene puntos en común con la curva (el sistema es incompatible).

Parámetros del punto: $\vec{F}(u, v) = (0, 2, 2)$ pide $u = 2$ (segunda coordenada), $\cos v = 0$ y $\mathrm{sen}\, v = 1$, o sea $v = \pi/2$, que está en $[0, \pi]$ (y $u = 2$ en $[1, 3]$).
Normal: $\vec{F}_u = (\cos v, 1, \mathrm{sen}\, v) = (0, 1, 1)$, $\vec{F}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v, 0, u\cos v) = (-2, 0, 0)$ en $(2, \pi/2)$. Producto vectorial: $(1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot(-2) - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)) = (0, -2, 2) \neq \vec{0}$: el punto es regular. Director de L: $(0, -1, 1)$.
Control geométrico: Σ está sobre el cono $x^2 + z^2 = y^2$, cuyo gradiente $(2x, -2y, 2z)$ en $(0, 2, 2)$ es $(0, -4, 4) \parallel (0, -1, 1)$ ✓.
Recta normal: L: $(x, y, z) = (0, 2 - s, 2 + s)$, $s \in \mathbb{R}$.
Intersección con la curva: igualamos $(0, 2 - s, 2 + s) = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$. Primera coordenada: $t = 3$. Tercera: $2 + s = 2$, $s = 0$. Segunda: $2 - 0 = 2$ contra $t^2 + 1 = 10$. Contradicción: el sistema no tiene solución.
Resultado: L y la curva no tienen ningún punto en común. (El único punto de la curva con $x = 0$ es $(0, 10, 2)$, que no está en L.)
Trampa: usar el mismo parámetro para la recta y la curva. Tienen que ser parámetros distintos (s y t); con uno solo, el sistema cambia y podés sacar una conclusión falsa.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x + y + z$ evaluada en puntos de la curva $y = -x^2 + 4$, $z = y$, $y \geq 0$.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 65/8 en (1/4, 63/16, 63/16); mínimo absoluto −2 en (−2, 0, 0).
>
> **Planteo:** la curva es la intersección del cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ con el plano $z = y$, cortada por $y \geq 0$. Como y y z quedan en función de x, la parametrizamos por x: $\vec{r}(x) = (x, 4 - x^2, 4 - x^2)$. La condición $y \geq 0$ es $4 - x^2 \geq 0$, o sea **$x \in [-2, 2]$**: es un arco con dos puntas, (−2, 0, 0) y (2, 0, 0).
> **Existencia:** $\vec{r}$ es continua e inyectiva en $[-2, 2]$ (la primera coordenada es x), así que la curva es compacta (imagen continua de un intervalo cerrado y acotado); f es continua. Por Weierstrass, f alcanza máximo y mínimo absolutos sobre la curva.
> **Función restringida:** $\varphi(x) = f(\vec{r}(x)) = x + 2(4 - x^2) = 8 + x - 2x^2$, $x \in [-2, 2]$.
> **Crítico interior:** $\varphi'(x) = 1 - 4x = 0$ da $x = 1/4 \in (-2, 2)$. El punto es $(1/4, 4 - 1/16, 4 - 1/16) = (1/4, 63/16, 63/16)$ y $\varphi(1/4) = 8 + 1/4 - 2/16 = 65/8$.
> **Puntas:** $\varphi(2) = 2$ en (2, 0, 0); $\varphi(-2) = -2$ en (−2, 0, 0).
> **Resultado:** máximo absoluto **65/8** en **(1/4, 63/16, 63/16)**; mínimo absoluto **−2** en **(−2, 0, 0)**.
> **Control con Lagrange:** con $g_1 = y + x^2 - 4$ y $g_2 = z - y$, $\nabla g_1 \times \nabla g_2 = (2x, 1, 0) \times (0, -1, 1) = (1, -2x, -2x) \neq \vec{0}$ en todo punto: la restricción es regular. $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ da $(1, 1, 1) = (2\lambda x, \lambda - \mu, \mu)$, así que $\mu = 1$, $\lambda = 2$ y $x = 1/4$: el mismo candidato ✓. Las puntas no salen de Lagrange; se agregan aparte.
> **Trampa:** la condición $y \geq 0$ es la que vuelve compacta a la curva (sin ella la parábola no es acotada y f no tiene mínimo). Sus puntas (±2, 0, 0) son candidatos, y una de ellas es el mínimo.

11/11/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Para la función $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y)}{\sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)}}$ determine y grafique su dominio natural. Indique, justificando, si es abierto y represente, en otro gráfico, su frontera.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : y < x,\ x^2/4 + y^2 < 1\}$: la mitad de la elipse abierta de semiejes 2 (en x) y 1 (en y), vértices $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$, la que queda abajo y a la derecha de la recta $y = x$. Es abierto. Frontera: el arco de la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ con $y \le x$ (pasa por $(0, -1)$ y $(2, 0)$) más el segmento de $y = x$ entre $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$; ningún punto de la frontera está en D.
>
> **Condiciones:** $\ln(x - y)$ pide $x - y > 0$, o sea $y < x$. La raíz del denominador pide $4 - x^2 - 4y^2 \ge 0$ y además $\neq 0$ (está dividiendo): $4 - x^2 - 4y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2/4 + y^2 < 1$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x,\ x^2/4 + y^2 < 1\}$.
> **Cortes:** recta $y = x$ con la elipse: $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 \approx 0{,}89$. Puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$.
> **Gráfico de D:** la elipse de centro $(0, 0)$ de semiejes 2 (en x) y 1 (en y), vértices $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$, y la diagonal $y = x$. Como la recta pasa por el centro, D es justo media elipse: la que queda abajo y a la derecha de la diagonal (contiene a $(1, 0)$ y $(0, -1/2)$). Borde de la elipse y diagonal en punteado.
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = x - y$ y $g_2(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial D = \{x^2/4 + y^2 = 1,\ y \le x\} \cup \{y = x,\ |x| \le 2/\sqrt{5}\}$: el arco de la elipse con $y \le x$ (pasa por $(0, -1)$ y $(2, 0)$), cerrado por la cuerda diagonal de $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ a $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Curva cerrada en trazo lleno; ningún punto está en D (en el arco el denominador vale 0, en la cuerda el ln no existe).
> **Además** (no lo piden): D no es cerrado, es acotado y es conexo (convexo, intersección de convexos).
> **Trampa:** la raíz del denominador va con $>$ estricto; con $\ge$ el arco de elipse entraría en D y ya no sería abierto.

Ejercicio 2. Pruebe que la ecuación $2z\,\mathrm{sen}(x + y) + x z^2 - 4 = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(1, -1, 2)$ a $z = f(x, y)$, con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (1, -1)$ alcanza su mínimo valor e indique cuánto vale este mínimo.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -1) = (-2, -1)$. Mínimo $-\sqrt{5}$, en la dirección $\check{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = 2z\,\mathrm{sen}(x + y) + xz^2 - 4$, $P = (1, -1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = 2{\cdot}2{\cdot}\mathrm{sen}\,0 + 1{\cdot}4 - 4 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = 2\,\mathrm{sen}(x + y) + 2xz$, $F_z(P) = 0 + 4 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $A = (1, -1)$, con $f(A) = 2$.
> **Derivadas:** $F_x = 2z\cos(x + y) + z^2$, $F_x(P) = 4 + 4 = 8$. $F_y = 2z\cos(x + y)$, $F_y(P) = 4$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -2$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -1$. **$\nabla f(A) = (-2, -1)$**.
> **Derivada direccional:** como f es C^1, es diferenciable en A, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $f'(A, \check{v}) = \nabla f(A) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla f \cdot \check{v} = \|\nabla f\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇f y $\check{v}$. El mínimo es con $\theta = \pi$: dirección **$\check{v} = -\nabla f/\|\nabla f\| = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$**, y el mínimo vale **$-\|\nabla f(A)\| = -\sqrt{5}$**.

> **Trampa:** la dirección del mínimo es la opuesta al gradiente; como acá ∇f tiene componentes negativas, el versor del mínimo sale con componentes positivas. No lo "corrijas".

Ejercicio 3. Halle una ecuación para la recta normal al conjunto de nivel 2 de $h(u, v) = (f \circ \vec{g})(u, v)$ en $P = (1, 0)$ sabiendo que

- f es un campo escalar de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $A = (1, -1, 2)$ es $2x - 6y - 2z = 4$,
- $\vec{g}(u, v) = (2uv + 1, 3u^2 - 4)$.

> **Respuesta:** $\nabla h(1, 0) = (-18, 2)$. Recta normal: $(u, v) = (1, 0) + \lambda(-9, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (o sea $u + 9v = 1$).
>
> **Datos de f:** el plano tangente al gráfico de f en $A = (1, -1, 2)$ dice $f(1, -1) = 2$, y despejando z: $2z = 2x - 6y - 4$, o sea $z = x - 3y - 2$. Como el plano tangente es $z = f(1, -1) + f'_x(1, -1)(x - 1) + f'_y(1, -1)(y + 1)$, se lee $\boldsymbol{\nabla f(1, -1) = (1, -3)}$.
> **P está en el nivel 2:** $\vec{g}(1, 0) = (2 \cdot 1 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 1 - 4) = (1, -1)$, así que $h(1, 0) = f(1, -1) = 2$ ✓.
> **Hipótesis de la regla de la cadena:** $\vec{g}$ es polinómica (C^1) y $\vec{f}$ es C^1, en particular diferenciable en $\vec{g}(1, 0)$. Entonces h es diferenciable en P (de hecho C^1) y $\nabla h(P) = \nabla f(\vec{g}(P)) \cdot D\vec{g}(P)$.
> **Jacobiana de $\vec{g}$:** con $x = 2uv + 1$, $y = 3u^2 - 4$: $x'_u = 2v$, $x'_v = 2u$, $y'_u = 6u$, $y'_v = 0$. En $(1, 0)$: $D\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.
> **Cuenta:** $h'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 6 = -18$; $h'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = 2$. $\boldsymbol{\nabla h(1, 0) = (-18, 2)}$.
> **Por qué es normal:** h es C^1 y $\nabla h(P) \neq \vec{0}$, así que cerca de P el conjunto de nivel $h = 2$ es una curva regular y $\nabla h(P)$ es perpendicular a ella.
> **Resultado:** la recta normal es $\boldsymbol{(u, v) = (1, 0) + \lambda(-9, 1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (dividí el gradiente por 2); en cartesianas, $u + 9v = 1$.
> **Trampa:** la normal del plano dado es $(2, -6, -2)$, y ∇f no es $(2, -6)$: hay que llevarla a la forma $(f'_x, f'_y, -1)$, o sea dividir por 2. Y el conjunto de nivel de h vive en $\mathbb{R}^2$ (plano uv): la recta normal es una recta del plano, no la normal al gráfico de h en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4. Considere la curva C, definida por la intersección de las superficies $S_1 : z = x^2 + y$ y $S_2 : y = 2x^2 + 1$. Encuentre el punto de intersección entre la recta tangente a C en $(1, 3, 4)$ y el plano de ecuación $x + 2y = 4$.

> **Respuesta:** Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 3, 4) + \lambda(1, 4, 6)$. Corta al plano $x + 2y = 4$ en $(2/3, 5/3, 2)$.
>
> **El punto está en C:** $y = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ ✓ y $z = 1^2 + 3 = 4$ ✓.
> **Parametrización:** S_2 da y en función de x y, sustituyendo en S_1, $z = x^2 + (2x^2 + 1) = 3x^2 + 1$. Con $x = t$ queda $\vec{g}(t) = (t, 2t^2 + 1, 3t^2 + 1)$, de clase C^1, con $\vec{g}(1) = (1, 3, 4)$.
> **Vector tangente:** $\vec{g}'(t) = (1, 4t, 6t)$, así que $\vec{g}'(1) = (1, 4, 6) \neq \vec{0}$: la curva es regular en el punto y la recta tangente existe.
> **Control con gradientes:** S_1: $z - x^2 - y = 0$ tiene normal $(-2x, -1, 1) = (-2, -1, 1)$; S_2: $y - 2x^2 - 1 = 0$ tiene normal $(-4x, 1, 0) = (-4, 1, 0)$. Su producto vectorial es $(-1, -4, -6)$, paralelo a $(1, 4, 6)$ ✓.
> **Recta tangente:** $(x, y, z) = (1, 3, 4) + \lambda(1, 4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
> **Corte con el plano:** $(1, 4, 6) \cdot (1, 2, 0) = 9 \neq 0$, así que la recta no es paralela al plano y lo corta en un único punto. Reemplazando $x = 1 + \lambda$, $y = 3 + 4\lambda$ en $x + 2y = 4$: $1 + \lambda + 6 + 8\lambda = 4$, o sea $9\lambda = -3$ y $\lambda = -1/3$.
> **Resultado:** $(1 - 1/3, 3 - 4/3, 4 - 2) = \boldsymbol{(2/3, 5/3, 2)}$. Control: $2/3 + 10/3 = 4$ ✓.

> **Trampa:** como el plano no tiene z, es fácil olvidarse de la tercera coordenada del punto: sale de la recta con el mismo λ, $z = 4 + 6\cdot(-1/3) = 2$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2y$ evaluada en puntos del arco de curva de ecuación $y = x^2 + 2x$ con $-2 \le x \le -1$ y determine en qué puntos de la curva se producen dichos extremos absolutos.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 0 en $(-2, 0)$; mínimo absoluto $-27/16$ en $(-3/2, -3/4)$.
>
> **Planteo:** el arco es el gráfico de $y = x^2 + 2x$ sobre el intervalo cerrado $[-2, -1]$, así que lo parametrizamos por x: $\vec{r}(x) = (x, x^2 + 2x)$, que es C^1, inyectiva y con $\vec{r}\,'(x) = (1, 2x + 2) \neq \vec{0}$. Restringida al arco, f queda $\varphi(x) = f(x, x^2 + 2x) = x^2(x^2 + 2x) = x^4 + 2x^3$, $x \in [-2, -1]$.
> **Existencia:** el arco es compacto (imagen continua del intervalo cerrado y acotado $[-2, -1]$) y f es continua; equivalentemente, φ es continua en $[-2, -1]$. Por Weierstrass hay máximo y mínimo absolutos.
> **Críticos interiores:** $\varphi'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x + 3) = 0$ da $x = 0$, que queda fuera del intervalo, o $x = -3/2$, que está en $(-2, -1)$.
> **Tabla de candidatos:** $x = -3/2$: $y = 9/4 - 3 = -3/4$, $\varphi = (9/4)(-3/4) = -27/16$. Punta $x = -2$: $y = 4 - 4 = 0$, $\varphi = 0$. Punta $x = -1$: $y = 1 - 2 = -1$, $\varphi = 1\cdot(-1) = -1$.
> **Resultado:** máximo absoluto **0** en **$(-2, 0)$**; mínimo absoluto **$-27/16$** en **$(-3/2, -3/4)$**.
> **Control con Lagrange:** con $g = y - x^2 - 2x$, $\nabla g = (-2x - 2, 1)$ nunca se anula (la segunda componente es 1), así que la restricción es regular. $\nabla f = (2xy, x^2) = \lambda \nabla g$ da $\lambda = x^2$, y reemplazando $y = x^2 + 2x$ en la primera ecuación sale otra vez $2x^2(2x + 3) = 0$ ✓.
> **Trampa:** las puntas del tramo son candidatos obligatorios: acá el máximo está en una punta, donde φ' no se anula ($\varphi' = -8$ ahí). Si sólo mirás donde $\varphi' = 0$, o sólo hacés Lagrange, te lo perdés.

11/11/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Para la función $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}}$ determine y grafique su dominio natural. Indique, justificando, si es abierto y represente, en otro gráfico, su frontera.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : y > x,\ x^2 + y^2/4 < 1\}$: la mitad de la elipse abierta de semiejes 1 (en x) y 2 (en y), vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 2)$, la que queda arriba y a la izquierda de la recta $y = x$. Es abierto. Frontera: el arco de la elipse $x^2 + y^2/4 = 1$ con $y \geq x$ (pasa por $(0, 2)$ y $(-1, 0)$) más el segmento de $y = x$ entre $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$; ningún punto de la frontera está en D.
>
> **Condiciones:** $\ln(y - x)$ pide $y - x > 0$, o sea $y > x$. La raíz del denominador pide $4 - 4x^2 - y^2 \geq 0$ y además $\neq 0$ (está dividiendo): $4 - 4x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2/4 < 1$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x,\ x^2 + y^2/4 < 1\}$.
> **Cortes:** recta $y = x$ con la elipse: $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 \approx 0{,}89$. Puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$.
> **Gráfico de D:** la elipse de centro $(0, 0)$ de semiejes 1 (en x) y 2 (en y), vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 2)$, y la diagonal $y = x$. Como la recta pasa por el centro, D es justo media elipse: la que queda arriba y a la izquierda de la diagonal (contiene a $(0, 1)$ y $(-1/2, 0)$). Borde de la elipse y diagonal en punteado.
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = y - x$ y $g_2(x, y) = 4 - 4x^2 - y^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial D = \{x^2 + y^2/4 = 1,\ y \geq x\} \cup \{y = x,\ |x| \leq 2/\sqrt{5}\}$: el arco de la elipse con $y \geq x$ (pasa por $(0, 2)$ y $(-1, 0)$), cerrado por la cuerda diagonal de $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ a $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Curva cerrada en trazo lleno; ningún punto está en D (en el arco el denominador vale 0, en la cuerda el ln no existe).
> **Además** (no lo piden): D no es cerrado, es acotado y es conexo (convexo, intersección de convexos).
> **Trampa:** la raíz del denominador va con $>$ estricto; con $\geq$ el arco de elipse entraría en D y ya no sería abierto.

Ejercicio 2. Pruebe que la ecuación $2z\,\mathrm{sen}(x + y) + y z^2 - 4 = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(-1, 1, 2)$ a $z = f(x, y)$, con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (-1, 1)$ alcanza su mínimo valor e indique cuánto vale este mínimo.

> **Respuesta:** $\nabla f(-1, 1) = (-1, -2)$. Mínimo $-\sqrt{5}$, en la dirección $\check{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = 2z\,\mathrm{sen}(x + y) + yz^2 - 4$, $P = (-1, 1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = 2{\cdot}2{\cdot}\mathrm{sen}\,0 + 1{\cdot}4 - 4 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = 2\,\mathrm{sen}(x + y) + 2yz$, $F_z(P) = 0 + 4 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $A = (-1, 1)$, con $f(A) = 2$.
> **Derivadas:** $F_x = 2z\cos(x + y)$, $F_x(P) = 4$. $F_y = 2z\cos(x + y) + z^2$, $F_y(P) = 4 + 4 = 8$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -1$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -2$. **$\nabla f(A) = (-1, -2)$.**
> **Derivada direccional:** como f es C^1, es diferenciable en A, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $f'(A, \check{v}) = \nabla f(A) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla f \cdot \check{v} = \|\nabla f\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇f y $\check{v}$. El mínimo es con $\theta = \pi$: dirección **$\check{v} = -\nabla f/\|\nabla f\| = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$**, y el mínimo vale **$-\|\nabla f(A)\| = -\sqrt{5}$**.

> **Trampa:** la dirección del mínimo es la opuesta al gradiente; como ∇f tiene componentes negativas, el versor sale positivo.

Ejercicio 3. Halle una ecuación para la recta normal al conjunto de nivel 2 de $h(u, v) = (f \circ \vec{g})(u, v)$ en $P = (0, 1)$ sabiendo que

- f es un campo escalar de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $A = (-1, 1, 2)$ es $6x - 2y - 2z = -12$,
- $\vec{g}(u, v) = (3v^2 - 4, 2uv + 1)$.

> **Respuesta:** $\nabla h(0, 1) = (-2, 18)$. Recta normal: $(u, v) = (0, 1) + \lambda(-1, 9)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (o sea $9u + v = 1$).
>
> **Datos de f:** el plano tangente al gráfico de f en $A = (-1, 1, 2)$ dice $f(-1, 1) = 2$, y despejando z: $2z = 6x - 2y + 12$, o sea $z = 3x - y + 6$. Comparando con $z = f(-1, 1) + f'_x(-1, 1)(x + 1) + f'_y(-1, 1)(y - 1)$ se lee **$\nabla f(-1, 1) = (3, -1)$** (y en efecto $3\cdot(-1) - 1 + 6 = 2$).
> **P está en el nivel 2:** $\vec{g}(0, 1) = (3\cdot 1 - 4, 2\cdot 0\cdot 1 + 1) = (-1, 1)$, así que $h(0, 1) = f(-1, 1) = 2$ ✓.
> **Hipótesis de la regla de la cadena:** $\vec{g}$ es polinómica (C^1) y f es C^1, luego diferenciable en $\vec{g}(0, 1)$; h es diferenciable en P y $\nabla h(P) = \nabla f(\vec{g}(P)) \cdot D\vec{g}(P)$.
> **Jacobiana de $\vec{g}$:** con $x = 3v^2 - 4$, $y = 2uv + 1$: $x'_u = 0$, $x'_v = 6v$, $y'_u = 2v$, $y'_v = 2u$. En $(0, 1)$: $D\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
> **Cuenta:** $h'_u = 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 = -2$; $h'_v = 3\cdot 6 + (-1)\cdot 0 = 18$. **$\nabla h(0, 1) = (-2, 18)$**.
> **Por qué es normal:** h es C^1 y $\nabla h(P) \neq \vec{0}$, así que cerca de P el nivel $h = 2$ es una curva regular y $\nabla h(P)$ es perpendicular a ella.
> **Resultado:** recta normal **$(u, v) = (0, 1) + \lambda(-1, 9)$**, $\lambda \in \mathbb{R}$; en cartesianas, $9u + v = 1$.
> **Trampa:** acá $\vec{g}$ tiene las componentes en otro orden que en el tema 1 (la primera depende sólo de v). Si derivás de memoria sin escribir x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, es muy fácil cruzar las columnas de la jacobiana.

Ejercicio 4. Considere la curva C, definida por la intersección de las superficies $S_1 : z = x + y^2$ y $S_2 : x = 2y^2 + 1$. Encuentre el punto de intersección entre la recta tangente a C en $(3, 1, 4)$ y el plano de ecuación $2x + y = 4$.

> **Respuesta:** Recta tangente: $(x, y, z) = (3, 1, 4) + \lambda(4, 1, 6)$. Corta al plano $2x + y = 4$ en $(5/3, 2/3, 2)$.
>
> **El punto está en C:** $x = 2\cdot 1^2 + 1 = 3$ ✓ y $z = 3 + 1^2 = 4$ ✓.
> **Parametrización:** S_2 da x en función de y y, sustituyendo en S_1, $z = (2y^2 + 1) + y^2 = 3y^2 + 1$. Con $y = t$ queda $\vec{g}(t) = (2t^2 + 1, t, 3t^2 + 1)$, de clase C^1, con $\vec{g}(1) = (3, 1, 4)$.
> **Vector tangente:** $\vec{g}'(t) = (4t, 1, 6t)$, así que $\vec{g}'(1) = (4, 1, 6) \neq \vec{0}$: la curva es regular en el punto.
> **Control con gradientes:** S_1: $z - x - y^2 = 0$ tiene normal $(-1, -2y, 1) = (-1, -2, 1)$; S_2: $x - 2y^2 - 1 = 0$ tiene normal $(1, -4y, 0) = (1, -4, 0)$. Su producto vectorial es $(4, 1, 6)$ ✓.
> **Recta tangente:** $(x, y, z) = (3, 1, 4) + \lambda(4, 1, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
> **Corte con el plano:** $(4, 1, 6)\cdot(2, 1, 0) = 9 \neq 0$, hay un único punto. Reemplazando $x = 3 + 4\lambda$, $y = 1 + \lambda$ en $2x + y = 4$: $6 + 8\lambda + 1 + \lambda = 4$, o sea $9\lambda = -3$ y $\lambda = -1/3$.
> **Resultado:** $(3 - 4/3, 1 - 1/3, 4 - 2) =$ **$(5/3, 2/3, 2)$**. Control: $10/3 + 2/3 = 4$ ✓.
> **Trampa:** la z del punto no la da el plano (no la tiene): sale de la recta con el mismo λ, $z = 4 + 6\cdot(-1/3) = 2$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2y$ evaluada en puntos del arco de curva de ecuación $y = x^2 - 2x$ con $1 \leq x \leq 2$ y determine en qué puntos de la curva se producen dichos extremos absolutos.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 0 en (2, 0); mínimo absoluto –27/16 en (3/2, –3/4).
>
> **Planteo:** el arco es el gráfico de $y = x^2 - 2x$ sobre el intervalo cerrado $[1, 2]$, así que lo parametrizamos por x: $\vec{r}(x) = (x, x^2 - 2x)$, que es C^1, inyectiva y con $\vec{r}'(x) = (1, 2x - 2) \neq \vec{0}$. Restringida al arco, f queda $\varphi(x) = f(x, x^2 - 2x) = x^2(x^2 - 2x) = x^4 - 2x^3$, $x \in [1, 2]$.
> **Existencia:** el arco es compacto (imagen continua del intervalo cerrado y acotado $[1, 2]$) y f es continua; equivalentemente, φ es continua en $[1, 2]$. Por Weierstrass hay máximo y mínimo absolutos.
> **Críticos interiores:** $\varphi'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0$ da $x = 0$, que queda fuera del intervalo, o $x = 3/2$, que está en $(1, 2)$.
> **Tabla de candidatos:** $x = 3/2$: $y = 9/4 - 3 = -3/4$, $\varphi = (9/4)(-3/4) = -27/16$. Punta $x = 1$: $y = 1 - 2 = -1$, $\varphi = 1 \cdot (-1) = -1$. Punta $x = 2$: $y = 4 - 4 = 0$, $\varphi = 0$.
> **Resultado:** máximo absoluto **0** en **(2, 0)**; mínimo absoluto **–27/16** en **(3/2, –3/4)**.
> **Control con Lagrange:** con $g = y - x^2 + 2x$, $\nabla g = (-2x + 2, 1)$ nunca se anula (la segunda componente es 1), así que la restricción es regular. $\nabla f = (2xy, x^2) = \lambda \nabla g$ da $\lambda = x^2$, y reemplazando $y = x^2 - 2x$ en la primera ecuación sale otra vez $2x^2(2x - 3) = 0$ ✓.
> **Trampa:** las puntas del tramo son candidatos obligatorios: acá el máximo está en una punta, donde φ' no se anula ($\varphi' = 8$ ahí). Si sólo mirás donde $\varphi' = 0$, o sólo hacés Lagrange, te lo perdés.

23/10/23, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio del campo escalar $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 9)}$.

a) Halle, cuando sea posible, un punto exterior, un punto interior y un punto frontera del conjunto D.

b) Determine si D es compacto y/o conexo justificando su respuesta.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 > 9,\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 10\}$. a) Interior: (0, 0, 4); exterior: (0, 0, 0); frontera: (3, 0, 0) (también $(\sqrt{10}, 0, 0)$). b) D no es compacto (no es acotado ni cerrado) y no es conexo (la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ lo separa en dos).
>
> **Condiciones:** el ln pide $x^2 + y^2 + z^2 - 9 > 0$; y como está en el denominador, además $\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 9) \neq 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 - 9 \neq 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 \neq 10$.
> **D** $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 9,\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 10\}$. Con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$: todo lo que está afuera de la esfera de radio 3 (sin ella), menos la esfera de radio $\sqrt{10}$. Son dos pedazos: la cáscara $9 < r^2 < 10$ y la región $r^2 > 10$. D es abierto (desigualdad estricta y $\neq$ de una función continua), así que ningún punto de su frontera le pertenece.
> **a) Punto interior:** P = (0, 0, 4). Si Q está en la bola de centro P y radio 1/2, por desigualdad triangular $\|Q\| \geq 4 - 1/2 = 7/2$, así que $r^2 \geq 49/4 > 10$: toda la bola está en D.
> **Punto exterior:** O = (0, 0, 0). En la bola de centro O y radio 1 vale $r^2 < 1 < 9$: ningún punto de esa bola es de D.
> **Punto frontera:** A = (3, 0, 0). Para $0 < \varepsilon < \sqrt{10} - 3$, el punto $(3 + \varepsilon, 0, 0)$ cumple $9 < r^2 < 10$ y está en D; el $(3 - \varepsilon, 0, 0)$ tiene $r^2 < 9$ y no está. Toda bola centrada en A tiene puntos de D y de su complemento. (B = $(\sqrt{10}, 0, 0)$ también es frontera.) Los tres existen, así que el "cuando sea posible" se cumple en los tres casos.
> **b) ¿Compacto?** En $\mathbb{R}^3$, compacto $\iff$ cerrado y acotado. D no es acotado: $(t, 0, 0) \in D$ para todo $t > \sqrt{10}$. Tampoco es cerrado: A = (3, 0, 0) $\in \partial D$ y A $\notin$ D. No es compacto (alcanzaba con una de las dos).
> **¿Conexo?** No. Tomá $P_1 = (\sqrt{(19/2)}, 0, 0)$, con $r^2 = 19/2$ (está en la cáscara), y $P_2 = (0, 0, 4)$, con $r^2 = 16$. Si una curva continua γ dentro de D los uniera, $h(t) = \|\gamma(t)\|^2$ sería continua, valdría 19/2 en un extremo y 16 en el otro, y por Bolzano tomaría el valor 10: ese punto de la curva no es de D. Absurdo.
> **Trampa:** olvidarse de que el ln está en el denominador. Sin la condición $r^2 \neq 10$, D sería $\{r^2 > 9\}$, que sí es conexo, y la respuesta de b) cambia.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = \{ \dfrac{5x^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

a) Describa y grafique el conjunto de nivel 1 de f.

b) Determine además si f es continua en el origen justificando su respuesta.

> **Respuesta:** a) $C_1 = \{y = 2x\} \cup \{y = -2x\}$ menos el origen: dos rectas por (0, 0) de pendientes ± 2, sin el (0, 0). b) No es continua en (0, 0): por $y = 2x$ vale 1 y por $x = 0$ vale 0.
>
> **a) Planteo:** el conjunto de nivel 1 es $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$. El origen no está, porque $f(0, 0) = 0 \neq 1$.
>
> **Cuenta:** para $(x, y) \neq (0, 0)$, $\dfrac{5x^2}{x^2 + y^2} = 1 \iff 5x^2 = x^2 + y^2 \iff y^2 = 4x^2 \iff (y - 2x)(y + 2x) = 0 \iff y = 2x$ o $y = -2x$.

Resultado: $C_1 = \{y = 2x\} \cup \{y = -2x\}$ sin el punto (0, 0). **Gráfico:** dos rectas que se cruzan en el origen, de pendientes 2 y −2, con el origen marcado como punto vacío (agujero).
b) Planteo: f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$.
Usando a): por la recta $y = 2x$ ($x \neq 0$) los puntos están en C_1, así que f vale 1 y el límite por ese camino es 1. Por el eje y ($x = 0$, $y \neq 0$) $f(0, y) = 0/y^2 = 0$ y el límite es 0.
Conclusión: dos caminos con límites diferentes: el límite doble no existe y f **no es continua** en el origen. (En general, por $y = mx$ da $5/(1 + m^2)$, que depende de m.)
Idea para recordar: si un conjunto de nivel k con $k \neq f(0, 0)$ llega hasta el origen (tiene puntos tan cerca como quieras), f no puede ser continua ahí.
Trampa: en a) no incluyas el origen en el conjunto de nivel: ahí f vale 0 por definición.

Ejercicio 3. Sea C la curva intersección entre el gráfico de $f(x, y) = x^2$, y el plano de ecuación $x = y$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1, 1, z_0)$.

Respuesta: $z_0 = 1$; recta tangente: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Planteo: el gráfico de f es la superficie $z = x^2$ y C está formada por sus puntos con $x = y$.
Completar el punto: $(1, 1, z_0)$ está en el gráfico, así que $z_0 = f(1, 1) = 1^2 = 1$: $P = (1, 1, 1)$ (y cumple $x = y$).
Parametrización de C: tomando $x = t$: $y = t$ (plano) y $z = t^2$ (gráfico), o sea $\vec{g}(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1 y con $\vec{g}(1) = P$.
Vector tangente: $\vec{g}'(t) = (1, 1, 2t) \to \vec{g}'(1) = (1, 1, 2) \neq \vec{0}$, así que la curva es regular en P.
Resultado: recta tangente $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control con gradientes: con $F_1 = x^2 - z$ y $F_2 = x - y$: $\nabla F_1(P) = (2, 0, -1)$, $\nabla F_2 = (1, -1, 0)$ y $\nabla F_1 \times \nabla F_2 = (0\cdot 0 - (-1)(-1), (-1)\cdot 1 - 2\cdot 0, 2\cdot(-1) - 0\cdot 1) = (-1, -1, -2) \parallel (1, 1, 2)$ ✓.
Trampa: f depende sólo de x, pero es función de dos variables: su gráfico es una superficie de $\mathbb{R}^3$ (un cilindro parabólico), no una parábola del plano.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2y, x-y)$, con $z = g(u, v)$ definida implícitamente por la ecuación $ze^{u(v-1)} + ve^z = 1$ en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (4, 1, z_0)$. Calcule la dirección de la mínima derivada direccional de f en el punto (2, 1).

Respuesta: $z_0 = 0$; $\nabla g(4, 1) = (0, -1/2)$; $\nabla f(2, 1) = (-1/2, 1/2)$; dirección de mínima derivada: $\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ (valor mínimo $-\sqrt{2}/2$).

Planteo: $F(u, v, z) = ze^{u(v-1)} + ve^z - 1$. Y $f(x, y) = g(U, V)$ con $U = x^2y$, $V = x - y$. En (2, 1): $U = 4\cdot 1 = 4$, $V = 2 - 1 = 1$, así que justo caemos en $(u_0, v_0) = (4, 1)$.
Punto: en $(u, v) = (4, 1)$ el exponente es $4\cdot 0 = 0$ y queda $z + e^z = 1$. La función $z + e^z$ es estrictamente creciente, así que tiene una sola solución: $\mathbf{z_0 = 0}$ ($0 + 1 = 1$).
Derivadas de F: $F'_u = z(v-1)e^{u(v-1)}$, $F'_v = zue^{u(v-1)} + e^z$, $F'_z = e^{u(v-1)} + ve^z$. En (4, 1, 0): $F'_u = 0$, $F'_v = 0 + 1 = 1$, $F'_z = 1 + 1 = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(4, 1, 0) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (productos y composiciones de exponenciales y polinomios); (iii) $F'_z(4, 1, 0) = 2 \neq 0$. Entonces g es C^1 en un entorno de (4, 1), con $g(4, 1) = 0$ y $\nabla g(4, 1) = (-0/2, -1/2) =$ **$(0, -1/2)$**.
Regla de la cadena: g es diferenciable en (4, 1) (es C^1) y (U, V) es polinómica, así que f es diferenciable en (2, 1). Jacobiana interior en (2, 1): $U_x = 2xy = 4$, $U_y = x^2 = 4$; $V_x = 1$, $V_y = -1$. $f_x(2, 1) = g_u\cdot 4 + g_v\cdot 1 = 0 - 1/2 = -1/2$; $f_y(2, 1) = g_u\cdot 4 + g_v\cdot(-1) = 0 + 1/2 = 1/2$. $\nabla f(2, 1) = (-1/2, 1/2)$.
Mínima derivada direccional: como f es diferenciable, $f'((2, 1), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v}$, que es mínima cuando $\check{v}$ apunta opuesto al gradiente: $\check{v} = -\nabla f/\|\nabla f\|$. $\|\nabla f\| = \sqrt{(1/4 + 1/4)} = \sqrt{2}/2$, así que **$\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$**, y el

valor mínimo es $-\|\nabla f\| = -\sqrt{2}/2$.
Trampa: la mínima es en $-\nabla f$, no en ∇f (esa es la máxima). Y las derivadas de g se evalúan en (4, 1), el punto interior, no en (2, 1).

Ejercicio 5. Halle los extremos relativos de $f(x, y) = xye^{x+2y}$.

Respuesta: Puntos críticos: (0, 0), punto silla (no hay extremo); (–1, –1/2), máximo local con $f(-1, -1/2) = e^{-2}/2$. Es el único extremo relativo.

Planteo: f es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (producto de polinomio y exponencial); los extremos relativos están entre los puntos con $\nabla f = 0$.
Derivadas: $f_x = (y + xy)e^{x+2y} = y(1 + x)e^{x+2y}$; $f_y = (x + 2xy)e^{x+2y} = x(1 + 2y)e^{x+2y}$.
Sistema por casos ($e^{x+2y} \neq 0$): $f_x = 0$ pide $y = 0$ o $x = -1$; $f_y = 0$ pide $x = 0$ o $y = -1/2$. Combinando: $y = 0$ y $x = 0$ da (0, 0); $y = 0$ y $y = -1/2$ es imposible; $x = -1$ y $x = 0$ es imposible; $x = -1$ y $y = -1/2$ da (–1, –1/2). **Puntos: (0, 0) y (–1, –1/2)**.
Derivadas segundas: $f_{xx} = y(2 + x)e^{x+2y}$, $f_{xy} = (1 + x)(1 + 2y)e^{x+2y}$, $f_{yy} = x(4 + 4y)e^{x+2y}$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(0, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla**. (A mano: $f(t, t) = t^2e^{3t} > 0$ y $f(t, -t) = -t^2e^{-t} < 0$.)
(–1, –1/2): $e^{x+2y} = e^{-2}$; $f_{xx} = (-1/2)(1)e^{-2} = -e^{-2}/2$, $f_{xy} = 0 \cdot 0 = 0$, $f_{yy} = (-1)(2)e^{-2} = -2e^{-2}$. $\det H = e^{-4} > 0$ y $f_{xx} < 0$: **máximo local**, $f(-1, -1/2) = (-1)(-1/2)e^{-2} = \mathbf{e^{-2}/2}$.
Trampa: combinar mal los casos (por ejemplo, tomar $x = -1$ con $x = 0$) o anotar (0, –1/2) y (–1, 0), que no anulan las dos derivadas. Cada punto tiene que salir de un factor de f_x y uno de f_y a la vez.

21/10/23, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - xy^2)}}$ y sea D su dominio natural

a) Halle y grafique D.

b) Indique si D es abierto y/o conexo, justificando su respuesta, y represente en otro gráfico su frontera.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x(x - y^2) > 0\} = \{x > y^2\} \cup \{x < 0\}$: el interior de la parábola $x = y^2$ unido al semiplano abierto izquierdo. b) D es abierto y no es conexo. $\partial D = \{x = y^2\} \cup \{x = 0\}$: la parábola completa más el eje y.
>
> **a) Condición:** la raíz está en el denominador, así que su radicando tiene que ser ≥ 0 (raíz) y $\neq 0$ (cociente): $x^2 - xy^2 > 0$.
> **Factorizar:** $x^2 - xy^2 = x(x - y^2)$. El producto es positivo si y sólo si los dos factores tienen el mismo signo.
> **Caso 1:** $x > 0$ y $x > y^2$. Como $y^2 \geq 0$, $x > y^2$ ya implica $x > 0$: queda $\{x > y^2\}$, la región adentro de la parábola $x = y^2$ (vértice en el origen, abre hacia la derecha).
> **Caso 2:** $x < 0$ y $x < y^2$. Si $x < 0$, entonces $x < 0 \leq y^2$ automáticamente: queda el semiplano $\{x < 0\}$.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. **Gráfico:** sombreado todo el semiplano izquierdo y el interior de la parábola; el eje y y la parábola en punteado. Las dos regiones se "tocan" sólo en el origen, que no es de D.
> **b) ¿Abierto?** Sí: $g(x, y) = x^2 - xy^2$ es continua (polinomio) y $D = g^{-1}((0, +\infty))$ es la preimagen de un abierto. A mano: si $g(P) > 0$, por continuidad $g > 0$ en toda una bola alrededor de P.
> **¿Conexo?** No: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ están en D. Si una curva continua dentro de D los uniera, su primera coordenada sería continua y pasaría de 1 a −1; por Bolzano habría un punto de la curva con $x = 0$, donde $g = 0$, que no es de D. Absurdo.
> **Frontera:** $\partial D = \{(x, y) : x = y^2\} \cup \{(x, y) : x = 0\}$, la parábola completa y el eje y completo, que se cortan en el origen. Es justamente donde $g = 0$: ninguno de esos puntos es de D y al lado de cada uno hay puntos de D (los del eje y, por la izquierda; los de la parábola, por adentro). En el otro gráfico van las dos curvas en trazo lleno. Como D es abierto, $D \cap \partial D = \emptyset$.
> **Trampa:** quedarse sólo con $x > y^2$ y perder el semiplano $x < 0$, donde los dos factores son negativos y el producto es positivo. Con eso se llega, mal, a que D es conexo.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \{ \dfrac{y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

a) Analice la continuidad de f en $(0, 0)$.

b) Halle todos los versores para los cuales la derivada direccional en $(0, 0)$ es nula.

> **Respuesta:** a) f es continua en $(0, 0)$: $|f(x, y)| \leq |x| \to 0 = f(0, 0)$. b) $f'((0, 0), (a, b)) = ab^2$; es nula sólo para los versores $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
>
> **a) Planteo:** hay que probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, y para probar que un límite existe se acota.
> **Acotación:** para $(x, y) \neq (0, 0)$, $y^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ (el numerador es una parte del denominador) y $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Entonces $0 \leq |f(x, y)| = |\operatorname{sen} x| \cdot \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$, y $|x| \to 0$.

Conclusión: por intercalación lím f = 0 = f(0, 0): **f es continua en el origen**.
b) Planteo: para un versor $\check{v} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, $f'((0, 0), \check{v}) = \lim_{t \to 0} (f(ta, tb) - f(0, 0))/t$.
Cuenta: para $t \neq 0$, $f(ta, tb) = t^2b^2 \operatorname{sen}(ta)/(t^2(a^2 + b^2)) = b^2 \operatorname{sen}(ta)$, así que el cociente es $b^2 \operatorname{sen}(ta)/t$. Si $a = 0$, vale 0 y el límite es 0. Si $a \neq 0$, $b^2 \operatorname{sen}(ta)/t = ab^2 \cdot \operatorname{sen}(ta)/(ta) \to ab^2$. En los dos casos **$f'((0, 0), \check{v}) = ab^2$** (existe en todas las direcciones).
Versores con derivada nula: $ab^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$. Con $a^2 + b^2 = 1$: si $a = 0$, $b = \pm 1$; si $b = 0$, $a = \pm 1$. **$\check{v} \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$**: sólo las direcciones de los ejes.
Trampa: las parciales en el origen valen 0 (son $a = 1, b = 0$ y $a = 0, b = 1$), y si usás $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$ te da 0 para *todos* los versores. Esa fórmula exige que f sea diferenciable, y esta f no lo es: la derivada direccional ab^2 no es lineal en $\check{v}$ (en $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ da $\sqrt{2}/4$, no 0).

Ejercicio 3. Sea C la curva intersección de las superficies Σ_1 de ecuación $y^2 + y + xz = 0$ y Σ_2 de ecuación $e^{z^2} - y^2 + 4x = 4$. Analice si el plano normal C en el punto $(1, y_0, 0)$ es paralelo al plano $x - 2y - 2z = 1$.

Respuesta: $y_0 = -1$, $P = (1, -1, 0)$. Plano normal: $x - 2y - 2z = 3$. Su normal $(1, -2, -2)$ es la misma que la del plano dado: **sí, son paralelos** (y no coinciden, porque $3 \neq 1$).

Planteo: C es el conjunto de ceros común de $F_1 = y^2 + y + xz$ y $F_2 = e^{z^2} - y^2 + 4x - 4$. El plano normal a C en P tiene como vector normal al vector tangente a C en P, así que hay que hallar P y la dirección tangente.
Completar el punto: en Σ_1 con $x = 1$, $z = 0$: $y_0^2 + y_0 = 0$, o sea $y_0 = 0$ o $y_0 = -1$. En Σ_2: $e^0 - y_0^2 + 4 = 4$, o sea $y_0^2 = 1$, $y_0 = \pm 1$. El único valor que cumple las dos es **$y_0 = -1$**: $P = (1, -1, 0)$. P tiene que estar en las dos superficies, por eso se piden las dos ecuaciones.
Gradientes: $\nabla F_1 = (z, 2y + 1, x) \to \nabla F_1(P) = (0, -1, 1)$; $\nabla F_2 = (4, -2y, 2z\, e^{z^2}) \to \nabla F_2(P) = (4, 2, 0)$. Las dos funciones son C^1 (polinomios y exponencial) y los gradientes no son paralelos, así que cerca de P la curva es regular y su tangente es perpendicular a ambos.
Tangente: $\vec{T} = \nabla F_1(P) \times \nabla F_2(P) = ((-1)\cdot 0 - 1\cdot 2, 1\cdot 4 - 0\cdot 0, 0\cdot 2 - (-1)\cdot 4) = (-2, 4, 4) \parallel (1, -2, -2)$.
Plano normal: $1(x - 1) - 2(y + 1) - 2(z - 0) = 0$, o sea **$x - 2y - 2z = 3$**.
Comparación: el plano $x - 2y - 2z = 1$ tiene normal $(1, -2, -2)$, la misma que el plano normal. Normales paralelas $\Rightarrow$ planos paralelos. Además P no está en el plano dado ($1 + 2 - 0 = 3 \neq 1$): son paralelos y no coincidentes.
Resultado: sí, el plano normal a C en $(1, -1, 0)$ es paralelo a $x - 2y - 2z = 1$.
Trampa: quedarse con $y_0 = 0$ (sale sólo de Σ_1) o con $y_0 = 1$ (sale sólo de Σ_2); o confundir plano normal con plano tangente y usar un gradiente como normal.

Ejercicio 4. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en $(1, -1)$ de un campo escalar $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $p_2(u, v) = 3 - u + v + u^2 - 2uv$. Halle la dirección de máxima derivada direccional de la función $h(x, y) = 2x^2y + f(x + y, -e^{xy})$ en el punto $(0, 1)$. Justifique su procedimiento.

Respuesta: $\nabla f(1, -1) = (3, -1)$; $\nabla h(0, 1) = (4, 3)$. Dirección de máxima derivada direccional: $\check{r} = (4/5, 3/5)$, con valor máximo 5.

Punto imagen: llamamos $\vec{g}(x, y) = (x + y, -e^{xy})$; $\vec{g}(0, 1) = (1, -e^0) = (1, -1)$, donde está centrado el Taylor de f.
Qué da el Taylor: $f \in C^3$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $\nabla p_2(u, v) = (-1 + 2u - 2v, 1 - 2u)$, y en $(1, -1)$: $(-1 + 2 + 2, 1 - 2) =$ **$\nabla f(1, -1) = (3, -1)$**.

Hipótesis: g es C^1 y f es C^3 (diferenciable en (1, –1)), así que $f \circ g$ es diferenciable en (0, 1); $2x^2y$ es polinómica. La suma h es diferenciable en (0, 1).

Parte compuesta: $\vec{Dg}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -y\,e^{xy} & -x\,e^{xy} \end{pmatrix}$, en (0, 1): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\nabla(f \circ \vec{g})(0, 1) = (3, -1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (3 + 1, 3 + 0) = (4, 3)$.

Parte polinómica: $\nabla(2x^2y) = (4xy, 2x^2)$, en (0, 1): (0, 0).

Gradiente de h: $\nabla h(0, 1) = (0, 0) + (4, 3) =$ **(4, 3)**, con norma 5.

Dirección: como h es diferenciable, $h'(A, \check{r}) = \nabla h(A)\cdot\check{r} \leq \|\nabla h(A)\|$, con igualdad en $\check{\mathbf{r}} = \mathbf{(4, 3)/5}$. La derivada máxima vale 5.

Trampa: en la segunda fila de $\vec{Dg}$ va la derivada de $-e^{xy}$: el signo menos y el factor y (o x) que sale por la cadena interna. Con e^{xy} sin el menos te queda $\nabla h = (2, 3)$ y la dirección cambia.

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = a(x - 2)^2 + b(y + 1)^2 - 2x^3$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Halle todos los valores de a y b de manera tal que (1, –1) sea un punto crítico de f. Considerando todos los valores de a y b hallados, determine aquellos valores para los cuales f tiene un extremo relativo en (1, –1) y clasifíquelo.

Respuesta: (1, –1) es crítico si y sólo si $a = -3$ (con cualquier $b \neq 0$). Hay extremo relativo sólo para $a = -3$ y $b < 0$: es un máximo relativo, de valor $f(1, -1) = -5$. Para $a = -3$ y $b > 0$ es punto silla.

Planteo: f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$. Como es diferenciable, (1, –1) es punto crítico si y sólo si $\nabla f(1, -1) = \vec{0}$.

Derivadas: $f'_x = 2a(x - 2) - 6x^2$, $f'_y = 2b(y + 1)$. En (1, –1): $f'_x(1, -1) = -2a - 6$ y $f'_y(1, -1) = 2b\cdot 0 = 0$, que vale para cualquier b.

Valores: $-2a - 6 = 0$ da $\mathbf{a = -3}$, y b queda libre: **cualquier $\mathbf{b \in \mathbb{R} - \{0\}}$**.

Hessiano: $f''_{xx} = 2a - 12x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2b$. Con $a = -3$, en (1, –1): $H = \begin{pmatrix} -6 - 12 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$, $\det H = -36b$. Como $b \neq 0$, el determinante nunca es 0 y el criterio siempre decide.

Si b > 0: $\det H < 0$: **punto silla**, no hay extremo.

Si b < 0: $\det H > 0$ y $f''_{xx} = -18 < 0$: **máximo relativo**, de valor $f(1, -1) = -3\cdot(-1)^2 + b\cdot 0 - 2\cdot 1 =$ **–5**.

Extra (otra versión del mismo ejercicio): con $a = -3$, $f'_x = -6(x - 2) - 6x^2 = -6(x - 1)(x + 2)$ y $f'_y = 2b(y + 1)$, así que el otro punto crítico es (–2, –1), con $H = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$ y $\det H = 36b$: para $b < 0$ es punto silla.

Trampa: f'_y se anula en $y = -1$ sea cual sea b, así que la condición de punto crítico no determina b; lo que separa los casos es el signo de b en el hessiano. No inventes un valor de b.

4/7/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \sqrt[4]{(xy)}\,\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique, por separado, D, int(D) y ∂D. Para cada uno de estos conjuntos indique si es cerrado o abierto y si es conexo.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : xy \geq 0,\ x^2 + y^2/4 \leq 1\}$: los cuartos de elipse cerrados de los cuadrantes I y III; cerrado, no abierto, conexo (y compacto). $\text{int}(D) = \{xy > 0,\ x^2 + y^2/4 < 1\}$: abierto, no cerrado, no conexo. ∂D = arcos de la elipse en los cuadrantes I y III $\cup$ segmento de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ $\cup$ segmento de $(0, -2)$ a $(0, 2)$; cerrado, no abierto, conexo.
>
> El índice de la primera raíz se ve chico en la foto; se lee 4 ($\sqrt[4]{}$), que es también la lectura de las resoluciones conocidas. Con índice par la condición es $xy \geq 0$.
> **Condiciones:** $\sqrt[4]{(xy)}$ pide $xy \geq 0$ (índice par) y $\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}$ pide $4x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2/4 \leq 1$.
> **D:** $xy \geq 0$ son los cuadrantes I y III **con los ejes** (en los ejes $xy = 0$). Cortado con la elipse cerrada de vértices $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 2)$: $\mathbf{D = \{(x, y) : xy \geq 0,\ x^2 + y^2/4 \leq 1\}} = Q_1 \cup Q_3$, donde Q_1 es el cuarto de elipse con $x \geq 0$, $y \geq 0$ (limitado por los segmentos del origen a $(1, 0)$ y a $(0, 2)$ y el arco entre ellos) y Q_3 el cuarto con $x \leq 0$, $y \leq 0$ (limitado por los segmentos del origen a $(-1, 0)$ y a $(0, -2)$ y su arco). Se tocan sólo en $(0, 0)$. Gráfico: los dos cuartos pintados, con todo el contorno en trazo lleno.
> **int(D):** si $xy > 0$ y $x^2 + y^2/4 < 1$, por continuidad las dos desigualdades estrictas valen en un entorno: el punto es interior. Si $xy = 0$ (punto sobre un eje) no es interior: cerca hay puntos de los cuadrantes II o IV, con $xy < 0$. Si está sobre la elipse tampoco: cerca hay puntos de afuera. $\mathbf{\text{int}(D) = \{(x, y) : xy > 0,\ x^2 + y^2/4 < 1\}}$: los dos cuartos abiertos, contorno punteado y el origen afuera.
> **∂D:** como D es cerrado (abajo), $\partial D = D \setminus \text{int}(D)$: $\mathbf{\partial D = \{x^2 + y^2/4 = 1,\ xy \geq 0\} \cup \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -2 \leq y \leq 2\}}$, el contorno de Q_1 más el de Q_3: dos "gajos" huecos unidos por el origen, todo en trazo lleno. Cada punto de los segmentos tiene de un lado un cuarto de D y del otro un cuadrante (II o IV) sin puntos de D.
> **D: cerrado**, porque $D = \{xy \geq 0\} \cap \{4 - 4x^2 - y^2 \geq 0\}$ y cada conjunto $\{g \geq 0\}$ con g continua es cerrado (equivalente: $\partial D \subset D$). **No abierto**: $(1/2, 0) \in D$ no es interior. **Conexo**: si $P = (x, y) \in D$, el segmento tP, $t \in [0, 1]$, queda en D ($t^2xy \geq 0$ y $t^2(x^2 + y^2/4) \leq 1$); así dos puntos cualesquiera de D se unen pasando por el origen. Además es acotado, así que es compacto.
> **int(D): abierto** (todo interior lo es; también por ser $\{xy > 0\} \cap \{x^2 + y^2/4 < 1\}$, desigualdades estrictas de funciones continuas). **No cerrado**: $(1/2, 0)$ es frontera de int(D) (límite de $(1/2, 1/n)$) y no le pertenece. **No conexo**: en int(D) nunca es $x = 0$, así que $\text{int}(D) \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos abiertos disjuntos, y tiene puntos en los dos, $(1/4, 1/4)$ y $(-1/4, -1/4)$. Sin el origen, los dos cuartos quedan sueltos.
> **∂D: cerrado** (la frontera de cualquier conjunto es cerrada; acá también es unión finita de segmentos y arcos cerrados). **No abierto**: no tiene ningún punto interior, todo entorno de un punto de una curva tiene puntos fuera de ella. **Conexo**: los dos segmentos se cruzan en el origen y cada arco empieza y termina en extremos de esos segmentos ($(1, 0)$ con $(0, 2)$, $(-1, 0)$ con $(0, -2)$); es una cadena de curvas continuas pegadas.
> **Trampa:** D es conexo pero su interior no: el único punto que une los dos cuartos es el origen, que es de frontera. Y no te olvides de que en los ejes $xy = 0$ cumple $xy \geq 0$: los segmentos de ejes pertenecen a D.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (1, 0)$ mediante la ecuación $ze^{uv} - uz^3 + \operatorname{sen}(v) = 0$ que satisface la condición $f(1, 0) = 1$. Si $g(x, y) = f(2x + y, x^2 - y^2)$, halle $\nabla g(1, -1)$.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, 0) = (-1/2, 1)$; $\nabla g(1, -1) = (1, 3/2)$.
>
> El punto impreso (0, 1) aparece corregido a mano como (1, 0); se usa $(u_0, v_0) = (1, 0)$, que es el coherente con $f(1, 0) = 1$. **Planteo:** $F(u, v, z) = ze^{uv} - uz^3 + \operatorname{sen}(v)$, con $z_0 = f(1, 0) = 1$. Chequeo: $F(1, 0, 1) = 1 - 1 + 0 = 0$. ✓
> **Derivadas de F:** $F'_u = zve^{uv} - z^3$, $F'_v = zue^{uv} + \cos v$, $F'_z = e^{uv} - 3uz^2$. En (1, 0, 1): $F'_u = 0 - 1 = -1$, $F'_v = 1 + 1 = 2$, $F'_z = 1 - 3 = -2$.
> **Hipótesis del TFI:** (i) $F(1, 0, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(1, 0, 1) = -2 \neq 0$. Así f es C^1 en un entorno de (1, 0) (lo que el enunciado afirma queda justificado).
> **$\nabla f(1, 0)$:** $f_u = -\dfrac{F'_u}{F'_z} = -(-1)/(-2) = -1/2$; $f_v = -\dfrac{F'_v}{F'_z} = -2/(-2) = 1$.
> **Regla de la cadena:** $g(x, y) = f(U, V)$ con $U = 2x + y$, $V = x^2 - y^2$. En (1, −1): $U = 2 - 1 = 1$, $V = 1 - 1 = 0$, o sea caemos en (1, 0). f es diferenciable ahí (C^1) y (U, V) es polinómica, así que g es diferenciable en (1, −1). Jacobiana interior: $U_x = 2$, $U_y = 1$, $V_x = 2x = 2$, $V_y = -2y = 2$.
> **Cuenta:** $g_x(1, -1) = f_u \cdot 2 + f_v \cdot 2 = -1 + 2 = 1$; $g_y(1, -1) = f_u \cdot 1 + f_v \cdot 2 = -1/2 + 2 = 3/2$. **$\nabla g(1, -1) = (1, 3/2)$.**
> **Trampa:** dos signos se cruzan en f_u (F'_u y F'_z negativos más el menos de la fórmula); hacelo con paréntesis. Y $V_y = -2y$ en $y = -1$ da +2, no −2.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en $P = (-1, 1)$ es $p(x, y) = 4 + 2y^2 + 5xy - 3y$ y sea $h(x, y) = xf(x, y) + 3x$. Halle el plano tangente al gráfico de h en el punto $(-1, 1, h(-1, 1))$.

> **Respuesta:** $z = -4x + 4y - 9$ (o sea $4x - 4y + z = -9$), con $h(-1, 1) = -1$.
>
> **Qué da el Taylor:** f es C^2, así que su polinomio de Taylor de orden 2 en P coincide con f en P y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en P. Entonces $f(P) = p(P)$, $f_x(P) = p_x(P)$, $f_y(P) = p_y(P)$.
> **Valores de f:** $p(-1, 1) = 4 + 2 - 5 - 3 = -2$. $p_x = 5y$, que en P vale 5. $p_y = 4y + 5x - 3$, que en P vale $4 - 5 - 3 = -4$. Así $f(P) = -2$, $\nabla f(P) = (5, -4)$.
> **Diferenciabilidad de h:** $h = x\,f + 3x$ es suma y producto de funciones C^1, luego es C^1 y diferenciable: su gráfico tiene plano tangente en P.
> **h y sus derivadas:** $h(P) = (-1)(-2) + 3(-1) = -1$. $h_x = f + x\,f_x + 3$, en P: $-2 + (-1)(5) + 3 = -4$. $h_y = x\,f_y$, en P: $(-1)(-4) = 4$.
> **Plano tangente:** $z = h(P) + h_x(P)(x + 1) + h_y(P)(y - 1) = -1 - 4(x + 1) + 4(y - 1)$, es decir **$z = -4x + 4y - 9$**.
> **Trampa:** en h_x no te olvides del término f (regla del producto: $(x\,f)_x = f + x\,f_x$), ni de evaluar $x = -1$, que cambia signos. Y $f(P)$ no es el término independiente 4: hay que evaluar p en P.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = y^3 - 6xy + 3x^2y$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos. En caso de producirse un extremo indique el valor de éste.

> **Respuesta:** Puntos críticos: (0, 0), (2, 0), (1, 1), (1, −1). (0, 0) y (2, 0) son puntos silla. En (1, 1) hay mínimo relativo de valor −2; en (1, −1), máximo relativo de valor 2.
>
> **Planteo:** f es polinómica, C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (abierto): los extremos relativos sólo pueden estar en puntos con $\nabla f = 0$.

Gradiente: $f'_x = -6y + 6xy = 6y(x - 1)$, $f'_y = 3y^2 - 6x + 3x^2$.
Puntos críticos: $f'_x = 0$ pide $y = 0$ o $x = 1$. Caso $y = 0$: $f'_y = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$, $x = 0$ o $x = 2$, y salen **(0, 0)** y **(2, 0)**. Caso $x = 1$: $f'_y = 3y^2 - 6 + 3 = 3(y^2 - 1) = 0$, $y = \pm 1$, y salen **(1, 1)** y **(1, –1)**.
Hessiano: $f''_{xx} = 6y$, $f''_{xy} = 6x - 6$, $f''_{yy} = 6y$, o sea $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x - 6 \\ 6x - 6 & 6y \end{pmatrix}$ y $\det H = 36y^2 - 36(x - 1)^2$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
(0, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -36 < 0$: **punto silla** ($f(0, 0) = 0$).
(2, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -36 < 0$: **punto silla** ($f(2, 0) = 0$).
(1, 1): $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\det H = 36 > 0$, $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**, $f(1, 1) = 1 - 6 + 3 = \mathbf{-2}$.
(1, –1): $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\det H = 36 > 0$, $f''_{xx} = -6 < 0$: **máximo relativo**, $f(1, -1) = -1 + 6 - 3 = \mathbf{2}$.
Ninguno es absoluto: sobre el eje y, $f(0, y) = y^3$ toma valores tan grandes y tan chicos como se quiera.
Trampa: en $6y(x - 1) = 0$ no dividas por y ni por $(x - 1)$: son dos casos y cada uno aporta dos puntos. Si "simplificás" la y te quedás sólo con $(1, \pm 1)$ y perdés las dos sillas.

Ejercicio 5. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ donde Σ_1 y Σ_2 son las superficies de ecuaciones $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 4 \wedge \Sigma_2 : \vec{X} = (u, v, u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación de la recta tangente a C en el punto $P = (x_0, 2, z_0)$.

Respuesta: P = (0, 2, 8). Recta tangente: $(x, y, z) = (0, 2, 8) + \lambda(1, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (o sea $y = 2$, $z = 8$).
Σ_2 en cartesianas: $\vec{X} = (u, v, u^2 + 2v^2)$ es la gráfica de $z = x^2 + 2y^2$ (paraboloide elíptico).
El punto: en Σ_1 con $y = 2$: $x_0^2 + 4 = 4$, así que $x_0 = 0$ (un solo punto); en Σ_2: $z_0 = 0 + 2 \cdot 2^2 = 8$. P = (0, 2, 8).
Normales: $F = x^2 + y^2 - 4$ y $G = z - x^2 - 2y^2$ son C^1. $\nabla F = (2x, 2y, 0) = (0, 4, 0)$ y $\nabla G = (-2x, -4y, 1) = (0, -8, 1)$ en P; no nulas y no paralelas.
Dirección: $\nabla F \times \nabla G = (0, 4, 0) \times (0, -8, 1) = (4 \cdot 1 - 0 \cdot (-8), 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1, 0 \cdot (-8) - 4 \cdot 0) = (4, 0, 0) \neq \vec{0}$, paralelo a (1, 0, 0). La curva es regular en P.
Resultado: recta tangente **$(x, y, z) = (0, 2, 8) + \lambda(1, 0, 0)$**, $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir la recta $y = 2$, $z = 8$.
Control con parametrización: $\vec{g}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4 \cos^2 t + 8 \operatorname{sen}^2 t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4 + 4 \operatorname{sen}^2 t)$; P corresponde a $t = \pi/2$ y $\vec{g}'(\pi/2) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 8 \operatorname{sen} t \cos t)$ evaluado da $(-2, 0, 0)$ ✓.
Trampa: la dirección (1, 0, 0) parece rara pero es correcta: $z = 4 + 4 \operatorname{sen}^2 t$ es máxima en $t = \pi/2$, así que P es el punto más alto de la curva y ahí la tangente es horizontal. No la descartes por "sospechosa".

5/6/23, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado o conexo.

> **Respuesta:** $h(x, y) = 9x(y - x^2)$. $A = \{x = 0\} \cup \{y = x^2\}$ (eje y más parábola): cerrado, no abierto, conexo. $B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$ (arriba de la parábola a la derecha del eje y, abajo a la izquierda): abierto, no cerrado, no conexo.
>
> **Derivadas:** $f(x, y) = 3xy - x^3$ es polinómica; $f'_x = 3y - 3x^2$ y $f'_y = 3x$. Entonces $h(x, y) = (3y - 3x^2)(3x) =$ **$9x(y - x^2)$**, continua en $\mathbb{R}^2$.
> **A:** $h = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = x^2$. **$A = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = x^2\}$**: el eje y entero y la parábola $y = x^2$ (vértice en el origen), que se cortan sólo en (0, 0). Gráfico: las dos curvas en trazo lleno.
> **B:** $h > 0 \Leftrightarrow x$ e $y - x^2$ tienen el mismo signo: ($x > 0$ y $y > x^2$) o ($x < 0$ y $y < x^2$). **$B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$**. Gráfico: en el semiplano derecho, la zona de arriba de la rama derecha de la parábola (entre el eje y y la parábola); en el izquierdo, la zona de abajo de la rama izquierda (incluye todo el tercer cuadrante). Bordes punteados: el eje y y la parábola.
> **A, ¿cerrado?** Sí: $A = h^{-1}(\{0\})$ con h continua y {0} cerrado. (Directo: si $(x_n, y_n) \in A$ tiende a (a, b), $h(a, b) = \lim h(x_n, y_n) = 0$.)
> **A, ¿abierto?** No: $(0, 1) \in A$, pero en cualquier entorno está $(\varepsilon, 1)$ con $0 < \varepsilon < 1$, y $h(\varepsilon, 1) = 9\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \neq 0$. Ningún punto de A es interior: es unión de dos curvas.
> **A, ¿conexo?** Sí: el eje y es conexo (una recta) y la parábola también (imagen de la curva continua (t, t^2), $t \in \mathbb{R}$). Comparten el origen, y la unión de dos conexos con un punto en común es conexa: cualquier punto de una se une con cualquiera de la otra pasando por (0, 0).
> **B, ¿abierto?** Sí: $B = h^{-1}((0, +\infty))$ con h continua y $(0, +\infty)$ abierto. (Directo: si $h(P) > 0$, por continuidad $h > 0$ en todo un entorno de P.)
> **B, ¿cerrado?** No: $(1, 1) \notin B$ ($h = 0$), pero $(1, 1 + 1/n) \in B$ ($h = 9/n > 0$) y tiende a (1, 1). (Otra forma: B no es $\emptyset$ ni $\mathbb{R}^2$, y en $\mathbb{R}^2$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son esos dos.)
> **B, ¿conexo?** No: en B nunca es $x = 0$, así que $B \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos semiplanos abiertos disjuntos, y B tiene puntos en los dos, (1, 2) y (–1, 0). (Con caminos: una curva en B de (1, 2) a (–1, 0) tendría que cruzar $x = 0$, donde $h = 0$.) Cada una de las dos piezas, por separado, sí es conexa.
> **Trampa:** olvidarse del factor x que viene de f'_y y quedarse sólo con la parábola. Y B no es "el interior de la parábola": en el semiplano izquierdo es la parte de abajo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación $z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$ en un entorno del punto (1, 1). Calcular mediante una aproximación lineal el valor de h(2.01, 0.97), siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

> **Respuesta:** $z_0 = 0$; $\nabla f(1, 1) = (-2, 0)$; $h(2, 1) = 0$, $\nabla h(2, 1) = (-2, 4)$; $h(2.01, 0.97) \approx -0.14$.
>
> **Planteo:** $F(u, v, z) = z^3u + zv^2 + u^2 - 1$.
> **Punto:** en $(u, v) = (1, 1)$: $z^3 + z + 1 - 1 = z(z^2 + 1) = 0$; como $z^2 + 1 > 0$, la única raíz real es **$z_0 = 0$**. Punto (1, 1, 0).
> **Derivadas de F:** $F'_u = z^3 + 2u$, $F'_v = 2zv$, $F'_z = 3z^2u + v^2$. En (1, 1, 0): $F'_u = 2$, $F'_v = 0$, $F'_z = 0 + 1 = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** (i) $F(1, 1, 0) = 0$; (ii) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Entonces $z = f(u,$

v) es C^1 en un entorno de (1, 1), con f(1, 1) = 0, $f_u(1, 1) = -2/1 = -2$ y $f_v(1, 1) = -0/1 = 0$.
Dónde centrar h: necesitamos (x, y) cerca de (2.01, 0.97) con $(x - y^2, x^2 - 3y) = (1, 1)$. De la primera, $x = 1 + y^2$; en la segunda, $(1 + y^2)^2 - 3y = 1$, o sea $y^4 + 2y^2 - 3y = y(y - 1)(y^2 + y + 3) = 0$: y = 0 (x = 1) o y = 1 (x = 2). El que está cerca es **(2, 1)**, y h(2, 1) = f(1, 1) = 0.
Regla de la cadena: f es diferenciable en (1, 1) y la interior es polinómica, así que h es diferenciable en (2, 1). Con $U = x - y^2$, $V = x^2 - 3y$: $U_x = 1$, $U_y = -2y = -2$, $V_x = 2x = 4$, $V_y = -3$. $h_x(2, 1) = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 4 = -2$; $h_y(2, 1) = (-2)(-2) + 0\cdot(-3) = 4$.
Aproximación lineal: $h(x, y) \approx 0 - 2(x - 2) + 4(y - 1)$. Con (2.01, 0.97): $-2(0.01) + 4(-0.03) = -0.02 - 0.12 =$ **−0.14**.
Trampa: el enunciado no da z_0 ni el punto donde centrar h: los dos hay que deducirlos (y justificar que $z_0 = 0$ es la única opción). No centres en (2.01, 0.97) ni en (1, 1).

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie $\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$ en $A = (1, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto (0, −1, 2) es tangente a la superficie de ecuación $\vec{X} = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Respuesta: $y_0 = 2$, r_0: $\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$; Π: $2y + z = 0$; $r_0 \cap \Pi = \{(6, -11/2, 11)\}$.

Paso 1, el punto A: $A \in \Sigma$ pide $2\cdot 1^2 + 1\cdot y_0 - y_0^2 = 0$, o sea $y_0^2 - y_0 - 2 = 0$, $y_0 = 2$ o $y_0 = -1$. Como Σ exige y > 0, **$y_0 = 2$** y A = (1, 2, 1).
Paso 2, recta normal: $G(x, y, z) = 2z^2 + xy - y^2$ es C^1; $\nabla G = (y, x - 2y, 4z)$, y en A: $\nabla G(A) = (2, -3, 4) \neq \vec{0}$. Entonces r_0: **$\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$**, $t \in \mathbb{R}$.
Paso 3, parámetros de (0, −1, 2): $u^2 + v = 0$, $uv = -1$, $u^2 + v^2 = 2$. De la primera $v = -u^2$, y en la segunda $-u^3 = -1$, u = 1 (única raíz real), v = −1; se comprueba $u^2 + v^2 = 2$ ✓.
Paso 4, plano tangente Π: $\vec{X}_u = (2u, v, 2u) = (2, -1, 2)$, $\vec{X}_v = (1, u, 2v) = (1, 1, -2)$. $\vec{N} = ((-1)(-2) - 2\cdot 1, 2\cdot 1 - 2\cdot(-2), 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = (0, 6, 3) \neq \vec{0}$ (punto regular), proporcional a (0, 2, 1). Π: $2(y + 1) + (z - 2) = 0$, o sea **$2y + z = 0$**.
Paso 5, intersección: reemplazo r_0 en Π: $2(2 - 3t) + (1 + 4t) = 5 - 2t = 0$, $t = 5/2$. Punto: $(1 + 5, 2 - 15/2, 1 + 10) =$ **(6, −11/2, 11)**. Control: $2(-11/2) + 11 = 0$ ✓. Como r_0 no es paralela a Π ($\nabla G(A) \cdot (0, 2, 1) = -2 \neq 0$), la intersección es ese único punto.
Trampa: la condición y > 0 está para descartar $y_0 = -1$; si no la usás tenés dos rectas y dos respuestas. Y la componente z de $\vec{X}_u$ es 2u (de $u^2 + v^2$), no 0.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Respuesta: A = (1, −1), con f(A) = 1. $Hf(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, det = −12 < 0: punto silla, no hay extremo relativo.

Planteo: f es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto). Su polinomio de Taylor de orden 2 en A = (a, b) es $p_2(x, y) = f(A) + \nabla f(A)\cdot(x - a, y - b) + \tfrac{1}{2}(x - a, y - b)\, Hf(A)\, (x - a, y - b)^t$, y por construcción tiene, en A, el mismo valor, el mismo gradiente y el mismo hessiano que f. Entonces $\nabla p_2(A) = \nabla f(A)$ y $Hp_2 = Hf(A)$.
Hallar A: como A es crítico, $\nabla f(A) = 0$, o sea $\nabla p_2(A) = 0$. Con $\nabla p_2 = (2x + 4y + 2, 4x + 2y - 2)$: el sistema $2x + 4y = -2$, $4x + 2y = 2$ equivale a $x + 2y = -1$, $2x + y = 1$. De la primera $x = -1 - 2y$; en la segunda, $-2 - 4y + y = 1$, $y = -1$ y x = 1. Como el sistema tiene determinante $2\cdot 2 - 4\cdot 4 = -12 \neq 0$, la solución es única: **A = (1, −1)**.

Valor: $f(A) = p_2(1, -1) = 1 - 4 + 2 + 1 + 2 - 1 = 1$.

Hessiano: $Hf(A) = Hp_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 4 - 16 = -12 < 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.

Conclusión: $\det Hf(A) < 0$, así que $A = (1, -1)$ es un **punto silla**: f **no** tiene extremo relativo en A (aunque $f(A) = 1$ y $\nabla f(A) = 0$).

Trampa: p_2 está desarrollado en potencias de x e y, no de $(x - a, y - b)$: A no es el origen ni sale de mirar los coeficientes. Se encuentra pidiendo $\nabla p_2(A) = 0$, que es lo que traduce "A es punto crítico de f".

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = 2x + 3y^2$ y sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$. Halle los valores mínimo y máximo absolutos que alcanza f sobre la frontera de D.

Respuesta: Sobre ∂D: máximo absoluto 10/3 en $(1/3, 2\sqrt{2}/3)$; mínimo absoluto -2 en $(-1, 0)$.

Planteo: D es el semidisco superior cerrado, y la consigna pide los extremos de f restringida a su **frontera** ∂D, que tiene dos tramos: el segmento $S = \{y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$ y el arco $A = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, que se unen en las esquinas $(\pm 1, 0)$.

Existencia: ∂D es cerrado (toda frontera lo es) y acotado (está contenido en D), o sea compacto; f es polinómica, continua. Por Weierstrass, f alcanza máximo y mínimo absolutos sobre ∂D.

Segmento S: $f(x, 0) = 2x$, $x \in [-1, 1]$, estrictamente creciente: sin críticos interiores; los candidatos son las esquinas, $f(-1, 0) = -2$ y $f(1, 0) = 2$.

Arco A, regularidad: $g = x^2 + y^2 - 1$, $\nabla g = (2x, 2y) \neq \vec{0}$ sobre A (sólo se anula en el origen).

Arco A, Lagrange: $\nabla f = (2, 6y) = \lambda(2x, 2y)$. En el arco abierto ($y > 0$) la segunda ecuación da $\lambda = 3$, y la primera $2 = 6x$: $x = 1/3$, $y = \sqrt{(1 - 1/9)} = 2\sqrt{2}/3$. $f(1/3, 2\sqrt{2}/3) = 2/3 + 3 \cdot 8/9 = 2/3 + 8/3 = 10/3$. (El sistema completo da también $(1/3, -2\sqrt{2}/3)$, con $y < 0$, que no está en A.) Las puntas de A son las esquinas, ya evaluadas.

Control por sustitución en A: $y^2 = 1 - x^2$ da $f = 2x + 3 - 3x^2 = h(x)$, $x \in [-1, 1]$; $h'(x) = 2 - 6x = 0$ en $x = 1/3$, $h(1/3) = 10/3$, $h(-1) = -2$, $h(1) = 2$ ✓.

Comparación: candidatos -2 en $(-1, 0)$, 2 en $(1, 0)$ y 10/3 en $(1/3, 2\sqrt{2}/3)$.

Resultado: sobre la frontera de D, máximo absoluto **10/3** en **$(1/3, 2\sqrt{2}/3)$** y mínimo absoluto **-2** en **$(-1, 0)$**.

Trampa: la frontera del semidisco no es sólo la semicircunferencia: el diámetro sobre el eje x también es frontera. Y no hay que buscar críticos del interior de D, porque se pide sobre ∂D.

3/6/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en A = (1, –1) es $p_2(x, y) = x^2 - 2xy - 5x + 4y + 8$. Halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en P = (1, –1, f(1, –1)) y una para la recta normal a la curva de nivel f(x, y) = f(1, –1) en el punto A.

> **Respuesta:** Plano tangente: z = –x + 2y + 5 (x – 2y + z = 5). Recta normal a la curva de nivel en A: (x, y) = (1, –1) + t(–1, 2), t ∈ ℝ.
>
> **Qué da el Taylor:** f es C^2, así que el polinomio de Taylor de orden 2 en A coincide con f en A y tiene las mismas derivadas primeras: $f(A) = p_2(A)$, $\nabla f(A) = \nabla p_2(A)$.
> **Valor:** $f(1, -1) = p_2(1, -1) = 1 + 2 - 5 - 4 + 8 = 2$.
> **Derivadas:** $p_x = 2x - 2y - 5$, en A vale 2 + 2 – 5 = –1; $p_y = -2x + 4$, en A vale 2. Así $\nabla f(A) = (-1, 2)$.
> **Plano tangente:** f es C^1 (es C^2), luego diferenciable, y el plano es $z = f(A) + f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0)$: **z = 2 – (x – 1) + 2(y + 1), o sea z = –x + 2y + 5**.
> **Recta normal a la curva de nivel:** $\nabla f(A) \neq \vec{0}$, así que por el teorema de la función implícita la curva de nivel f = f(A) es regular cerca de A y ∇f(A) es perpendicular a ella. La recta normal tiene director ∇f(A): **(x, y) = (1, –1) + t(–1, 2)**, t ∈ ℝ.
> **Trampa:** la recta normal a la **curva de nivel** vive en el plano (dos coordenadas) y tiene director ∇f(A); no la confundas con la recta normal al **gráfico**, que está en $\mathbb{R}^3$ con director $(f_x, f_y, -1)$. Y f(A) se obtiene evaluando p_2 en A, no es el término independiente 8.

Ejercicio 2. Sea C el arco de curva que satisface las condiciones $y - z - 1 = 0 \wedge x^2 - y + 1 = 0 \wedge z \leq 1$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos que $f(x, y, z) = e^{2z-y}$ alcanza en C y los puntos de donde estos extremos se producen.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 1, alcanzado en (1, 2, 1) y (–1, 2, 1); mínimo absoluto $1/e = e^{-1}$ en (0, 1, 0).
>
> **Planteo:** de la segunda ecuación, $y = x^2 + 1$; de la primera, $z = y - 1 = x^2$. Así que la curva se parametriza con x = t: $\vec{r}(t) = (t, t^2 + 1, t^2)$, con $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ (una componente es 1). La condición $z \leq 1$ es $t^2 \leq 1$, o sea **t ∈ [–1, 1]**; las puntas del arco son (1, 2, 1) y (–1, 2, 1).
> **Existencia:** $\vec{r}$ es continua e inyectiva en el cerrado y acotado [–1, 1], así que C es compacto; f es continua (exponencial de un polinomio). Por Weierstrass, f alcanza máximo y mínimo absolutos en C.
> **Función restringida:** $2z - y = 2t^2 - (t^2 + 1) = t^2 - 1$, así que $\varphi(t) = e^{t^2 - 1}$, t ∈ [–1, 1].
> **Análisis:** como la exponencial es estrictamente creciente, φ es máxima o mínima donde lo es $u(t) = t^2 - 1$. $\varphi'(t) = 2t \cdot e^{t^2 - 1} = 0$ sólo en t = 0, donde u = –1 (su mínimo); en las puntas t = ±1, u = 0 (su máximo).
> **Tabla:** t = 0 da (0, 1, 0), $f = e^{-1}$; t = ±1 dan (1, 2, 1) y (–1, 2, 1), $f = e^0 = 1$.
> **Resultado:** mínimo absoluto **1/e** en **(0, 1, 0)**; máximo absoluto **1**, alcanzado en dos puntos: **(1, 2, 1) y (–1, 2, 1)**.
> **Trampa:** el máximo está en las puntas del arco, donde φ′ no se anula (φ′(±1) = ±2). Si sólo buscás críticos (derivando o con Lagrange) te queda únicamente el mínimo. Y el máximo se alcanza en dos puntos, no en uno.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 + y^2}$. Sean D el dominio natural de f y sea $N_k(f)$ el conjunto de nivel k de f. Grafique los conjuntos $N_0(f)$, $N_{1/4}(f)$ y $N_1(f)$, y explique por qué lo obtenido implica que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

> **Respuesta:** $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. $N_0 = \{x = 0, y \neq 0\} \cup \{x = -2\}$ (eje y sin el origen y la recta $x = -2$). $N_{1/4}$: hipérbola $(x + 2)^2/4 - y^2/8 = 1$ sin el origen (centro $(-2, 0)$, vértices $(0, 0)$ y $(-4, 0)$). N_1: circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ sin el origen. Los tres conjuntos tienen puntos tan cerca de $(0, 0)$ como se quiera y sobre ellos f vale 0, 1/4 y 1: si existiera el límite L, tendría que ser $L = 0 = 1/4 = 1$, absurdo. No existe el límite.
>
> **Dominio:** el denominador $2x^2 + y^2$ es suma de cuadrados con coeficientes positivos y se anula sólo en $(0, 0)$, así que $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
> **Planteo:** $N_k(f) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$. Pasando el denominador multiplicando (no se anula en D) queda una ecuación polinómica; al final siempre hay que sacar el origen.
> **N_0:** $x^2 + 2x = 0 \iff x(x + 2) = 0 \iff x = 0$ o $x = -2$. $N_0 = \{x = 0, y \neq 0\} \cup \{x = -2\}$: el eje y con el origen hueco y la recta vertical $x = -2$ entera.
> **$N_{1/4}$:** $4(x^2 + 2x) = 2x^2 + y^2 \iff 2x^2 + 8x - y^2 = 0 \iff 2(x + 2)^2 - y^2 = 8 \iff (x + 2)^2/4 - y^2/8 = 1$. Hipérbola de centro $(-2, 0)$, eje real horizontal, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, vértices $(0, 0)$ y $(-4, 0)$ y asíntotas $y = \pm\sqrt{2}\,(x + 2)$. $N_{1/4}$ es esa hipérbola **sin el vértice (0, 0)**.
> **N_1:** $x^2 + 2x = 2x^2 + y^2 \iff x^2 - 2x + y^2 = 0 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 1$: circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, **sin el origen**.
> **Gráfico:** las tres curvas llegan al origen y en las tres queda hueco; además las tres son tangentes al eje y en el origen (el eje y es parte de N_0, y la rama derecha de la hipérbola y la circunferencia tienen tangente vertical en $(0, 0)$).
> **Por qué no existe el límite:** si existiera $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$, el límite restringido a cualquier subconjunto de D que tenga a $(0, 0)$ como punto de acumulación también valdría L. El origen es punto de acumulación de N_0 (los puntos $(0, t)$, $t \to 0$), de $N_{1/4}$ (los $(-2 + 2\cosh s, 2\sqrt{2}\,\operatorname{senh} s)$, $s \to 0$) y de N_1 (los $(1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \to 0^+$). Sobre cada conjunto f es constante, así que los límites restringidos son 0, 1/4 y 1. Tendría que ser $L = 0$ y $L = 1$ a la vez: absurdo. **No existe el límite.** (Alcanza con dos niveles distintos que se acumulen en el origen.)
> **Trampa:** decir que las curvas "pasan por" $(0, 0)$ como si el origen fuera de D. Lo que se usa es que $(0, 0)$ es punto de acumulación de cada conjunto de nivel, no que pertenece; por eso hay que dibujarlo hueco y exhibir puntos del conjunto que se acercan.

Ejercicio 4. Sea $v = g(u)$ la función de clase C^1 en un entorno de $u_0 = 0$ definida implícitamente por la ecuación $e^u + v + v^2 = 1$ que satisface la condición $g(0) \neq 0$. Halle la máxima derivada direccional de $f(x, y) = g(2x - y^2)$ en el punto $P = (2, -2)$ y el versor en el cual ésta se produce.

> **Respuesta:** $g(0) = -1$, $g'(0) = 1$; $\nabla f(2, -2) = (2, 4)$; máxima derivada direccional $2\sqrt{5}$, en el versor $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
>
> **Planteo:** $F(u, v) = e^u + v + v^2 - 1$.
> **Punto:** en $u = 0$: $1 + v + v^2 = 1$, o sea $v(v + 1) = 0$: $v = 0$ o $v = -1$. La condición $g(0) \neq 0$ deja $\mathbf{v_0 = -1}$.
> **Derivadas de F:** $F'_v = 1 + 2v$, $F'_u = e^u$. En $(0, -1)$: $F'_v = 1 - 2 = -1$, $F'_u = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** (i) $F(0, -1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^2$ (exponencial y polinomio); (iii) $F'_v(0, -1) = -1 \neq 0$.
> Entonces g es C^1 en un entorno de 0, $g(0) = -1$ y $g'(0) = -\dfrac{F'_u}{F'_v} = -1/(-1) = \mathbf{1}$.
> **Regla de la cadena:** en $P = (2, -2)$ el argumento vale $2\cdot 2 - (-2)^2 = 0$, justo donde g está definida. El

argumento es polinómico y g es diferenciable en 0, así que f es diferenciable en P y $\nabla f(x, y) = g'(2x - y^2)\cdot(2, -2y)$. En P: $\nabla f(2, -2) = 1\cdot(2, 4) =$ **(2, 4)**.

Máxima derivada direccional: como f es diferenciable, $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v} \le \|\nabla f(P)\|$, con igualdad cuando $\check{v} = \nabla f/\|\nabla f\|$. $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{(16 + 4)} = \sqrt{20} =$ **$2\sqrt{5}$**, en el versor **$\check{\mathbf{v}} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$**.

Trampa: si no usás $g(0) \neq 0$ y tomás $v_0 = 0$, $F'_v = 1$ y $g'(0) = -1$: el gradiente cambia de signo y el versor queda al revés. Y la máxima derivada es un número ($\|\nabla f\|$), no el vector.

Ejercicio 5. Sean $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $\vec{h}(u, v) = (uv, v + u, v - u) \wedge \vec{f}(x, y, z) = (x + z, yz, x^2 + z^2)$. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{f} \circ \vec{h}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{f} \circ \vec{h}(1, -1)$.

Respuesta: $P = (-3, 0, 5)$; $\vec{X}_u = (-2, -2, 6)$, $\vec{X}_v = (2, -2, -6)$, $\vec{N} = (24, 0, 8) \parallel (3, 0, 1)$. Plano tangente: $3x + z = -4$.

Punto: $\vec{h}(1, -1) = (1\cdot(-1), -1 + 1, -1 - 1) = (-1, 0, -2)$ y $P = \vec{f}(-1, 0, -2) = (-1 - 2, 0\cdot(-2), 1 + 4) =$ **(−3, 0, 5)**.

Hipótesis: $\vec{h}$ y $\vec{f}$ son polinómicas, por lo tanto diferenciables; vale la regla de la cadena $D\vec{X}(1, -1) = D\vec{f}(-1, 0, -2)\cdot D\vec{h}(1, -1)$.

Jacobianas: $D\vec{h}(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, en $(1, -1)$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & z & y \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$, en $(-1, 0, -2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Producto (3×3 por 3×2): fila 1: $(1\cdot(-1) + 1\cdot(-1), 1\cdot1 + 1\cdot1) = (-2, 2)$; fila 2: $(-2\cdot1, -2\cdot1) = (-2, -2)$; fila 3: $(-2\cdot(-1) - 4\cdot(-1), -2\cdot1 - 4\cdot1) = (6, -6)$. Entonces $D\vec{X}(1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$: la primera columna es **$\vec{X}_u = (-2, -2, 6)$** y la segunda **$\vec{X}_v = (2, -2, -6)$**.

Normal: $\vec{X}_u \times \vec{X}_v = ((-2)(-6) - 6(-2), 6\cdot2 - (-2)(-6), (-2)(-2) - (-2)\cdot2) = (24, 0, 8) \neq \vec{0}$. Como la normal no se anula, P es punto regular de Σ y el plano tangente existe. Usamos $\vec{n} = (3, 0, 1)$.

Plano: $3(x + 3) + 0\cdot(y - 0) + (z - 5) = 0$, o sea **$3x + z = -4$**. Control: $3(-3) + 5 = -4$ ✓.

Trampa: evaluar $D\vec{f}$ en $(1, -1)$ en vez de en $\vec{h}(1, -1) = (-1, 0, -2)$. La jacobiana de afuera se evalúa siempre en la imagen del punto. Y no olvidar chequear $\vec{N} \neq \vec{0}$: si se anulara no habría plano tangente garantizado.

3/6/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $u = g(v)$ la función de clase C^1 en un entorno de $v_0 = 0$ definida implícitamente por la ecuación $e^v + u + u^2 = 1$ que satisface la condición $g(0) \neq 0$. Halle la máxima derivada direccional de $f(x, y) = g(2y - x^2)$ en el punto $P = (-2, 2)$ y el versor en el cual ésta se produce.

> **Respuesta:** $g(0) = -1$, $g'(0) = 1$; $\nabla f(-2, 2) = (4, 2)$; máxima derivada direccional $2\sqrt{5}$, en el versor $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.
>
> **Planteo:** $F(v, u) = e^v + u + u^2 - 1$.
> **Punto:** en $v = 0$: $1 + u + u^2 = 1$, o sea $u(u + 1) = 0$: $u = 0$ o $u = -1$. La condición $g(0) \neq 0$ deja $\mathbf{u_0 = -1}$.
> **Derivadas de F:** $F'_u = 1 + 2u$, $F'_v = e^v$. En $(0, -1)$: $F'_u = 1 - 2 = -1$, $F'_v = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** (i) $F(0, -1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^2$ (exponencial y polinomio); (iii) $F'_u(0, -1) = -1 \neq 0$.
> Entonces g es C^1 en un entorno de 0, $g(0) = -1$ y $g'(0) = -\dfrac{F'_v}{F'_u} = -1/(-1) = \mathbf{1}$.
> **Regla de la cadena:** en $P = (-2, 2)$ el argumento vale $2 \cdot 2 - (-2)^2 = 0$, justo donde g está definida. El argumento es polinómico y g es diferenciable en 0, así que f es diferenciable en P y $\nabla f(x, y) = g'(2y - x^2) \cdot (-2x, 2)$. En P: $\nabla f(-2, 2) = 1 \cdot (4, 2) = \mathbf{(4, 2)}$.
> **Máxima derivada direccional:** como f es diferenciable, $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v} \leq \|\nabla f(P)\|$, con igualdad cuando $\check{v} = \nabla f / \|\nabla f\|$. $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{(16 + 4)} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}$, en el versor $\boldsymbol{\check{v} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})}$.
> **Trampa:** si no usás $g(0) \neq 0$ y tomás $u_0 = 0$, $F'_u = 1$ y $g'(0) = -1$: el gradiente cambia de signo y el versor queda al revés. Y la máxima derivada es un número ($\|\nabla f\|$), no el vector.

Ejercicio 2. Sea f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (-1, 1)$ es $p_2(x, y) = y^2 - 2xy - 5y + 4x + 8$. Halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en $P = (-1, 1, f(-1, 1))$ y una para la recta normal a la curva de nivel $f(x, y) = f(-1, 1)$ en el punto A.

> **Respuesta:** Plano tangente: $z = 2x - y + 5$ ($2x - y - z = -5$). Recta normal a la curva de nivel en A: $(x, y) = (-1, 1) + t(2, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **Qué da el Taylor:** f es C^2, así que el polinomio de Taylor de orden 2 en A coincide con f en A y tiene las mismas derivadas primeras: $f(A) = p_2(A)$, $\nabla f(A) = \nabla p_2(A)$.
> **Valor:** $f(-1, 1) = p_2(-1, 1) = 1 + 2 - 5 - 4 + 8 = 2$.
> **Derivadas:** $p_x = -2y + 4$, en A vale 2; $p_y = 2y - 2x - 5$, en A vale $2 + 2 - 5 = -1$. Así $\nabla f(A) = (2, -1)$.
> **Plano tangente:** f es C^1 (es C^2), luego diferenciable, y el plano es $z = f(A) + f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0)$: $\mathbf{z = 2 + 2(x + 1) - (y - 1)}$, **o sea** $\mathbf{z = 2x - y + 5}$.
> **Recta normal a la curva de nivel:** $\nabla f(A) \neq \vec{0}$, así que por el teorema de la función implícita la curva de nivel $f = f(A)$ es regular cerca de A y $\nabla f(A)$ es perpendicular a ella. La recta normal tiene director $\nabla f(A)$: $\mathbf{(x, y) = (-1, 1) + t(2, -1)}$, $t \in \mathbb{R}$.
> **Trampa:** la recta normal a la **curva de nivel** vive en el plano (dos coordenadas) y tiene director $\nabla f(A)$; no la confundas con la recta normal al **gráfico**, que está en $\mathbb{R}^3$ con director $(f_x, f_y, -1)$. Y $f(A)$ se obtiene evaluando p_2 en A, no es el término independiente 8.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \dfrac{y^2 + 2y}{x^2 + 2y^2}$. Sean D el dominio natural de f y sea $N_k(f)$ el conjunto de nivel k de f. Grafique los conjuntos $N_0(f)$, $N_{1/4}(f)$ y $N_1(f)$, y explique por qué lo obtenido implica que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

> **Respuesta:** $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. $N_0 = \{y = 0, x \neq 0\} \cup \{y = -2\}$ (eje x sin el origen y la recta $y = -2$). $N_{1/4}$: hipérbola $(y + 2)^2/4 - x^2/8 = 1$ sin el origen (centro $(0, -2)$, vértices $(0, 0)$ y $(0, -4)$). N_1: circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ sin el origen. Los tres conjuntos tienen puntos tan cerca de $(0, 0)$ como se quiera y sobre ellos f vale 0, 1/4 y 1: si existiera el límite L, tendría que ser $L = 0 = 1/4 = 1$, absurdo. No existe el límite.
>
> **Dominio:** el denominador $x^2 + 2y^2$ es suma de cuadrados con coeficientes positivos y se anula sólo en $(0, 0)$, así que $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
> **Planteo:** $N_k(f) = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$. Pasando el denominador multiplicando (no se anula en D) queda una ecuación polinómica; al final siempre hay que sacar el origen.
> **N_0:** $y^2 + 2y = 0 \iff y(y + 2) = 0 \iff y = 0$ o $y = -2$. $N_0 = \{y = 0, x \neq 0\} \cup \{y = -2\}$: el eje x con el origen hueco y la recta horizontal $y = -2$ entera.
> **$N_{1/4}$:** $4(y^2 + 2y) = x^2 + 2y^2 \iff 2y^2 + 8y - x^2 = 0 \iff 2(y + 2)^2 - x^2 = 8 \iff (y + 2)^2/4 - x^2/8 = 1$. Hipérbola de centro $(0, -2)$, eje real vertical, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, vértices $(0, 0)$ y $(0, -4)$ y asíntotas $y + 2 = \pm(\sqrt{2}/2)\, x$. $N_{1/4}$ es esa hipérbola **sin el vértice (0, 0)**.
> **N_1:** $y^2 + 2y = x^2 + 2y^2 \iff x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$: circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, **sin el origen**.
> **Gráfico:** las tres curvas llegan al origen y en las tres queda hueco; además las tres son tangentes al eje x en el origen (el eje x es parte de N_0, y la rama de arriba de la hipérbola y la circunferencia tienen tangente horizontal en $(0, 0)$).
> **Por qué no existe el límite:** si existiera $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$, el límite restringido a cualquier subconjunto de D que tenga a $(0, 0)$ como punto de acumulación también valdría L. El origen es punto de acumulación de N_0 (los puntos $(t, 0)$, $t \to 0$), de $N_{1/4}$ (los $(2\sqrt{2}\,\text{senh}\, s, -2 + 2\cosh s)$, $s \to 0$) y de N_1 (los $(\text{sen}\, t, 1 - \cos t)$, $t \to 0^+$). Sobre cada conjunto f es constante, así que los límites restringidos son 0, 1/4 y 1. Tendría que ser $L = 0$ y $L = 1$ a la vez: absurdo. **No existe el límite.** (Alcanza con dos niveles distintos que se acumulen en el origen.)
> **Trampa:** decir que las curvas "pasan por" $(0, 0)$ como si el origen fuera de D. Lo que se usa es que $(0, 0)$ es punto de acumulación de cada conjunto de nivel, no que pertenece; por eso hay que dibujarlo hueco y exhibir puntos del conjunto que se acercan.

Ejercicio 4. Sean $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $\vec{h}(u, v) = (v - u, uv, v + u)$ ∧ $\vec{f}(x, y, z) = (xz, y + z, x^2 + z^2)$. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{f} \circ \vec{h}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{f} \circ \vec{h}(-1, 1)$.

> **Respuesta:** $P = (0, -1, 4)$; $\vec{X}_u = (2, 2, -4)$, $\vec{X}_v = (2, 0, 4)$, $\vec{N} = (8, -16, -4) \parallel (2, -4, -1)$. Plano tangente: $2x - 4y - z = 0$.
>
> **Punto:** $\vec{h}(-1, 1) = (1 + 1, -1\cdot 1, 1 - 1) = (2, -1, 0)$ y $P = \vec{f}(2, -1, 0) = (2\cdot 0, -1 + 0, 4 + 0) =$ **$(0, -1, 4)$**.
> **Hipótesis:** $\vec{h}$ y $\vec{f}$ son polinómicas, por lo tanto diferenciables; vale $D\vec{X}(-1, 1) = D\vec{f}(2, -1, 0)\cdot D\vec{h}(-1, 1)$.
> **Jacobianas:** $D\vec{h}(u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en $(-1, 1)$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$, en $(2, -1, 0)$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Producto (3×3 por 3×2): fila 1: 2·(1, 1) = (2, 2); fila 2: (1, −1) + (1, 1) = (2, 0); fila 3: 4·(−1, 1) = (−4, 4). $D\vec{X}(-1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$: $\vec{X_u} = (2, 2, -4)$, $\vec{X_v} = (2, 0, 4)$.

Normal: $\vec{X_u} \times \vec{X_v} = (2\cdot 4 - (-4)\cdot 0, (-4)\cdot 2 - 2\cdot 4, 2\cdot 0 - 2\cdot 2) = (8, -16, -4) \neq \vec{0}$, así que P es punto regular. Usamos $\vec{n} = (2, -4, -1)$.

Plano: $2(x - 0) - 4(y + 1) - (z - 4) = 0$, o sea **$2x - 4y - z = 0$**. Control: $0 + 4 - 4 = 0$ ✓.

Trampa: evaluar $D\vec{f}$ en $(-1, 1)$ en vez de en $\vec{h}(-1, 1) = (2, -1, 0)$, o armar el producto en el orden $D\vec{h}\cdot D\vec{f}$ (ni siquiera da las dimensiones). La de afuera va a la izquierda.

Ejercicio 5. Sea C el arco de curva que satisface las condiciones $x - z - 1 = 0 \wedge y^2 - x + 1 = 0 \wedge z \leq 1$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos que $f(x, y, z) = e^{2z-x}$ alcanza en C y los puntos de donde estos extremos se producen.

Respuesta: Máximo absoluto 1, alcanzado en (2, 1, 1) y (2, −1, 1); mínimo absoluto $1/e = e^{-1}$ en (1, 0, 0).

Planteo: de la segunda ecuación, $x = y^2 + 1$; de la primera, $z = x - 1 = y^2$. Así que la curva se parametriza con $y = t$: $\vec{r}(t) = (t^2 + 1, t, t^2)$, con $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ (una componente es 1). La condición $z \leq 1$ es $t^2 \leq 1$, o sea **$t \in [-1, 1]$**; las puntas del arco son (2, 1, 1) y (2, −1, 1).

Existencia: $\vec{r}$ es continua e inyectiva en el cerrado y acotado $[-1, 1]$, así que C es compacto; f es continua (exponencial de un polinomio). Por Weierstrass, f alcanza máximo y mínimo absolutos en C.

Función restringida: $2z - x = 2t^2 - (t^2 + 1) = t^2 - 1$, así que $\varphi(t) = e^{t^2 - 1}$, $t \in [-1, 1]$.

Análisis: como la exponencial es estrictamente creciente, φ es máxima o mínima donde lo es $u(t) = t^2 - 1$. $\varphi'(t) = 2t\cdot e^{t^2 - 1} = 0$ sólo en $t = 0$, donde $u = -1$ (su mínimo); en las puntas $t = \pm 1$, $u = 0$ (su máximo).

Tabla: $t = 0$ da (1, 0, 0), $f = e^{-1}$; $t = \pm 1$ dan (2, 1, 1) y (2, −1, 1), $f = e^0 = 1$.

Resultado: mínimo absoluto **1/e** en **(1, 0, 0)**; máximo absoluto **1**, alcanzado en dos puntos: **(2, 1, 1) y (2, −1, 1)**.

Trampa: el máximo está en las puntas del arco, donde φ′ no se anula ($\varphi'(\pm 1) = \pm 2$). Si sólo buscás críticos (derivando o con Lagrange) te queda únicamente el mínimo. Y el máximo se alcanza en dos puntos, no en uno.

15/5/23, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}$ $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 $(x, y) = (0, 0) \}$. Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

> **Respuesta:** $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, y fuera del origen $f'_x = \operatorname{sen} y\,(3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$, $f'_y = x[(x^2 + 3y^2) \cos y - 6y \operatorname{sen} y]/(x^2 + 3y^2)^2$: existen en todo punto. f no es continua en (0, 0): por $y = mx$ el límite es $m/(1 + 3m^2)$ (0 por $y = 0$, 1/4 por $y = x$).
>
> **Parciales fuera del origen:** si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, en un entorno de ese punto que no contiene al origen $f = x \operatorname{sen} y/(x^2 + 3y^2)$, cociente de funciones C^1 con denominador distinto de 0 ($x^2 + 3y^2 = 0$ sólo en el origen). Ahí las parciales existen y salen con la regla del cociente: $f'_x = [\operatorname{sen} y\,(x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 2x]/(x^2 + 3y^2)^2 = \operatorname{sen} y\,(3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$ y $f'_y = [x \cos y\,(x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 6y]/(x^2 + 3y^2)^2$.
> **Parciales en el origen (por definición, no con las fórmulas):** $f(h, 0) = h \operatorname{sen} 0/h^2 = 0$ y $f(0, k) = 0 \cdot \operatorname{sen} k/(3k^2) = 0$. Entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} (f(h, 0) - f(0, 0))/h = \lim 0/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} (f(0, k) - f(0, 0))/k = 0$. **Existen en todo punto.**
> **Continuidad en (0, 0):** $f(0, 0) = 0$; busco dos caminos con límites distintos. Sobre la recta $y = mx$, con $x \neq 0$: $f(x, mx) = x \operatorname{sen}(mx)/((1 + 3m^2)x^2) = \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + 3m^2} \to m/(1 + 3m^2)$, porque $\operatorname{sen}(mx)/x \to m$.
> **Dos caminos:** por $y = 0$ ($m = 0$) el límite es 0 y por $y = x$ ($m = 1$) es 1/4. Dan distinto, así que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y **f no es continua en (0, 0)**.
> **Trampa:** en $\mathbb{R}^2$ la existencia de las derivadas parciales no implica continuidad (este ejercicio es justamente el contraejemplo). Y no calcules las parciales en el origen reemplazando (0, 0) en las fórmulas de afuera: ahí no valen (ni siquiera están definidas), tenés que ir al cociente incremental.

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, −4) y la dirección en la cual este valor se produce.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$. Máxima derivada direccional: $\sqrt{109}/4$, en la dirección $\check{v} = (10, -3)/\sqrt{109}$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(2, 1) = (2 - 1^2, -2 \cdot 2 \cdot 1) = (1, -4)$: justo el punto donde se pide la derivada de f.
> **Qué dice p_1:** $p_1(x, y) = h(2, 1) + h_x(2, 1)(x - 2) + h_y(2, 1)(y - 1)$. Como es lineal, sus coeficientes son las derivadas: **$\nabla h(2, 1) = (4, -2)$** (y $h(2, 1) = p_1(2, 1) = 7$).
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en (1, −4); $\vec{g}$ es polinómica. Vale la cadena: $\nabla h(2, 1) = \nabla f(1, -4) \cdot D\vec{g}(2, 1)$.
> **Jacobiana:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$, y en (2, 1) da $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, con determinante $-4 - 4 = -8 \neq 0$: el sistema tiene solución única.
> **Sistema:** con $\nabla f(1, -4) = (a, b)$: $(a, b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = (a - 2b, -2a - 4b) = (4, -2)$. De la primera, $a = 4 + 2b$; en la segunda, $-8 - 4b - 4b = -2$, así que $b = -3/4$ y $a = 5/2$. **$\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$**.
> **Máximo:** f diferenciable, entonces $f'((1, -4), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v} \leq \|\nabla f\|$, con igualdad en la dirección de ∇f. $\|\nabla f\| =$

$\sqrt{(25/4 + 9/16)} = \sqrt{(109/16)} = \mathbf{\sqrt{109}/4}$, y la dirección es $\check{\mathbf{v}} = \mathbf{(5/2, -3/4)/(\sqrt{109}/4) = (10, -3)/\sqrt{109}}$.
Trampa: el 1 de p_1 no es h(2, 1) (es 7): p_1 está escrito en x, y sin centrar. Y en el producto va el gradiente (fila) a la izquierda de la jacobiana; si lo ponés a la derecha te queda otro sistema y otro ∇f.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización $\vec{X} = (2u^2, u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto $(-1, -1, 1)$.

Respuesta: r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$. Plano tangente: $x + y - z = -3$. Hay un único punto de intersección: $(-10/7, 1/7, 12/7)$.
Σ_2 en cartesianas: $\vec{X} = (2u^2, u, v)$ dice $y = u$, $x = 2u^2$ y z libre: Σ_2 es el cilindro $x = 2y^2$.
El punto: con $y = 1$, $x_0 = 2 \cdot 1^2 = 2$ y, de Σ_1, $z_0 = 1 - x_0 + y^2 = 1 - 2 + 1 = 0$. P = (2, 1, 0).
Parametrización de C: con $y = t$, $x = 2t^2$ y $z = 1 - x + y^2 = 1 - t^2$. $\vec{g}(t) = (2t^2, t, 1 - t^2)$, de clase C^1, con $\vec{g}(1) = P$.
Tangente: $\vec{g}'(t) = (4t, 1, -2t)$, $\vec{g}'(1) = (4, 1, -2) \neq \vec{0}$. Control: $\nabla(x - y^2 + z) = (1, -2y, 1) = (1, -2, 1)$ y $\nabla(x - 2y^2) = (1, -4y, 0) = (1, -4, 0)$ en P; su producto vectorial es $(4, 1, -2)$ ✓. Entonces r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Plano tangente a xyz = 1 en (–1, –1, 1): el punto está en la superficie ($(-1)(-1)(1) = 1$ ✓); $H = xyz$ es C^1 y $\nabla H = (yz, xz, xy) = (-1, -1, 1) \neq \vec{0}$. Plano: $-(x + 1) - (y + 1) + (z - 1) = 0$, o sea $x + y - z = -3$.
¿Cuántos puntos? $(4, 1, -2) \cdot (1, 1, -1) = 7 \neq 0$: r_0 no es paralela al plano, así que lo corta en exactamente un punto.
Cuenta: $(2 + 4\lambda) + (1 + \lambda) - (-2\lambda) = -3$, $3 + 7\lambda = -3$, $\lambda = -6/7$.
Resultado: el único punto es **(–10/7, 1/7, 12/7)**. Control: $-10/7 + 1/7 - 12/7 = -21/7 = -3$ ✓.
Trampa: "todos los puntos" no quiere decir que haya varios: hay que justificar que es uno solo mirando el producto escalar de la dirección con la normal. Si diera 0, habría que ver si la recta está contenida en el plano (infinitos puntos) o es paralela sin tocarlo (ninguno).

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = 2y^2 + \frac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$. Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Respuesta: Puntos críticos: (0, 1), punto silla (no hay extremo); (2, 1), mínimo local (con valor f(2, 1) = 4).
Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{(x, y): y \neq 0\}$; los extremos locales están entre los puntos con $\nabla f = 0$.
Derivadas: $f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f_y = 4y - 4/y^2$.
Sistema: $f_x = 0$ da $x = 0$ o $x = 2$. $f_y = 0$ da $4y^3 = 4$, $y^3 = 1$, $y = 1$ (única raíz real: $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ y $y^2 + y + 1 > 0$). **Puntos: (0, 1) y (2, 1).**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 4 + 8/y^3$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(0, 1): $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\det = -72 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 1) = 8$).

(2, 1): $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\det = 72 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**, $f(2, 1) = 2 + 4 + 8 - 12 + 2 = 4$.

Trampa: el término $4/y$ deriva a $-4/y^2$ y otra vez a $+8/y^3$; un signo mal ahí cambia f_{yy}. Y el mínimo es sólo local: cuando $y \to 0^-$, $4/y \to -\infty$.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$. Sea C es la curva de ecuación $C : f(x + y, 2x - y) = 1$. Halle la recta normal a C en el punto $(1, -1)$.

Respuesta: $F'_w(0, 3, 1) = 6 \neq 0$, $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$. $\nabla\varphi(1, -1) = (-3/2, 0)$. Recta normal a C en $(1, -1)$: $(x, y) = (1, -1) + t(1, 0)$, es decir $y = -1$.

Planteo: $F(u, v, w) = ve^{uw} + 2vw - 9$. Primero el TFI para f, después la curva C como conjunto de nivel 1 de $\varphi(x, y) = f(x + y, 2x - y)$.

Hipótesis del TFI: (1) $F(0, 3, 1) = 3e^0 + 6 - 9 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$. (3) $F'_w = uve^{uw} + 2v \to 0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces $w = f(u, v)$ existe y es C^1 en un entorno de $(0, 3)$, con $f(0, 3) = 1$.

Derivadas de f: $F'_u = vwe^{uw} \to 3$; $F'_v = e^{uw} + 2w \to 3$. $f'_u(0, 3) = -3/6 = -1/2$ y $f'_v(0, 3) = -1/2$.

El punto está en C: $(x + y, 2x - y)$ en $(1, -1)$ da $(0, 3)$, y $f(0, 3) = 1$ ✓.

Regla de la cadena: la función interna $(x + y, 2x - y)$ es lineal (diferenciable) y f es diferenciable en $(0, 3)$, así que φ es diferenciable en $(1, -1)$ (de hecho C^1 en un entorno) con $\nabla\varphi(1, -1) = (f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2, f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot (-1)) = (-1/2 - 1, -1/2 + 1/2) =$ **$(-3/2, 0)$**.

Normal a C: C es el conjunto de nivel $\varphi = 1$, con φ de clase C^1 y $\nabla\varphi(1, -1) \neq \vec{0}$; entonces cerca de $(1, -1)$ C es una curva regular y $\nabla\varphi(1, -1)$ es perpendicular a ella. La recta normal tiene dirección $(-3/2, 0) \parallel (1, 0)$: **$(x, y) = (1, -1) + t(1, 0)$**, $t \in \mathbb{R}$, o sea **$y = -1$**. (La recta tangente es $x = 1$.)

Trampa: la normal de la curva es $\nabla\varphi$ en $(x, y) = (1, -1)$, no $\nabla f(0, 3)$: hay que pasar por la jacobiana de $(x + y, 2x - y)$. Usar $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$ directamente da la recta $y + 1 = x - 1$, que está mal.

13/5/23, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $h(x, y) = f(x-y, x+y, xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2x + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1, 1, h(1, 1))$ y que la segunda componente de $\nabla f(0, 2, 1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $(0, 2, 1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

> **Respuesta:** $\nabla f(0, 2, 1) = (-1, 2, -3)$. Dirección de máximo crecimiento: $\check{v} = (-1, 2, -3)/\sqrt{14}$. Valor máximo: $\sqrt{14}$.
>
> **Punto interior:** en $(x, y) = (1, 1)$ es $(x - y, x + y, xy) = (0, 2, 1)$.
> **Leer el plano:** $2x + z = 1$ se despeja como $z = 1 - 2x$. Como es el plano tangente al gráfico de h en $(1, 1)$, comparando con $z = h(1, 1) + h_x(1, 1)(x - 1) + h_y(1, 1)(y - 1)$: $h(1, 1) = -1$, $\mathbf{h_x(1, 1) = -2}$ y $\mathbf{h_y(1, 1) = 0}$.
> **Hipótesis:** f es C^1 en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto diferenciable en $(0, 2, 1)$; la interior es polinómica. Entonces vale la regla de la cadena en $(1, 1)$ y además $f'((0, 2, 1), \check{v}) = \nabla f(0, 2, 1) \cdot \check{v}$.
> **Jacobiana interior en (1, 1):** la fila de $x - y$ es $(1, -1)$, la de $x + y$ es $(1, 1)$ y la de xy es $(y, x) = (1, 1)$.
> **Cadena con incógnitas:** $\nabla f(0, 2, 1) = (a, 2, c)$. $h_x = f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 1 + f_3 \cdot y = a + 2 + c = -2$ y $h_y = f_1 \cdot (-1) + f_2 \cdot 1 + f_3 \cdot x = -a + 2 + c = 0$.
> **Despeje:** restando, $2a = -2$, $a = -1$; y $c = -4 - a = -3$. $\mathbf{\nabla f(0, 2, 1) = (-1, 2, -3)}$. Control: $h_y = 1 + 2 - 3 = 0$ ✓.
> **Máximo:** como f es diferenciable, $f'((0, 2, 1), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v} \leq \|\nabla f\|$, con igualdad sólo si $\check{v}$ tiene la dirección y el sentido de ∇f. $\|(-1, 2, -3)\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$. La derivada direccional máxima se da en $\mathbf{\check{v} = (-1, 2, -3)/\sqrt{14}}$ y vale $\mathbf{\sqrt{14}}$.
> **Trampa:** el punto donde vive ∇f es $(0, 2, 1) = (1 - 1, 1 + 1, 1 \cdot 1)$, no $(2, 0, 1)$ (ese es el del otro tema). Y el plano $2x + z = 1$ no tiene y: $h_y(1, 1) = 0$ es un dato, no un olvido.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = ae^{ax} - xy + b \operatorname{sen}(y) - x + y + y^2$. Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

> **Respuesta:** Sólo $a = 1$, $b = -1$: f alcanza un mínimo relativo en el origen, de valor $f(0, 0) = 1$. (Con $a = -1$, $b = -1$ el origen es crítico pero es punto silla.)
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (exponencial, seno y polinomios). Si f tiene un extremo relativo en el origen, como es diferenciable ahí, tiene que ser $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$: esa es la condición necesaria. Después el hessiano dice cuáles de esos valores dan extremo de verdad.
> **Derivadas:** $f'_x = a^2e^{ax} - y - 1$ (la derivada de ae^{ax} es $a \cdot a \cdot e^{ax}$) y $f'_y = -x + b \cos y + 1 + 2y$.
> **Condición necesaria:** $f'_x(0, 0) = a^2 - 1 = 0$, o sea $a = 1$ o $a = -1$; $f'_y(0, 0) = b + 1 = 0$, o sea $b = -1$.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = a^3e^{ax}$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = -b \operatorname{sen} y + 2$. En el origen: $H = \begin{pmatrix} a^3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 2a^3 - 1$.
> **$a = 1$, $b = -1$:** $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 1 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(0, 0) = a \cdot e^0 = \mathbf{1}$.
> **$a = -1$, $b = -1$:** $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = -3 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. Este par se descarta.

Trampa: $a^2 = 1$ da dos valores y hay que probar los dos: el gradiente nulo es necesario pero no suficiente. La respuesta a "todos los valores" es un único par, $a = 1$ y $b = -1$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \frac{\sqrt{(4x^2 - 8x + y^2)}}{\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

Respuesta: $D = \{(x - 1)^2 + y^2/4 \geq 1, x^2 + y^2 < 9\}$: el disco abierto de radio 3 con un agujero elíptico (centro (1, 0), semiejes 1 en x y 2 en y) cuyo borde sí pertenece. $\text{int } D = \{4x^2 - 8x + y^2 > 0, x^2 + y^2 < 9\}$. $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{4x^2 - 8x + y^2 = 0\}$. $\partial D \cap D = \{(x, y) : 4x^2 - 8x + y^2 = 0\}$, la elipse $(x - 1)^2 + y^2/4 = 1$.

Condiciones: $\sqrt{(4x^2 - 8x + y^2)}$ pide $4x^2 - 8x + y^2 \geq 0$. $\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}$ es raíz de índice par (radicando ≥ 0) y está en el denominador ($\neq 0$): $9 - x^2 - y^2 > 0$.
Completar cuadrados: $4x^2 - 8x + y^2 = 4(x - 1)^2 + y^2 - 4$, así que la primera condición es $(x - 1)^2 + y^2/4 \geq 1$: **afuera o sobre** la elipse E de centro (1, 0), semieje 1 en x y 2 en y (pasa por (0, 0), (2, 0), (1, 2) y (1, −2)).
D $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2/4 \geq 1, x^2 + y^2 < 9\}$.
¿La elipse queda adentro del disco? Sí: sus puntos cumplen $0 \leq x \leq 2$ y $|y| \leq 2$, así que $x^2 + y^2 \leq 4 + 4 = 8 < 9$ (el máximo exacto sobre E es 16/3). Entonces D es el disco abierto de radio 3 con un agujero: el interior de la elipse.
Gráfico de D: la circunferencia de radio 3 en punteado (no pertenece), la elipse E en trazo lleno (pertenece) y sombreado entre las dos.
Interior: $\text{int } D = \{(x, y) : 4x^2 - 8x + y^2 > 0, x^2 + y^2 < 9\}$: lo mismo sin la elipse. Un punto de E no es interior porque toda bola centrada en él tiene puntos de adentro de la elipse, donde $4x^2 - 8x + y^2 < 0$. En el gráfico, la elipse pasa a punteado.
Frontera: $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{4x^2 - 8x + y^2 = 0\}$: la circunferencia de radio 3 y la elipse, las dos en trazo lleno.
$\partial D \cap D$: la circunferencia no es de D (anula el denominador) y la elipse sí (anula el numerador, que puede valer 0). Entonces $\partial D \cap D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - 8x + y^2 = 0\}$, o sea $(x - 1)^2 + y^2/4 = 1$. No hace falta agregar $x^2 + y^2 < 9$: la elipse ya lo cumple entera.
Trampa: la raíz cuarta exige radicando ≥ 0 igual que la cuadrada, y por estar en el denominador, > 0. Y antes de decir que toda la elipse es de D hay que chequear que no se salga del disco.

Ejercicio 4. Prueba que la ecuación $x^2y + xz - e^y = 1$ define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(y_0, z_0) = (0, 1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $x_0 = g(0, 1) = 2$; $F'_x(2, 0, 1) = 1 \neq 0$. $\nabla g(0, 1) = (-3, -2)$; $g(0.05, 0.97) \approx 1.91$.

Planteo: $F(x, y, z) = x^2y + xz - e^y - 1$ y la variable a despejar es **x**: el punto dado $(y_0, z_0) = (0, 1)$ es de las variables independientes, así que x_0 hay que calcularlo.
Cálculo de x_0: en $y = 0$, $z = 1$ queda $0 + x - 1 = 1$, lineal en x: $\mathbf{x_0 = 2}$ (único).
Hipótesis del TFI: (1) $F(2, 0, 1) = 0 + 2 - 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomio menos exponencial). (3) $F'_x = 2xy + z$, que en (2, 0, 1) vale $0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces existe $x = g(y, z)$ de clase C^1 en un entorno de (0, 1) con $g(0, 1) = 2$.
Derivadas de g: $F'_y = x^2 - e^y \to 4 - 1 = 3$; $F'_z = x \to 2$. $g'_y(0, 1) = -3/1 = -3$, $g'_z(0, 1) = -2/1 = -2$.
Aproximación lineal: g es C^1, así que es diferenciable y $g(y, z) \approx g(0, 1) + g'_y \cdot \Delta y + g'_z \cdot \Delta z$, con $\Delta y = 0.05$ y $\Delta z = 0.97 - 1 = -0.03$: $g(0.05, 0.97) \approx 2 - 3(0.05) - 2(-0.03) = 2 - 0.15 + 0.06 =$ **1.91**.

> **Trampa:** la derivada que tiene que ser distinta de cero es la de la variable despejada (F'_x), no F'_z. Y en F'_y hay que usar $x_0 = 2$: x^2 vale 4, no 0.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$. Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (-1, 1, 1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación paramétrica del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** Un único punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$. Plano tangente: $-x + y + z = -1$; en forma paramétrica, $\vec{X} = (2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
>
> **Paso 1, normal de la esfera en A:** Σ^* es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1, con $\nabla G = 2(x, y, z)$; $A = (-1, 1, 1)$ está ($1 + 1 + 1 = 3$) y $\nabla G(A) = (-2, 2, 2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{n} = (-1, 1, 1)$. Su plano tangente es $-x + y + z = 3$.
> **Paso 2, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (1, 0, u)$, $\vec{X}_v = (1, v, 0)$. $\vec{N} = (0 \cdot 0 - u \cdot v, u \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot v - 0 \cdot 1) = (-uv, u, v)$. Con $u, v > 0$, $\vec{N} \neq \vec{0}$: Σ es regular.
> **Paso 3, paralelismo:** $(-uv, u, v) = \lambda(-1, 1, 1)$: $u = \lambda$, $v = \lambda$ y $uv = \lambda$, o sea $\lambda^2 = \lambda$. $\lambda = 0$ queda afuera (daría $u = 0$, que no está en el dominio, y además $\vec{N} = \vec{0}$ no define plano); entonces $\lambda = 1$, **$u = v = 1$**.
> **Punto:** $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$.
> **Plano tangente:** normal $(-1, 1, 1)$: $-(x - 2) + (y - 1/2) + (z - 1/2) = 0$, o sea **$-x + y + z = -1$**, paralelo y distinto de $-x + y + z = 3$. Forma paramétrica (con los vectores tangentes $\vec{X}_u(1, 1) = (1, 0, 1)$ y $\vec{X}_v(1, 1) = (1, 1, 0)$): **$\vec{X} = (2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$**, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
> **Trampa:** la ecuación $\lambda^2 = \lambda$ tiene la raíz $\lambda = 0$, que hay que descartar justificándolo (dominio $u, v > 0$); y la ecuación paramétrica del plano se arma con $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$, no con la normal.

13/5/23, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \frac{\sqrt{(4y^2 - 8y + x^2)}}{\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

> **Respuesta:** $D = \{x^2/4 + (y - 1)^2 \geq 1, x^2 + y^2 < 9\}$: el disco abierto de radio 3 con un agujero elíptico (centro (0, 1), semiejes 2 en x y 1 en y) cuyo borde sí pertenece. $\text{int } D = \{4y^2 - 8y + x^2 > 0, x^2 + y^2 < 9\}$. $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{4y^2 - 8y + x^2 = 0\}$. $\partial D \cap D = \{(x, y) : 4y^2 - 8y + x^2 = 0\}$, la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2 = 1$.
>
> **Condiciones:** $\sqrt{(4y^2 - 8y + x^2)}$ pide $4y^2 - 8y + x^2 \geq 0$. $\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}$ es raíz de índice par (radicando ≥ 0) y está en el denominador ($\neq 0$): $9 - x^2 - y^2 > 0$.
> **Completar cuadrados:** $4y^2 - 8y + x^2 = x^2 + 4(y - 1)^2 - 4$, así que la primera condición es $x^2/4 + (y - 1)^2 \geq 1$: **afuera o sobre** la elipse E de centro (0, 1), semieje 2 en x y 1 en y (pasa por (0, 0), (0, 2), (2, 1) y (–2, 1)).
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + (y - 1)^2 \geq 1, x^2 + y^2 < 9\}$.
> **¿La elipse queda adentro del disco?** Sí: sus puntos cumplen $|x| \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$, así que $x^2 + y^2 \leq 4 + 4 = 8 < 9$ (el máximo exacto sobre E es 16/3). Entonces D es el disco abierto de radio 3 con un agujero: el interior de la elipse.
> **Gráfico de D:** la circunferencia de radio 3 en punteado (no pertenece), la elipse E en trazo lleno (pertenece) y sombreado entre las dos.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : 4y^2 - 8y + x^2 > 0, x^2 + y^2 < 9\}$: lo mismo sin la elipse. Un punto de E no es interior porque toda bola centrada en él tiene puntos de adentro de la elipse, donde $4y^2 - 8y + x^2 < 0$. En el gráfico, la elipse pasa a punteado.
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{4y^2 - 8y + x^2 = 0\}$: la circunferencia de radio 3 y la elipse, las dos en trazo lleno.
> **$\partial D \cap D$:** la circunferencia no es de D (anula el denominador) y la elipse sí (anula el numerador, que puede valer 0). Entonces $\partial D \cap D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - 8y + x^2 = 0\}$, o sea $x^2/4 + (y - 1)^2 = 1$. No hace falta agregar $x^2 + y^2 < 9$: la elipse ya lo cumple entera.
> **Trampa:** la raíz cuarta exige radicando ≥ 0 igual que la cuadrada, y por estar en el denominador, > 0. Y antes de decir que toda la elipse es de D hay que chequear que no se salga del disco.

Ejercicio 2. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, u + v)$, $u > 0$, $v > 0$. Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto A = (1, 1, –1). Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** Un único punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (1/2, 1/2, 2)$. Plano tangente: $x + y - z = -1$ (paralelo a $x + y - z = 3$, el tangente a la esfera en A).
>
> **Paso 1, normal de la esfera en A:** Σ^* es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1, con $\nabla G = 2(x, y, z)$; A = (1, 1, –1) está y $\nabla G(A) = (2, 2, -2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Su plano tangente es $x + y - z = 3$.
> **Paso 2, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (u, 0, 1)$, $\vec{X}_v = (0, v, 1)$. $\vec{N} = (0 \cdot 1 - 1 \cdot v, 1 \cdot 0 - u \cdot 1, u \cdot v - 0 \cdot 0) = (-v, -u, uv) \neq \vec{0}$ para $u, v > 0$: Σ es regular.
> **Paso 3, paralelismo:** $(-v, -u, uv) = \lambda(1, 1, -1)$: $v = -\lambda$, $u = -\lambda$ y $uv = -\lambda$, o sea $\lambda^2 = -\lambda$. $\lambda = 0$ daría $u = v =$

0, fuera del dominio; queda $\lambda = -1$, **$u = v = 1$**.
Punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (1/2, 1/2, 2)$.
Plano tangente: $\vec{N}(1, 1) = (-1, -1, 1) \parallel (1, 1, -1)$: $(x - 1/2) + (y - 1/2) - (z - 2) = 0$, o sea **$x + y - z = -1$**, paralelo y distinto del tangente a la esfera.
Trampa: acá λ sale negativo (-1); si forzás $\vec{N} = \vec{n}$ sin el λ, el sistema pide $u = v = -1$, que está fuera del dominio, y parece que no hay solución.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación $y^2x + yz - e^x = 1$ define implícitamente una función $y = g(x, z)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(x_0, z_0) = (0, 1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $y_0 = 2$; $g_x(0, 1) = -3$, $g_z(0, 1) = -2$; $g(0.05, 0.97) \approx 1.91$.

Planteo: $F(x, y, z) = y^2x + yz - e^x - 1$ y la ecuación es $F = 0$; se despeja y.
Punto: en $(x, z) = (0, 1)$: $0 + y - 1 - 1 = 0$, así que **$y_0 = 2$** (única solución, la ecuación queda lineal en y). Punto $(0, 2, 1)$.
Derivadas de F: $F'_x = y^2 - e^x$, $F'_y = 2xy + z$, $F'_z = y$. En $(0, 2, 1)$: $F'_x = 4 - 1 = 3$, $F'_y = 0 + 1 = 1$, $F'_z = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(0, 2, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y exponencial); (iii) $F'_y(0, 2, 1) = 1 \neq 0$. Entonces existe $y = g(x, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, 1)$, con $g(0, 1) = 2$.
Derivadas de g: $g'_x(0, 1) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = -3$, $g'_z(0, 1) = -\dfrac{F'_z}{F'_y} = -2$.
Aproximación lineal: g es diferenciable en $(0, 1)$ por ser C^1, así que $g(x, z) \approx 2 - 3(x - 0) - 2(z - 1)$. Con $(0.05, 0.97)$: $\Delta x = 0.05$, $\Delta z = -0.03$, $g(0.05, 0.97) \approx 2 - 0.15 + 0.06 =$ **1.91**.
Trampa: el incremento en z es $0.97 - 1 = -0.03$ (negativo); con el signo cambiado da 1.79. Y el denominador es F'_y, porque la que se despeja es y.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = f(x+y, x-y, xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2y + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1, 1, h(1, 1))$ y que la primera componente de $\nabla f(2, 0, 1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $(2, 0, 1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Respuesta: $\nabla f(2, 0, 1) = (2, 1, -3)$. Dirección de máximo crecimiento: $\check{v} = (2, 1, -3)/\sqrt{14}$. Valor máximo: $\sqrt{14}$.

Punto interior: en $(x, y) = (1, 1)$ es $(x + y, x - y, xy) = (2, 0, 1)$.
Leer el plano: $2y + z = 1$ se despeja como $z = 1 - 2y$. Como es el plano tangente al gráfico de h en $(1, 1)$, comparando con $z = h(1, 1) + h_x(1, 1)(x - 1) + h_y(1, 1)(y - 1)$: $h(1, 1) = -1$, **$h_x(1, 1) = 0$** y **$h_y(1, 1) = -2$**.
Hipótesis: f es C^1 en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto diferenciable en $(2, 0, 1)$; la interior es polinómica. Entonces vale la regla de la cadena en $(1, 1)$ y además $f'((2, 0, 1), \check{v}) = \nabla f(2, 0, 1) \cdot \check{v}$.
Jacobiana interior en (1, 1): la fila de $x + y$ es $(1, 1)$, la de $x - y$ es $(1, -1)$ y la de xy es $(y, x) = (1, 1)$.
Cadena con incógnitas: $\nabla f(2, 0, 1) = (2, b, c)$. $h_x = f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 1 + f_3 \cdot y = 2 + b + c = 0$ y $h_y = f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot (-1) + f_3 \cdot x = 2 - b + c = -2$.
Despeje: restando, $2b = 2$, $b = 1$; y $c = -2 - b = -3$. **$\nabla f(2, 0, 1) = (2, 1, -3)$**. Control: $h_y = 2 - 1 - 3 = -2$ ✓.
Máximo: como f es diferenciable, $f'((2, 0, 1), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v} \leq \|\nabla f\|$, con igualdad sólo si $\check{v}$ tiene la dirección y el sentido de ∇f. $\|(2, 1, -3)\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$. La derivada direccional máxima se da en **$\check{v} = (2, 1, -3)/\sqrt{14}$** y vale **$\sqrt{14}$**.
Trampa: el plano $2y + z = 1$ no tiene x, y eso es un dato: $h_x(1, 1) = 0$. Además lo que se pide es la derivada de f (en $\mathbb{R}^3$), no la de h: el versor tiene tres componentes.

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = be^{by} - xy + a\,\mathrm{sen}(x) - y + x + x^2$. Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

> **Respuesta:** Sólo $a = -1$, $b = 1$: f alcanza un mínimo relativo en el origen, de valor $f(0, 0) = 1$. (Con $a = -1$, $b = -1$ el origen es crítico pero es punto silla.)
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (exponencial, seno y polinomios). Si f tiene un extremo relativo en el origen, como es diferenciable ahí, tiene que ser $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$: esa es la condición necesaria. Después el hessiano dice cuáles de esos valores dan extremo de verdad.
> **Derivadas:** $f'_x = -y + a\cos x + 1 + 2x$ y $f'_y = b^2e^{by} - x - 1$ (la derivada de be^{by} es $b{\cdot}b{\cdot}e^{by}$).
> **Condición necesaria:** $f'_x(0, 0) = a + 1 = 0$, o sea $a = -1$; $f'_y(0, 0) = b^2 - 1 = 0$, o sea $b = 1$ o $b = -1$.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = -a\,\mathrm{sen}\,x + 2$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = b^3e^{by}$. En el origen: $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & b^3 \end{pmatrix}$, $\det H = 2b^3 - 1$.
>
> **$a = -1$, $b = 1$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det H = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(0, 0) = b{\cdot}e^0 = \mathbf{1}$.
>
> **$a = -1$, $b = -1$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det H = -3 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. Este par se descarta.
>
> **Trampa:** $b^2 = 1$ da dos valores y hay que probar los dos: el gradiente nulo es necesario pero no suficiente. La respuesta a “todos los valores” es un único par, $a = -1$ y $b = 1$.

12/5/23 (otro)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio natural de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}{x^2 - y^2}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 - y^2 \neq 0\}$: el disco cerrado de radio 2 sin las rectas $y = x$ e $y = -x$. $\text{int } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, x^2 - y^2 \neq 0\}$. $\partial D = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{y = x, |x| \leq \sqrt{2}\} \cup \{y = -x, |x| \leq \sqrt{2}\}$. D no es compacto: es acotado pero no cerrado.
>
> **Condiciones:** $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$ pide $x^2 + y^2 \leq 4$. El denominador pide $x^2 - y^2 \neq 0 \iff (x - y)(x + y) \neq 0 \iff y \neq x$ e $y \neq -x$.
> **D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \neq x, y \neq -x\}$. **Gráfico:** el disco de centro el origen y radio 2, con la circunferencia en trazo lleno, y las dos diagonales en punteado (de $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y de $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$). Los cuatro puntos $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$, donde las diagonales tocan la circunferencia, van huecos. El disco queda partido en cuatro sectores (derecho, izquierdo, superior e inferior).
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, x^2 - y^2 \neq 0\}$. Los puntos de la circunferencia no son interiores (toda bola sale del disco) y los de las diagonales ni siquiera son de D. Ese conjunto sí es abierto: desigualdad estricta y $\neq$ de funciones continuas.
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{y = x, x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{y = -x, x^2 + y^2 \leq 4\}$: la circunferencia y los dos diámetros diagonales. Cada punto de un diámetro no es de D y cualquier bola centrada en él tiene puntos de D a los costados. Dibujalo aparte: la circunferencia y la "X" de las diagonales, todo en trazo lleno.
> **¿Compacto?** En $\mathbb{R}^2$, compacto $\iff$ cerrado y acotado. Acotado sí: $\|(x, y)\| \leq 2$. Cerrado no: $(0, 0) \in \partial D$ (los $(\varepsilon, 0)$ están en D) pero $(0, 0) \notin D$ porque anula el denominador. Entonces **D no es compacto**.
> **De paso:** D tampoco es abierto (por ejemplo $(2, 0)$ es de D y no es interior) ni conexo (las diagonales lo separan en los cuatro sectores).
> **Trampa:** pensar que $x^2 - y^2$ sólo se anula en el origen: se anula sobre dos rectas enteras, y eso es lo que hay que sacar del disco.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{R}^2)$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x, y) = f(x\,y + y, y^2\,x - 2\,x)$. Sabiendo que

- la derivada direccional máxima de h en $(1, 1)$ es $\sqrt{13}$,
- $\nabla h(1, 1)$ tiene componentes positivas y es ortogonal al vector $(-4, 6)$,

halle la derivada direccional mínima de f en $(2, -1)$.

> **Respuesta:** $\nabla h(1, 1) = (3, 2)$; $\nabla f(2, -1) = (2, -1)$. Derivada direccional mínima de f en $(2, -1)$: $-\sqrt{5}$ (en la dirección $(-2, 1)/\sqrt{5}$).
>
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$; $\vec{g}(x, y) = (xy + y, y^2x - 2x)$ es polinómica. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable y vale la regla de la cadena. Además $\vec{g}(1, 1) = (1 + 1, 1 - 2) = (2, -1)$: el punto donde nos preguntan por f es la imagen de $(1, 1)$.
> **Hallar $\nabla h(1, 1)$:** h es diferenciable, así que su derivada direccional máxima es $\|\nabla h(1, 1)\| = \sqrt{13}$. Ser ortogonal a $(-4, 6)$ es lo mismo que ser paralelo a $(6, 4) \parallel (3, 2)$: $\nabla h = t(3, 2)$. Entonces $|t| \cdot \sqrt{13} = \sqrt{13}$, $t = \pm 1$, y como las componentes son positivas, $t = 1$: **$\nabla h(1, 1) = (3, 2)$**.

Jacobiana: $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x+1 \\ y^2-2 & 2xy \end{pmatrix}$, y en (1, 1): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con determinante 2 + 2 = 4 ≠ 0.

Sistema: con $\nabla f(2, -1) = (a, b)$: $(a, b)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (a - b, 2a + 2b) = (3, 2)$. Queda a − b = 3 y a + b = 1, así que a = 2, b = −1: **$\nabla f(2, -1) = (2, -1)$**.

Derivada mínima: f es diferenciable en (2, −1), luego $f'((2, -1), \check{r}) = \nabla f \cdot \check{r} \geq -\|\nabla f\|$, con igualdad en $\check{r} = -\nabla f/\|\nabla f\| = (-2, 1)/\sqrt{5}$. La derivada direccional mínima vale **$-\sqrt{5}$**.

Trampa: la mínima es $-\|\nabla f(2, -1)\|$, no $-\|\nabla h(1, 1)\| = -\sqrt{13}$: se pregunta por f en el punto imagen, y para eso hay que pasar por la regla de la cadena.

Ejercicio 3. Sea la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = a^2 \wedge 2xz + y^2 + 2y = 3\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v^2, 3u - v, 2u + v^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle, si existe, $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que la recta tangente a C en el punto (0, 1, a) sea paralela a la recta normal a Σ en el punto Q = (1/36, 1/6, 1/36).

Respuesta: a = 2/3.

Planteo: $F_1 = x^2 + z^2 - a^2$ y $F_2 = 2xz + y^2 + 2y - 3$. El punto (0, 1, a) está en C para todo a: $0 + a^2 = a^2$ y $0 + 1 + 2 = 3$ ✓.

Tangente a C: $\nabla F_1 = (2x, 0, 2z) \to (0, 0, 2a)$; $\nabla F_2 = (2z, 2y + 2, 2x) \to (2a, 4, 0)$. $\vec{T} = (0, 0, 2a) \times (2a, 4, 0) = (0\cdot 0 - 2a\cdot 4, 2a\cdot 2a - 0\cdot 0, 0\cdot 4 - 0\cdot 2a) = (-8a, 4a^2, 0) = 4a(-2, a, 0)$. Como $a > 0$, $\vec{T} \neq \vec{0}$ (gradientes no paralelos, curva regular) y la dirección tangente es (−2, a, 0).

Parámetros de Q: $u + v^2 = 1/36$ y $2u + v^2 = 1/36 \Rightarrow u = 0$ y $v^2 = 1/36$; la segunda componente, $3u - v = 1/6$, fija $v = -1/6$. $Q = \vec{X}(0, -1/6)$.

Normal a Σ: $\vec{X}_u = (1, 3, 2)$, $\vec{X}_v = (2v, -1, 2v) \to (-1/3, -1, -1/3)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (3\cdot(-1/3) - 2\cdot(-1), 2\cdot(-1/3) - 1\cdot(-1/3), 1\cdot(-1) - 3\cdot(-1/3)) = (1, -1/3, 0) \parallel (3, -1, 0)$. Es no nulo: Σ es regular en Q y la recta normal tiene dirección (3, −1, 0).

Paralelismo: $(-2, a, 0) \parallel (3, -1, 0) \Leftrightarrow (-2, a, 0) \times (3, -1, 0) = (0, 0, 2 - 3a) = \vec{0} \Leftrightarrow a = 2/3$.

Resultado: existe y es **a = 2/3** (positivo, como pide el enunciado). Control: $(-2, 2/3, 0) = -(2/3)(3, -1, 0)$ ✓.

Trampa: de $v^2 = 1/36$ tomar v = 1/6 sin mirar la segunda componente: $\vec{X}(0, 1/6) = (1/36, -1/6, 1/36)$ es otro punto, con otra normal (3, 1/3, −2).

Ejercicio 4. Pruebe que la ecuación $3e^x + 3xy + y^2 + yz + z^3 = 2$ define implícitamente a x = f(y, z) definida en un entorno de (0, −1). Determine si el plano tangente al gráfico de f en el punto (g(0, −1), 0, −1) es paralelo al plano 6x − 2 y + 6 z = 4.

Respuesta: $x_0 = 0$, $\nabla f(0, -1) = (1/3, -1)$. Plano tangente 3x − y + 3z = −3: es paralelo (y distinto) al plano 6x − 2y + 6z = 4.

El enunciado llama f a la función implícita y después escribe el punto como (g(0, −1), 0, −1): es una errata, g y f son la misma función.

Planteo: $F(x, y, z) = 3e^x + 3xy + y^2 + yz + z^3 - 2$, queremos x = f(y, z) cerca de $(y_0, z_0) = (0, -1)$.

Punto: $F(x, 0, -1) = 3e^x - 1 - 2 = 0$ da $e^x = 1$, **$x_0 = 0$** (única solución, la exponencial es inyectiva). P = (0, 0, −1).

Hipótesis del TFI: (1) F(P) = 0 ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_x = 3e^x + 3y$, $F_x(P) = 3 \neq 0$ ✓. Entonces x = f(y, z) es C^1 en un entorno de (0, −1), con f(0, −1) = 0.

Derivadas: $F_y = 3x + 2y + z$, $F_y(P) = -1$. $F_z = y + 3z^2$, $F_z(P) = 3$. $f_y = -\frac{F_y}{F_x} = 1/3$, $f_z = -\frac{F_z}{F_x} = -1$.

Plano tangente al gráfico de f: el gráfico es $\{(f(y, z), y, z)\}$ y, como f es diferenciable, su plano tangente en P es $x = 0 + (1/3)(y - 0) - (z + 1)$, o sea $3x - y + 3z = -3$. Normal: $(3, -1, 3)$. (Coincide con $\nabla F(P) = (3, -1, 3)$, como tiene que ser.)

Comparación: el plano $6x - 2y + 6z = 4$ tiene normal $(6, -2, 6) = 2(3, -1, 3)$: las normales son paralelas, así que **sí, los planos son paralelos**. Además no son el mismo: el tangente es $6x - 2y + 6z = -6$ y $-6 \neq 4$.

Trampa: la normal del gráfico de $x = f(y, z)$ es $(1, -f_y, -f_z)$, con el 1 en la componente x; si la armás como $(f_y, f_z, -1)$, como si fuera $z = f(x, y)$, comparás contra la normal equivocada.

Ejercicio 5. Sea $g(x, y) = f(x, y) + \cos(x - 1)$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(1, -1)$ es $p(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x + 5y + 2$. Analice si g alcanza un extremo relativo en $(1, -1)$ y, en caso afirmativo, clasificarlo y encontrar su valor.

Respuesta: $(1, -1)$ es punto crítico de g y allí g tiene un mínimo relativo, de valor $g(1, -1) = -1$.

Planteo: f es C^3 y $\cos(x - 1)$ es C^∞, así que g es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto): un extremo relativo exige $\nabla g(1, -1) = 0$ y, si se cumple, se clasifica con el hessiano. Como p es el Taylor de orden 2 de f en $(1, -1)$, p y f tienen el mismo valor, las mismas derivadas primeras y las mismas segundas en ese punto.

Datos de f en (1, –1): $p(1, -1) = 1 + 2 + 1 - 3 - 5 + 2 = -2$. $p'_x = 2x - y - 3$ y $p'_y = 4y - x + 5$, que en $(1, -1)$ dan $2 + 1 - 3 = 0$ y $-4 - 1 + 5 = 0$: $\nabla f(1, -1) = (0, 0)$. Hessiano de p (constante): $Hf(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

La parte del coseno: $c(x, y) = \cos(x - 1)$ tiene $\nabla c = (-\operatorname{sen}(x - 1), 0)$, nulo en $x = 1$, y $Hc = \begin{pmatrix} -\cos(x - 1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que en $(1, -1)$ vale $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Punto crítico: $\nabla g(1, -1) = (0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$ ✓.

Hessiano de g: $Hg(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.

Clasificación: $\det Hg = 4 - 1 = 3 > 0$ y $g''_{xx} = 1 > 0$: **mínimo relativo**. Valor: $g(1, -1) = f(1, -1) + \cos 0 = -2 + 1 = \mathbf{-1}$.

Trampa: el coseno también aporta al hessiano (–1 en el lugar xx) aunque no aporte al gradiente. Si lo olvidás te queda $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y llegás a la misma conclusión de casualidad (det 7), pero con un hessiano equivocado. Y el valor del extremo es el de g, no el de f: hay que sumar $\cos 0 = 1$.

13/12/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 7 = 0, z < 0\}$ y $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 + z^2 - 13 = 0\}$.
Halle el plano normal a C en el punto $(1, y_0, z_0)$ con $y_0 > 0$.

> **Respuesta:** P = (1, 1, −3). Plano normal: 3x − 6y + z + 6 = 0.
>
> **El punto:** con x = 1, Σ_1 da $8 + y^2 - z^2 = 0$, o sea $z^2 - y^2 = 8$, y Σ_2 da $y^2 + z^2 = 10$. Sumando, $2z^2 = 18$ y $z^2 = 9$; restando, $y^2 = 1$. Con $y_0 > 0$ y $z < 0$ (condición de Σ_1): **P = (1, 1, −3)**.
> **Normales:** $F = x^2 + y^2 - z^2 + 7$ y $G = 3x^2 + y^2 + z^2 - 13$ son C^1. $\nabla F = (2x, 2y, -2z) = (2, 2, 6) \parallel (1, 1, 3)$; $\nabla G = (6x, 2y, 2z) = (6, 2, -6) \parallel (3, 1, -3)$.
> **Tangente a C:** $(1, 1, 3) \times (3, 1, -3) = (1\cdot(-3) - 3\cdot1, 3\cdot3 - 1\cdot(-3), 1\cdot1 - 1\cdot3) = (-6, 12, -2) \parallel (3, -6, 1)$. Es no nulo: las superficies se cortan transversalmente y C es regular en P. Control: $(3, -6, 1)\cdot(1, 1, 3) = 0$ y $(3, -6, 1)\cdot(3, 1, -3) = 0$ ✓.
> **Plano normal:** pasa por P con normal (3, −6, 1): $3(x - 1) - 6(y - 1) + (z + 3) = 0$, es decir **3x − 6y + z + 6 = 0**. Control: 3 − 6 − 3 + 6 = 0 ✓.
> **Trampa:** el sistema da cuatro candidatos $(1, \pm1, \pm3)$; la condición $z < 0$ de Σ_1 y la de $y_0 > 0$ dejan uno solo. Simplificar los gradientes dividiendo por 2 está bien (sólo importa la dirección), pero hacelo antes de cruzar, no a la mitad.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 para el cual se sabe que en el punto P = (1, −1) la máxima derivada direccional de f vale 2 y se produce en el versor $\check{v} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Halle $\nabla f(P)$ y una ecuación paramétrica para la recta que es tangente en P a la curva de nivel de f que pasa por ese punto.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -1) = (2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$. Recta tangente: $(x, y) = (1, -1) + t(2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en P, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v} = \|\nabla f(P)\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre $\nabla f(P)$ y $\check{v}$.
> **Máxima derivada direccional:** se alcanza cuando $\cos\theta = 1$, o sea en el versor $\nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$, y su valor es $\|\nabla f(P)\|$. Entonces $\|\nabla f(P)\| = 2$ y $\nabla f(P)$ apunta como $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.
> **Gradiente:** $\nabla f(P) = 2 \cdot (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) =$ **$(2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$**.
> **Recta tangente a la curva de nivel:** como $\nabla f(P) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita la curva de nivel f = f(P) es, cerca de P, una curva regular, y su tangente es perpendicular a $\nabla f(P)$. Un vector perpendicular a (1, −2) es (2, 1).
> **Resultado: (x, y) = (1, −1) + t(2, 1)**, $t \in \mathbb{R}$. Control: $\|(2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})\| = \sqrt{(20/5)} = 2$ ✓ y $(2, 1) \cdot (1, -2) = 0$ ✓.
> **Trampa:** el versor dado **no** es la dirección de la recta pedida: es la del gradiente. La recta tangente a la curva de nivel va perpendicular.

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $ue^{vw} + u^2w = 12$ define en forma implícita una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3, 0)$.
Halle el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = f(x^2 + 2y, x - y)$ en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

> **Respuesta:** $w_0 = 1 = h(1, 1)$; $\nabla h(1, 1) = (-17/9, -11/9)$; plano tangente: 17x + 11y + 9z = 37.

El exponente de e está borroso en la foto; se lee vw (coherente con el tema 2, que es el mismo ejercicio con u y v intercambiadas). Como $v_0 = 0$, la lectura no cambia w_0. **Planteo:** $F(u, v, w) = ue^{vw} + u^2w - 12$.
Punto: en $(u, v) = (3, 0)$: $3e^0 + 9w = 12$, o sea $3 + 9w = 12$, así que $\mathbf{w_0 = 1}$. Punto $(3, 0, 1)$.
Derivadas de F: $F'_u = e^{vw} + 2uw$, $F'_v = uwe^{vw}$, $F'_w = uve^{vw} + u^2$. En $(3, 0, 1)$: $F'_u = 1 + 6 = 7$, $F'_v = 3$, $F'_w = 0 + 9 = 9$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(3, 0, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (exponencial y polinomios); (iii) $F'_w(3, 0, 1) = 9 \neq 0$. Entonces f es C^1 en un entorno de $(3, 0)$, con $f(3, 0) = 1$ y $f_u = -7/9$, $f_v = -3/9 = -1/3$ (cada una es $-F'_u/F'_w$ y $-F'_v/F'_w$).
Regla de la cadena: $h(x, y) = f(U, V)$ con $U = x^2 + 2y$, $V = x - y$. En $(1, 1)$: $U = 3$, $V = 0$, o sea caemos en $(3, 0)$. $U_x = 2x = 2$, $U_y = 2$, $V_x = 1$, $V_y = -1$. f es diferenciable en $(3, 0)$ y la interior es polinómica, así que h es diferenciable en $(1, 1)$ y $h(1, 1) = f(3, 0) = 1$.
Cuenta: $h_x(1, 1) = (-7/9)\cdot 2 + (-1/3)\cdot 1 = -14/9 - 3/9 = -17/9$; $h_y(1, 1) = (-7/9)\cdot 2 + (-1/3)(-1) = -14/9 + 3/9 = -11/9$.
Plano tangente: $z = 1 - (17/9)(x - 1) - (11/9)(y - 1)$. Multiplicando por 9: $9z = 9 - 17x + 17 - 11y + 11$, es decir $\mathbf{17x + 11y + 9z = 37}$.
Trampa: el plano es del gráfico de h, en $(1, 1, h(1, 1))$, así que la tercera coordenada es $w_0 = 1$; no confundas con el plano tangente a la superficie $F = 0$ en (u_0, v_0, w_0).

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{y}, \sqrt{(2 - 2y - 2x^2)})$ y sea D su dominio natural. Sea $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \|\vec{f}(x, y)\|^2$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de g en la **frontera de D** y los puntos en los cuales se producen.

Respuesta: Sobre ∂D: máximo absoluto 2 en $(0, 0)$; mínimo absoluto 0 en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$.

Dominio: $\sqrt{y}$ pide $y \geq 0$ y $\sqrt{(2 - 2y - 2x^2)}$ pide $2 - 2y - 2x^2 \geq 0$, o sea $y \leq 1 - x^2$. Entonces $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$: la región entre el eje x y la parábola $y = 1 - x^2$, que se cortan en $x = \pm 1$.
Frontera de D: dos tramos, el segmento $S = \{y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$ y el arco de parábola $P = \{y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1\}$, unidos en las esquinas $(\pm 1, 0)$.
La función: en D, $g = (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{(2 - 2y - 2x^2)})^2 = y + 2 - 2y - 2x^2 = 2 - y - 2x^2$, un polinomio.
Existencia: ∂D es cerrada (toda frontera lo es) y acotada (D es acotado), o sea compacta; g es continua. Por Weierstrass alcanza máximo y mínimo absolutos sobre ∂D.
En S: $g(x, 0) = 2 - 2x^2$, $x \in [-1, 1]$: la derivada $-4x$ se anula en $x = 0$, con $g(0, 0) = 2$; en las esquinas $g(\pm 1, 0) = 0$.
En P: parametrizo por x: $g(x, 1 - x^2) = 2 - (1 - x^2) - 2x^2 = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$: crítico en $x = 0$ con $g(0, 1) = 1$; en las esquinas $g(\pm 1, 0) = 0$. (Sobre P la segunda raíz se anula, por eso g coincide con y.)
Comparación: candidatos 2 en $(0, 0)$, 1 en $(0, 1)$ y 0 en $(\pm 1, 0)$.
Resultado: sobre la frontera de D, máximo absoluto **2** en **(0, 0)**; mínimo absoluto **0** en **(1, 0)** y en **(–1, 0)**.
Control del mínimo: $g = \|\vec{f}\|^2 \geq 0$, y se anula sólo si $y = 0$ e $y = 1 - x^2$ a la vez: las esquinas $(\pm 1, 0)$ ✓.
Trampa: la frontera tiene dos tramos. Si sólo mirás la parábola (donde se anula la segunda raíz) te queda máximo 1 en $(0, 1)$, que está mal: el máximo, 2, está en el segmento sobre el eje x. Y como se pide en la frontera, no se buscan críticos interiores.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x \operatorname{sen}(y)}{2x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Analice la continuidad de f en $(0, 0)$. Determine, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

Respuesta: f no es continua en (0, 0): por y = mx el límite vale m (0 por y = 0, 1 por y = x). Por lo tanto f no es diferenciable en el origen, aunque $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ existan.

Lectura del enunciado: la fracción está impresa chica; ampliada se lee $2x \operatorname{sen}(y)$ sobre $2x^2 + y^4$. La conclusión no cambia si el coeficiente o el exponente del denominador fueran otros ($x^2 + y^4$, $2x^2 + y^2$): las rectas siguen dando límites que dependen de m.

Continuidad, planteo: f(0, 0) = 0. Si encuentro dos caminos al origen con límites distintos, el límite doble no existe.

Rectas y = mx (x ≠ 0): $f(x, mx) = 2x \operatorname{sen}(mx)/(2x^2 + m^4x^4) = \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{x} \cdot \dfrac{2}{2 + m^4x^2} \to m \cdot 2/2 = m$.

Dos caminos distintos: por y = 0 el límite es 0 y por y = x es 1. No existe el límite doble: **f no es continua en (0, 0)**.

Diferenciabilidad: diferenciable en un punto implica continua en ese punto. Por el contrarrecíproco, como f no es continua en el origen, **f no es diferenciable en el origen**.

Ojo con las parciales: $f(h, 0) = 0$ y $f(0, k) = 0$, así que $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ existen. Eso no salva nada: si armás el límite del resto con $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, queda $\lim f(x, y)/\sqrt{(x^2 + y^2)}$, que no puede dar 0 porque f ni siquiera tiende a 0.

Trampa: mirar sólo los ejes engaña, porque ahí f vale 0: tomá rectas con m ≠ 0. Y que existan las parciales no alcanza para decir “diferenciable”.

13/12/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 para el cual se sabe que en el punto $P = (-1, 1)$ la máxima derivada direccional de f vale 3 y se produce en el versor $\check{v} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$. Halle $\nabla f(P)$ y una ecuación paramétrica para la recta que es tangente en P a la curva de nivel de f que pasa por ese punto.

> **Respuesta:** $\nabla f(-1, 1) = (9/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$. Recta tangente: $(x, y) = (-1, 1) + t(1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en P, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v} = \|\nabla f(P)\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre $\nabla f(P)$ y $\check{v}$.
> **Máxima derivada direccional:** se alcanza cuando $\cos\theta = 1$, o sea en el versor $\nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$, y su valor es $\|\nabla f(P)\|$. Entonces $\|\nabla f(P)\| = 3$ y $\nabla f(P)$ apunta como $(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$.
> **Gradiente:** $\nabla f(P) = 3 \cdot (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}) =$ **$(9/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$**.
> **Recta tangente a la curva de nivel:** como $\nabla f(P) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita la curva de nivel $f = f(P)$ es, cerca de P, una curva regular, y su tangente es perpendicular a $\nabla f(P)$. Un vector perpendicular a $(3, -1)$ es $(1, 3)$.
> **Resultado: $(x, y) = (-1, 1) + t(1, 3)$**, $t \in \mathbb{R}$. Control: $\|(9/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})\| = \sqrt{(90/10)} = 3$ ✓ y $(1, 3) \cdot (3, -1) = 0$ ✓.
> **Trampa:** el versor dado **no** es la dirección de la recta pedida: es la del gradiente. La recta tangente a la curva de nivel va perpendicular.

Ejercicio 2. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 + 7 = 0, y < 0\}$ y $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 + z^2 - 13 = 0\}$.
Halle el plano normal a C en el punto $(1, y_0, z_0)$ con $z_0 > 0$.

> **Respuesta:** $P = (1, -3, 1)$. Plano normal: $3x + y - 6z + 6 = 0$.
>
> **El punto:** con $x = 1$, Σ_1 da $8 - y^2 + z^2 = 0$, o sea $y^2 - z^2 = 8$, y Σ_2 da $y^2 + z^2 = 10$. Sumando, $y^2 = 9$; restando, $z^2 = 1$. Con $y < 0$ (condición de Σ_1) y $z_0 > 0$: **$P = (1, -3, 1)$**.
> **Normales:** $F = x^2 - y^2 + z^2 + 7$ y $G = 3x^2 + y^2 + z^2 - 13$ son C^1. $\nabla F = (2x, -2y, 2z) = (2, 6, 2) \parallel (1, 3, 1)$; $\nabla G = (6x, 2y, 2z) = (6, -6, 2) \parallel (3, -3, 1)$.
> **Tangente a C:** $(1, 3, 1) \times (3, -3, 1) = (3{\cdot}1 - 1{\cdot}(-3), 1{\cdot}3 - 1{\cdot}1, 1{\cdot}(-3) - 3{\cdot}3) = (6, 2, -12) \parallel (3, 1, -6)$. Es no nulo, así que C es regular en P. Control: $(3, 1, -6){\cdot}(1, 3, 1) = 0$ y $(3, 1, -6){\cdot}(3, -3, 1) = 0$ ✓.
> **Plano normal:** pasa por P con normal $(3, 1, -6)$: $3(x - 1) + (y + 3) - 6(z - 1) = 0$, es decir **$3x + y - 6z + 6 = 0$**. Control: $3 - 3 - 6 + 6 = 0$ ✓. → Es el ejercicio del tema 1 con los papeles de y y z intercambiados, y el resultado también sale intercambiando y con z.
> **Trampa:** el sistema da cuatro candidatos $(1, \pm 3, \pm 1)$; las condiciones $y < 0$ y $z_0 > 0$ dejan uno solo. Ojo con el signo de $-y^2$ al derivar: $\partial F/\partial y = -2y$, que en $y = -3$ da $+6$.

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $ve^{uw} + v^2w = 12$ define en forma implícita una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$.
Halle el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = f(x - y, x^2 + 2y)$ en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

> **Respuesta:** $w_0 = 1 = h(1, 1)$; $\nabla h(1, 1) = (-17/9, -11/9)$; plano tangente: $17x + 11y + 9z = 37$.
>
> **Planteo:** $F(u, v, w) = ve^{uw} + v^2w - 12$.
> **Punto:** en $(u, v) = (0, 3)$: $3e^0 + 9w = 12$, o sea $3 + 9w = 12$, así que **$w_0 = 1$**. Punto $(0, 3, 1)$.

Derivadas de F: $F'_u = vwe^{uw}$, $F'_v = e^{uw} + 2vw$, $F'_w = uve^{uw} + v^2$. En (0, 3, 1): $F'_u = 3$, $F'_v = 1 + 6 = 7$, $F'_w = 0 + 9 = 9$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(0, 3, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (exponencial y polinomios); (iii) $F'_w(0, 3, 1) = 9 \neq 0$. Entonces f es C^1 en un entorno de (0, 3), con $f(0, 3) = 1$ y $f_u = -3/9 = -1/3$, $f_v = -7/9$ (cada una es $-F'_u/F'_w$ y $-F'_v/F'_w$).
Regla de la cadena: $h(x, y) = f(U, V)$ con $U = x - y$, $V = x^2 + 2y$. En (1, 1): $U = 0$, $V = 3$, o sea caemos en (0, 3). $U_x = 1$, $U_y = -1$, $V_x = 2x = 2$, $V_y = 2$. f es diferenciable en (0, 3) y la interior es polinómica, así que h es diferenciable en (1, 1) y $h(1, 1) = f(0, 3) = 1$.
Cuenta: $h_x(1, 1) = (-1/3)\cdot 1 + (-7/9)\cdot 2 = -3/9 - 14/9 = -17/9$; $h_y(1, 1) = (-1/3)(-1) + (-7/9)\cdot 2 = 3/9 - 14/9 = -11/9$.
Plano tangente: $z = 1 - (17/9)(x - 1) - (11/9)(y - 1)$. Multiplicando por 9: $9z = 9 - 17x + 17 - 11y + 11$, es decir **$17x + 11y + 9z = 37$**.
Trampa: el plano es del gráfico de h, en $(1, 1, h(1, 1))$, así que la tercera coordenada es $w_0 = 1$; no confundas con el plano tangente a la superficie $F = 0$ en (u_0, v_0, w_0).

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x, y) = \{ \dfrac{4y \operatorname{sen}(x)}{x^4 + 4y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0)$ $\}$.

Analice la continuidad de f en (0, 0). Determine, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

Respuesta: f no es continua en (0, 0): por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = mx$ ($m \neq 0$) es $1/m$. Por lo tanto f no es diferenciable en el origen (aunque $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ existan).

Continuidad, planteo: $f(0, 0) = 0$; busco dos caminos al origen con límites distintos.
Ejes: $f(x, 0) = 0$ y $f(0, y) = 0$, así que por los dos ejes el límite es 0 (y de paso $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$).
Rectas $y = mx$, $m \neq 0$ ($x \neq 0$): $f(x, mx) = 4mx \operatorname{sen} x/(x^4 + 4m^2x^2) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{4m}{x^2 + 4m^2} \to 1 \cdot 4m/(4m^2) = 1/m$.
Conclusión: por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = x$ es 1: no existe el límite doble y **f no es continua en (0, 0)**.
Diferenciabilidad: si f fuera diferenciable en el origen, sería continua ahí. Como no lo es, **f no es diferenciable en (0, 0)**, aunque existan las dos parciales.
Trampa: los límites iterados (primero $y \to 0$ y después $x \to 0$, o al revés) dan 0 los dos, y eso *no* prueba que el límite doble exista; tampoco alcanza con mirar los ejes. Para decir que no existe hacen falta dos caminos con límites distintos; para decir que existe, una acotación.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{y}, \sqrt{(8 - 2y - 2x^2)})$ y sea D su dominio natural. Sea $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \|\vec{f}(x, y)\|^2$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de g en la **frontera de D** y los puntos en los cuales se producen.

Respuesta: Sobre ∂D: máximo absoluto 8 en (0, 0); mínimo absoluto 0 en (2, 0) y en (−2, 0).

Dominio: $\sqrt{y}$ pide $y \geq 0$ y $\sqrt{(8 - 2y - 2x^2)}$ pide $8 - 2y - 2x^2 \geq 0$, o sea $y \leq 4 - x^2$. Entonces $D = \{(x, y): 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$: la región entre el eje x y la parábola $y = 4 - x^2$, que se cortan en $x = \pm 2$.
Frontera de D: dos tramos, el segmento $S = \{y = 0, -2 \leq x \leq 2\}$ y el arco de parábola $P = \{y = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2\}$, unidos en las esquinas $(\pm 2, 0)$.
La función: en D, $g = (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{(8 - 2y - 2x^2)})^2 = y + 8 - 2y - 2x^2 = 8 - y - 2x^2$, un polinomio.
Existencia: ∂D es cerrada (toda frontera lo es) y acotada (D es acotado), o sea compacta; g es continua.

Por Weierstrass alcanza máximo y mínimo absolutos sobre ∂D.
En S: $g(x, 0) = 8 - 2x^2$, $x \in [-2, 2]$: la derivada $-4x$ se anula en $x = 0$, con $g(0, 0) = 8$; en las esquinas $g(\pm 2, 0) = 0$.
En P: parametrizo por x: $g(x, 4 - x^2) = 8 - (4 - x^2) - 2x^2 = 4 - x^2$, $x \in [-2, 2]$: crítico en $x = 0$ con $g(0, 4) = 4$; en las esquinas $g(\pm 2, 0) = 0$. (Sobre P la segunda raíz se anula, por eso g coincide con y.)
Comparación: candidatos 8 en (0, 0), 4 en (0, 4) y 0 en (±2, 0).
Resultado: sobre la frontera de D, máximo absoluto **8** en **(0, 0)**; mínimo absoluto **0** en **(2, 0)** y en **(–2, 0)**.
Control del mínimo: $g = \|\vec{f}\|^2 \geq 0$, y se anula sólo si $y = 0$ e $y = 4 - x^2$ a la vez: las esquinas $(\pm 2, 0)$ ✓.
Trampa: la frontera tiene dos tramos. Si sólo mirás la parábola (donde se anula la segunda raíz) te queda máximo 4 en (0, 4), que está mal: el máximo, 8, está en el segmento sobre el eje x. Y como se pide en la frontera, no se buscan críticos interiores.

14/11/22, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[4]{(x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2)}}{\sqrt{(x - 1)}}.$$

Sea D el dominio natural de f. Se pide

1. Graficar D.
2. Parametrizar $C = D \cap \partial D$.

> **Respuesta:** 1. $D = \{(x, y) : x > 1, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 4\}$: el semiplano $x > 1$ sin el semicírculo abierto de centro $(1, -1)$ y radio 2. 2. $C = D \cap \partial D = \{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4, x > 1\}$; $\vec{\sigma}(t) = (1 + 2\cos t, -1 + 2 \operatorname{sen} t)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.
>
> **Condiciones:** la raíz cuarta es de índice par: $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 \geq 0$. En el denominador $\sqrt{(x - 1)}$ tiene que existir y no anularse: $x - 1 > 0$.
> **Completar cuadrados:** $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = (x - 1)^2 - 1 + (y + 1)^2 - 1 - 2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 4$. La condición es $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 4$: puntos sobre o fuera de la circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 2.
> **1) D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 4\}$**. El centro $(1, -1)$ está sobre la recta $x = 1$, que corta a la circunferencia en $(1, 1)$ y $(1, -3)$: del semiplano $x > 1$ se saca el medio círculo derecho abierto.
> **Gráfico:** la recta $x = 1$ punteada (no pertenece); la semicircunferencia derecha en trazo lleno (pertenece), con sus extremos $(1, 1)$ y $(1, -3)$ en círculo vacío (tienen $x = 1$); D pintado a la derecha de la recta y por fuera de la semicircunferencia, como una "U" acostada que la envuelve.
> **Frontera:** (i) La semicircunferencia $\{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4, x \geq 1\}$: cerca hay puntos de adentro del círculo (fuera de D) y de afuera con $x > 1$ (en D). (ii) Las semirrectas $\{x = 1, y \geq 1\}$ y $\{x = 1, y \leq -3\}$: a la derecha tienen puntos de D, a la izquierda no. (iii) El segmento $\{x = 1, -3 < y < 1\}$ **no** es frontera: un entorno chico de, por ejemplo, $(1, 0)$ tiene a la izquierda puntos con $x \leq 1$ y a la derecha puntos dentro del círculo, ninguno en D.
> **2) $D \cap \partial D$:** las semirrectas sobre $x = 1$ no están en D (piden $x > 1$), y tampoco los extremos $(1, 1)$ y $(1, -3)$. Queda **$C = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4, x > 1\}$**: la semicircunferencia derecha abierta.
> **Parametrización:** la circunferencia es $(1 + 2\cos t, -1 + 2 \operatorname{sen} t)$. La condición $x > 1$ es $2\cos t > 0 \Leftrightarrow \cos t > 0 \Leftrightarrow t \in (-\pi/2, \pi/2)$ (tomando t en un intervalo de largo 2π que contenga ese tramo). Entonces **$\vec{\sigma}(t) = (1 + 2\cos t, -1 + 2 \operatorname{sen} t)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$**: va de cerca de $(1, -3)$ a cerca de $(1, 1)$ pasando por $(3, -1)$, sin tocar los extremos.
> **Trampa:** cerrar el intervalo en $\pm\pi/2$ mete $(1, 1)$ y $(1, -3)$, que no son de D porque anulan $\sqrt{(x - 1)}$. Y la parte de la recta $x = 1$ entre $y = -3$ e $y = 1$ no es frontera: ahí no hay puntos de D cerca.

Ejercicio 2. Sea

$$f(x, y) = 2x^2 + \frac{4}{x} + y^3 - 3y^2 + 2.$$

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo. En caso de producirse extremo, indique tipo y valor.

> **Respuesta:** Puntos críticos: $(1, 0)$, punto silla (no hay extremo); $(1, 2)$, mínimo local de valor $f(1, 2) = 4$.
>
> **Dominio:** f está definida y es C^∞ en el abierto $\{(x, y): x \neq 0\}$; los extremos locales están entre los puntos con $\nabla f = 0$.

Derivadas: $f_x = 4x - 4/x^2$, $f_y = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$.
Sistema: $f_x = 0$ da $4x^3 = 4$, $x^3 = 1$, $x = 1$ (única raíz real: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ y $x^2 + x + 1 > 0$). $f_y = 0$ da $y = 0$ o $y = 2$. **Puntos: (1, 0) y (1, 2)**.
Derivadas segundas: $f_{xx} = 4 + 8/x^3$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 6y - 6$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(1, 0): $H = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\det = -72 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(1, 0) = 8$).
(1, 2): $H = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\det = 72 > 0$ y $f_{xx} = 12 > 0$: **mínimo local**, $f(1, 2) = 2 + 4 + 8 - 12 + 2 = \mathbf{4}$.
Trampa: el término $4/x$ deriva a $-4/x^2$ y otra vez a $+8/x^3$; un signo mal ahí cambia f_{xx}. Y no lo llames mínimo absoluto: cuando $x \to 0^-$, $4/x \to -\infty$.

Ejercicio 3. Pruebe, mediante el teorema de la función implícita, que existe un único $w_0 \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0) = (0, 3)$ que satisface $f(0, 3) = w_0$.
Encuentre todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 3), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $w_0 = 1$ (único); $F'_w(0, 3, 1) = 6 \neq 0$. $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$; $f'((0, 3), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Planteo: $F(u, v, w) = ve^{uw} + 2vw - 9$. El enunciado pide probar que hay un **único** w_0 que sirve, así que primero hay que encontrarlo.
Unicidad de w_0: para que $f(0, 3) = w_0$ hace falta $F(0, 3, w_0) = 0$, o sea $3e^0 + 6w_0 = 9$. Es lineal en w_0: $3 + 6w_0 = 9$ da $\mathbf{w_0 = 1}$, y no hay otro.
Hipótesis del TFI: (1) $F(0, 3, 1) = 3 + 6 - 9 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (producto de polinomio por exponencial de polinomio, más un polinomio). (3) $F'_w = uve^{uw} + 2v$, que en $(0, 3, 1)$ vale $0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces existe $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, 3)$ con $f(0, 3) = 1$.
Derivadas de f: $F'_u = vwe^{uw} \to 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$; $F'_v = e^{uw} + 2w \to 1 + 2 = 3$. $f'_u(0, 3) = -3/6 = -1/2$, $f'_v(0, 3) = -3/6 = -1/2$. $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$.
Versores: f es C^1, luego diferenciable en $(0, 3)$, y $f'((0, 3), \check{v}) = \nabla f(0, 3) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-a/2 - b/2 = 0$, o sea $b = -a$, y $2a^2 = 1$. Quedan $\check{\mathbf{v}} = \mathbf{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$ y $\check{\mathbf{v}} = \mathbf{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}$.
Trampa: "todos los versores" son dos (opuestos). Y el resultado depende de usar la diferenciabilidad: sin justificarla, $\nabla f \cdot \check{v}$ no está autorizado.

Ejercicio 4. Sea $h(u, v) = f(3v - 3u, u^2 + v^2)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que el plano de ecuación $4x + 2y + 2z = 2$ es tangente al gráfico de f en $(0, 2, f(0, 2))$.
Halle la expresión de $h'((1, 1), \check{v})$ para todo versor $\check{v} \in \mathbb{R}^2$ y determine para cual de ellos la derivada direccional es máxima.

Respuesta: $\nabla f(0, 2) = (-2, -1)$, $\nabla h(1, 1) = (4, -8)$. $h'((1, 1), \check{v}) = 4v_1 - 8v_2$ para $\check{v} = (v_1, v_2)$ con $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Máxima en $\check{v} = (1, -2)/\sqrt{5} = (\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5)$, y vale $4\sqrt{5}$.

Punto interior: en $(u, v) = (1, 1)$ es $(r, s) = (3v - 3u, u^2 + v^2) = (0, 2)$.
Leer el plano: $4x + 2y + 2z = 2$ se despeja como $z = 1 - 2x - y$. El plano tangente al gráfico de f en (0,

2) es $z = f(0, 2) + f_x(0, 2)\, x + f_y(0, 2)(y - 2)$, así que comparando: **$\nabla f(0, 2) = (-2, -1)$** y $f(0, 2) = 1 - 0 - 2 = -1$.
Hipótesis: f es C^1, diferenciable en (0, 2); la interior es polinómica. Luego h es diferenciable en (1, 1) (incluso C^1) y valen la regla de la cadena y la fórmula $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1) \cdot \check{v}$.
Jacobiana interior en (1, 1): $r_u = -3$, $r_v = 3$; $s_u = 2u = 2$, $s_v = 2v = 2$.
Cadena: $h_u(1, 1) = (-2)(-3) + (-1)(2) = 4$; $h_v(1, 1) = (-2)(3) + (-1)(2) = -8$. **$\nabla h(1, 1) = (4, -8)$**.
Derivada direccional: para $\check{v} = (v_1, v_2)$ con $v_1^2 + v_2^2 = 1$, **$h'((1, 1), \check{v}) = 4v_1 - 8v_2$**.
Máximo: por Cauchy Schwarz, $\nabla h \cdot \check{v} \le \|\nabla h\|$ con igualdad sólo si $\check{v}$ apunta como ∇h. $\|\nabla h\| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, así que la máxima se da en **$\check{v} = (4, -8)/(4\sqrt{5}) = (1, -2)/\sqrt{5}$** y vale **$4\sqrt{5}$**.
Trampa: el gradiente de f no es (4, 2) (la normal del plano tal como viene escrito): hay que despejar z. La normal (4, 2, 2) es proporcional a $(f_x, f_y, -1)$, por eso se divide por −2.

Ejercicio 5. Halle todos los puntos de la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u^2 + v^2, u + v, u - 2v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, para los cuales el plano tangente a Σ en esos puntos resulta paralelo al plano de ecuación $x + y = 1$. Halle tal plano tangente en cada punto hallado.

Respuesta: Un único punto: $\vec{X}(-1/2, -1/2) = (1/2, -1, 1/2)$. Plano tangente: $x + y = -1/2$.

Planteo: el plano tangente en $\vec{X}(u, v)$ tiene normal $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v$; para que sea paralelo a $x + y = 1$ hace falta $\vec{N} = \lambda(1, 1, 0)$ con $\lambda \neq 0$.
Derivadas: $\vec{X}_u = (2u, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (2v, 1, -2)$.
Producto vectorial: $\vec{N} = (1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2v - 2u \cdot (-2), 2u \cdot 1 - 1 \cdot 2v) = (-3, 4u + 2v, 2u - 2v)$. La primera componente es −3, así que $\vec{N} \neq \vec{0}$ siempre: todos los puntos son regulares.
Sistema: $(-3, 4u + 2v, 2u - 2v) = \lambda(1, 1, 0)$. La tercera: $2u - 2v = 0$, $u = v$. La primera: $\lambda = -3$. La segunda: $6u = -3$, $u = -1/2$. Así $u = v = -1/2$.
Punto: $\vec{X}(-1/2, -1/2) = (1/4 + 1/4, -1, -1/2 + 1) = (1/2, -1, 1/2)$.
Plano tangente: normal $(-3, -3, 0) \parallel (1, 1, 0)$: $(x - 1/2) + (y + 1) = 0$, o sea **$x + y = -1/2$**. Es paralelo y distinto de $x + y = 1$.
Trampa: el plano $x + y = 1$ no tiene z, pero su normal es (1, 1, 0): la condición que más ayuda es justamente la componente z de $\vec{N}$ igual a 0.

12/11/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x^2y, y^2 - x^2)$, con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas en todo punto. Sabiendo que la aproximación lineal de $g(u, v)$ alrededor del punto $(1, 0)$ es $L(u, v) = 4+u-2v$, halle $f'((-1, 1), \check{v})$, donde $\check{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

> **Respuesta:** $\nabla f(-1, 1) = (-6, -3)$; $f'((-1, 1), \check{v}) = -3/\sqrt{2} = -3\sqrt{2}/2$.
>
> **Datos de g:** $L(u, v) = 4 + u - 2v = g(1, 0) + g'_u(1, 0)(u - 1) + g'_v(1, 0)v$, así que $\boldsymbol{\nabla g(1, 0) = (1, -2)}$ (y $g(1, 0) = L(1, 0) = 5$, que no hace falta).
> **El punto interior:** $(x^2y, y^2 - x^2)$ en $(-1, 1)$ da $(1\cdot1, 1 - 1) = (1, 0)$ ✓.
> **Hipótesis:** g tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$, o sea es C^1 y por lo tanto diferenciable; la interior es polinómica. Entonces f es diferenciable en $(-1, 1)$ y valen la regla de la cadena y $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.
> **Jacobiana interior en (–1, 1):** $u = x^2y$ da $(2xy, x^2) = (-2, 1)$; $v = y^2 - x^2$ da $(-2x, 2y) = (2, 2)$.
> **Cuenta:** $f'_x = 1\cdot(-2) + (-2)\cdot2 = -6$; $f'_y = 1\cdot1 + (-2)\cdot2 = -3$. $\boldsymbol{\nabla f(-1, 1) = (-6, -3)}$.
> **Resultado:** $f'((-1, 1), \check{v}) = (-6)(1/\sqrt{2}) + (-3)(-1/\sqrt{2}) = -3/\sqrt{2} = \boldsymbol{-3\sqrt{2}/2}$.
> **Trampa:** la fórmula $\nabla f\cdot\check{v}$ necesita que f sea diferenciable; acá se justifica porque g es C^1 ("derivadas parciales continuas en todo punto"). Decilo, que es lo que se corrige. Y fijate que $\check{v}$ ya es versor ($\|\check{v}\| = 1$), no hay que normalizarlo.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = y\,h(x, y) + \alpha x^2 - 4x + 1$, con α constante y h una función de clase C^2 tal que $p(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - x - 1$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (1, 0)$.
1. Halle el valor de α para el cual f tiene un punto crítico en A.
2. Para el valor α hallado, determine si se produce un extremo relativo en A e indique en caso afirmativo valor y tipo.

> **Respuesta:** 1. $\alpha = 2$. 2. En $A = (1, 0)$ hay mínimo relativo ($\det Hf(A) = 7 > 0$, $f''_{xx} = 4 > 0$), de valor $f(1, 0) = -1$.
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** h es C^2, así que p tiene en $A = (1, 0)$ el mismo valor y las mismas derivadas de 1er y 2do orden que h. $p(1, 0) = 2 + 0 + 0 - 1 - 1 = 0$, así que $\boldsymbol{h(A) = 0}$. $\nabla p = (4x + 2y - 1, 2y + 2x)$, así que $\boldsymbol{\nabla h(A) = (3, 2)}$. $Hp = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, así que $h''_{xx}(A) = 4$, $h''_{xy}(A) = 2$, $h''_{yy}(A) = 2$.
> **Regularidad:** $f = y\cdot h + \alpha x^2 - 4x + 1$ es producto y suma de funciones C^2, así que es C^2 y vale el criterio del hessiano.
> **Gradiente (regla del producto):** $f'_x = y\cdot h'_x + 2\alpha x - 4$, $f'_y = h + y\cdot h'_y$. En A ($y = 0$): $f'_x(A) = 2\alpha - 4$; $f'_y(A) = h(A) = 0$, que se cumple solo.
> **1.** $f'_x(A) = 0$ da $\boldsymbol{\alpha = 2}$.
> **Derivadas segundas:** $f''_{xx} = y\cdot h''_{xx} + 2\alpha$, $f''_{xy} = h'_x + y\cdot h''_{xy}$, $f''_{yy} = 2h'_y + y\cdot h''_{yy}$. En A: $f''_{xx} = 2\cdot2 = 4$, $f''_{xy} = 3$, $f''_{yy} = 2\cdot2 = 4$.
> **2.** $Hf(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 16 - 9 = 7 > 0$ y $f''_{xx} = 4 > 0$: **mínimo relativo** en A, de valor $f(1, 0) = 0\cdot h(A) + 2 - 4 + 1 = \boldsymbol{-1}$.

> **Trampa:** derivar $y \cdot h$ dos veces respecto de y da $2h'_y + y \cdot h''_{yy}$ (el 2 sale de aplicar dos veces la regla del producto). Y no hace falta conocer h: alcanza con sus derivadas hasta orden 2 en A, que las da p.

Ejercicio 3. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - y - x^2)}}{\sqrt{y}}$$

y sea D su dominio natural.

1. Describa D mediante inecuaciones y grafíquelo.
2. Grafique la curva de nivel 1 de f y halle una parametrización de ella, indicando claramente el dominio para el parámetro.

> **Respuesta:** 1. $D = \{(x, y) : y > 0, y \le 1 - x^2\} = \{(x, y) : -1 < x < 1, 0 < y \le 1 - x^2\}$: la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ (incluida) y por encima del eje x (excluido). 2. $C_1 = \{y = (1 - x^2)/2, -1 < x < 1\}$, arco de parábola de vértice (0, 1/2) sin los puntos (±1, 0); $\vec{g}(t) = (t, (1 - t^2)/2)$, $t \in (-1, 1)$.
>
> **1. Condiciones:** $\sqrt{(1 - y - x^2)}$ pide $1 - y - x^2 \ge 0 \iff y \le 1 - x^2$. $\sqrt{y}$ está en el denominador: $y \ge 0$ por la raíz e $y \ne 0$ por el cociente, o sea $y > 0$.
> **D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y \le 1 - x^2\}$. Para que exista y con $0 < y \le 1 - x^2$ hace falta $1 - x^2 > 0$, así que también $D = \{(x, y) : -1 < x < 1, 0 < y \le 1 - x^2\}$.
> **Gráfico:** la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ (vértice (0, 1), corta al eje x en (±1, 0)) y por encima del eje x. El arco de parábola va en trazo lleno (pertenece); el segmento del eje x entre –1 y 1 en punteado, y los puntos (±1, 0) huecos.
> **2. Planteo:** $C_1 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 1\}$. En D, $\sqrt{(1 - y - x^2)}/\sqrt{y} = 1 \iff \sqrt{(1 - y - x^2)} = \sqrt{y} \iff 1 - y - x^2 = y$ (las dos raíces son ≥ 0, así que elevar al cuadrado no agrega soluciones).
> **Cuenta:** $2y = 1 - x^2 \iff y = (1 - x^2)/2$.
> **Restricción de D:** hace falta $y > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$. La otra condición, $y \le 1 - x^2$, se cumple sola porque $(1 - x^2)/2 \le 1 - x^2$ cuando $1 - x^2 \ge 0$.
> **Curva:** C_1 es el arco de la parábola $y = (1 - x^2)/2$, de vértice (0, 1/2), entre (–1, 0) y (1, 0) **sin esos dos extremos** (ahí y = 0). Queda adentro de D, a media altura de la parábola del borde.
> **Parametrización:** $\vec{g}(t) = (t, (1 - t^2)/2)$ con **$t \in (-1, 1)$**. Control: $f(\vec{g}(t)) = \sqrt{((1 - t^2)/2)}/\sqrt{((1 - t^2)/2)} = 1$.
> **Trampa:** tomar $t \in [-1, 1]$. Los extremos (±1, 0) anulan el denominador, no son de D y por lo tanto no están en la curva de nivel.

Ejercicio 4. Sea C la curva intersección de las superficies

$\Sigma_1 : y^2 + z^2 = 2 \wedge \Sigma_2 : y - x + z = 0$.

Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano yz.

> **Respuesta:** $P_1 = (2, 1, 1)$ y $P_2 = (-2, -1, -1)$.
>
> **Planteo:** $F_1 = y^2 + z^2 - 2$ y $F_2 = y - x + z$. Una recta es paralela al plano yz cuando su dirección es perpendicular a la normal del plano, $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$: la tangente tiene que tener componente x nula.
> **Tangente en un punto genérico de C:** $\nabla F_1 = (0, 2y, 2z)$, $\nabla F_2 = (-1, 1, 1)$. $\vec{T} = \nabla F_1 \times \nabla F_2 = (2y \cdot 1 - 2z \cdot 1, 2z \cdot (-1) - 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 2y \cdot (-1)) = (2y - 2z, -2z, 2y)$. Sobre C, y y z no se anulan juntas ($y^2 + z^2 = 2$), así que $\vec{T} \ne \vec{0}$ y la curva es regular en todos sus puntos.
> **Condición:** $\vec{T} \cdot \hat{\imath} = 2y - 2z = 0 \iff z = y$.
> **Sistema con C:** $y^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$; $z = y$; $x = y + z = 2y$.
> **Resultado:** $P_1 = (2, 1, 1)$, con $\vec{T} = (0, -2, 2)$, y $P_2 = (-2, -1, -1)$, con $\vec{T} = (0, 2, -2)$.
> **Otra forma:** con $y = \sqrt{2} \cos t$, $z = \sqrt{2}$ sen t, $x = y + z$, la componente x de la velocidad es $\sqrt{2}$ (cos t – sen

t), que se anula en $t = \pi/4$ y $t = 5\pi/4$: los mismos puntos.
Trampa: pedir $\vec{T} \parallel \hat{\imath}$ (recta perpendicular al plano yz) en lugar de $\vec{T} \perp \hat{\imath}$.

Ejercicio 5. Sea $\vec{\varphi}(u, v) = (4uv, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de la superficie Σ. Si r_0 es la recta normal a Σ en el punto (3, 2, 1) y Π es el plano tangente a la superficie de ecuación $x^2 + xy + e^z = 3$ en el punto (1, 1, 0), halle $r_0 \cap \Pi$.

Respuesta: $(u, v) = (3/2, 1/2)$; r_0: $\vec{X} = (3, 2, 1) + t(1, -4, 2)$; Π: $3x + y + z = 4$; $r_0 \cap \Pi = \{(-5, 34, -15)\}$.

Paso 1, parámetros de (3, 2, 1): $u + v = 2$ y $u - v = 1$ dan $u = 3/2$, $v = 1/2$; se comprueba $4uv = 4 \cdot (3/4) = 3$ ✓.
Paso 2, normal de Σ: $\vec{\varphi}$ es C^1. $\vec{\varphi}_u = (4v, 1, 1) = (2, 1, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (4u, 1, -1) = (6, 1, -1)$. $\vec{N} = (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 6 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot 1 - 1 \cdot 6) = (-2, 8, -4) \neq \vec{0}$, proporcional a $(1, -4, 2)$. r_0: **$\vec{X} = (3, 2, 1) + t(1, -4, 2)$**.
Paso 3, plano Π: $H(x, y, z) = x^2 + xy + e^z$ es C^1; $H(1, 1, 0) = 1 + 1 + 1 = 3$ ✓. $\nabla H = (2x + y, x, e^z) = (3, 1, 1) \neq \vec{0}$. Π: $3(x - 1) + (y - 1) + z = 0$, o sea **$3x + y + z = 4$**.
Paso 4, intersección: $3(3 + t) + (2 - 4t) + (1 + 2t) = 12 + t = 4$, $t = -8$. Punto: $(3 - 8, 2 + 32, 1 - 16) =$ **$(-5, 34, -15)$**. Control: $-15 + 34 - 15 = 4$ ✓. Único, porque $(1, -4, 2) \cdot (3, 1, 1) = 1 \neq 0$.
Trampa: la derivada de xy respecto de x es y (no x), así que $H_x(1, 1, 0) = 2 + 1 = 3$; y e^z en $z = 0$ vale 1.

12/11/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - y - x^2)}}{\sqrt{y}}$$

y sea D su dominio natural.

1. Describa D mediante inecuaciones y grafíquelo.
2. Grafique la curva de nivel 1 de f y halle una parametrización de ella, indicando claramente el dominio para el parámetro.

> **Respuesta:** 1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 4 - x^2\}$ (eso obliga a $-2 < x < 2$): la región entre el eje x (excluido) y la parábola $y = 4 - x^2$ (incluida). 2. $C_1 = \{(x, y) : y = 2 - x^2/2, -2 < x < 2\}$, arco de parábola de vértice (0, 2) sin los extremos (±2, 0); $\vec{\sigma}(t) = (t, 2 - t^2/2)$, $t \in (-2, 2)$.
>
> **1) Condiciones:** numerador: $4 - y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 4 - x^2$. Denominador: $\sqrt{y}$ existe si $y \geq 0$ y no se anula si $y \neq 0$, así que $y > 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 4 - x^2\}$. Para que haya algún y hace falta $4 - x^2 > 0$, o sea $-2 < x < 2$; también se escribe $D = \{(x, y) : -2 < x < 2, 0 < y \leq 4 - x^2\}$.
> **Gráfico:** la parábola $y = 4 - x^2$ (vértice (0, 4), abre hacia abajo, corta al eje x en (±2, 0)) en trazo lleno; el segmento del eje x entre −2 y 2 punteado; D es la "cúpula" encerrada entre los dos. Los puntos (±2, 0) no pertenecen (tienen $y = 0$): círculo vacío.
> **2) Curva de nivel 1:** es $\{(x, y) \in D : f(x, y) = 1\}$. En D el denominador es positivo, así que $f = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(4 - y - x^2)} = \sqrt{y} \Leftrightarrow 4 - y - x^2 = y$ (los dos lados son ≥ 0, elevar al cuadrado no agrega soluciones) $\Leftrightarrow y = 2 - x^2/2$.
> **Restricción del dominio:** el punto tiene que estar en D. $y > 0$ da $2 - x^2/2 > 0$, o sea $-2 < x < 2$. La otra condición se cumple sola: $2 - x^2/2 \leq 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$. Entonces $C_1 = \{(x, y) : y = 2 - x^2/2, -2 < x < 2\}$.
> **Gráfico de C_1:** arco de parábola de vértice (0, 2) que baja hasta (±2, 0); esos dos puntos **no** están (círculo vacío). Queda adentro de D, por debajo de la parábola del borde.
> **Parametrización:** $\vec{\sigma}(t) = (t, 2 - t^2/2)$, $t \in (-2, 2)$. Chequeo: $f(\vec{\sigma}(t)) = \sqrt{(4 - (2 - t^2/2) - t^2)}/\sqrt{(2 - t^2/2)} = \sqrt{(2 - t^2/2)}/\sqrt{(2 - t^2/2)} = 1$.
> **Trampa:** poner $t \in [-2, 2]$ está mal: en $t = \pm 2$ sale (±2, 0), donde $\sqrt{y} = 0$ anula el denominador. El intervalo del parámetro es abierto.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = x\,h(x, y) + \alpha y^2 - 4y + 1$, con α constante y h una función de clase C^2 tal que $p(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - y - 1$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en A = (0, 1).

1. Halle el valor de α para el cual f tiene un punto crítico en A.
2. Para el valor α hallado, determine si se produce un extremo relativo en A e indique en caso afirmativo valor y tipo.

> **Respuesta:** 1. $\alpha = 2$. 2. En A = (0, 1) hay mínimo relativo ($\det Hf(A) = 7 > 0$, $f''_{xx} = 4 > 0$), de valor $f(0, 1) = -1$.
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** h es C^2, así que p tiene en A = (0, 1) el mismo valor y las mismas derivadas de 1er y 2do orden que h. $p(0, 1) = 0 + 2 + 0 - 1 - 1 = 0$, así que **$h(A) = 0$**. $\nabla p = (2x + 2y, 4y +$

$2x - 1$), así que $\nabla h(A) = (2, 3)$. Hp = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, así que $h''_{xx}(A) = 2$, $h''_{xy}(A) = 2$, $h''_{yy}(A) = 4$.

Regularidad: $f = x \cdot h + \alpha y^2 - 4y + 1$ es producto y suma de funciones C^2, así que es C^2 y vale el criterio del hessiano.

Gradiente (regla del producto): $f'_x = h + x \cdot h'_x$, $f'_y = x \cdot h'_y + 2\alpha y - 4$. En A ($x = 0$): $f'_x(A) = h(A) = 0$, que se cumple solo; $f'_y(A) = 2\alpha - 4$.

1. $f'_y(A) = 0$ da $\boldsymbol{\alpha = 2}$.

Derivadas segundas: $f''_{xx} = 2h'_x + x \cdot h''_{xx}$, $f''_{xy} = h'_y + x \cdot h''_{xy}$, $f''_{yy} = x \cdot h''_{yy} + 2\alpha$. En A: $f''_{xx} = 2 \cdot 2 = 4$, $f''_{xy} = 3$, $f''_{yy} = 2 \cdot 2 = 4$.

2. $Hf(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 16 - 9 = 7 > 0$ y $f''_{xx} = 4 > 0$: **mínimo relativo** en A, de valor $f(0, 1) = 0 \cdot h(A) + 2 - 4 + 1 = \mathbf{-1}$.

Trampa: derivar $x \cdot h$ dos veces respecto de x da $2h'_x + x \cdot h''_{xx}$ (el 2 sale de aplicar dos veces la regla del producto). Y no hace falta conocer h: alcanza con sus derivadas hasta orden 2 en A, que las da p.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x^2 - y^2, xy^2)$, con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas en todo punto. Sabiendo que la aproximación lineal de g(u, v) alrededor del punto (0, 1) es $L(u, v) = 1 - 2u + v$, halle $f'((1, -1), \check{v})$, donde $\check{v} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Respuesta: $\nabla f(1, -1) = (-3, -6)$; $f'((1, -1), \check{v}) = -3/\sqrt{2} = -3\sqrt{2}/2$.

Datos de g: $L(u, v) = 1 - 2u + v = g(0, 1) + g'_u(0, 1)u + g'_v(0, 1)(v - 1)$, así que $\boldsymbol{\nabla g(0, 1) = (-2, 1)}$.

El punto interior: $(x^2 - y^2, xy^2)$ en $(1, -1)$ da $(1 - 1, 1 \cdot 1) = (0, 1)$ ✓.

Hipótesis: g tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$ (es C^1, luego diferenciable) y la interior es polinómica: f es diferenciable en $(1, -1)$, valen la regla de la cadena y $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$.

Jacobiana interior en (1, –1): $u = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (2, 2)$; $v = xy^2$ da $(y^2, 2xy) = (1, -2)$.

Cuenta: $f'_x = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3$; $f'_y = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -6$. $\boldsymbol{\nabla f(1, -1) = (-3, -6)}$.

Resultado: $f'((1, -1), \check{v}) = (-3)(-1/\sqrt{2}) + (-6)(1/\sqrt{2}) = -3/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}/2}$.

Trampa: cuidado con los signos de $y = -1$: $-2y = 2$ y $2xy = -2$. Es el lugar donde más se pierde el ejercicio.

Ejercicio 4. Sea $\vec{\varphi}(u, v) = (u + v, 4uv, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de la superficie Σ. Si r_0 es la recta normal a Σ en el punto (2, 3, 1) y Π es el plano tangente a la superficie de ecuación $y^2 + xy + e^z = 3$ en el punto (1, 1, 0), halle $r_0 \cap \Pi$.

Respuesta: $(u, v) = (3/2, 1/2)$; r_0: $\vec{X} = (2, 3, 1) + t(4, -1, -2)$; Π: $x + 3y + z = 4$; $r_0 \cap \Pi = \{(34, -5, -15)\}$.

Paso 1, parámetros de (2, 3, 1): $u + v = 2$ y $u - v = 1$ dan $u = 3/2$, $v = 1/2$; se comprueba $4uv = 3$ ✓.

Paso 2, normal de Σ: $\vec{\varphi}$ es C^1. $\vec{\varphi}_u = (1, 4v, 1) = (1, 2, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (1, 4u, -1) = (1, 6, -1)$. $\vec{N} = (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 6, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1) = (-8, 2, 4) \neq \vec{0}$, proporcional a $(4, -1, -2)$. r_0: $\boldsymbol{\vec{X} = (2, 3, 1) + t(4, -1, -2)}$.

Paso 3, plano Π: $H(x, y, z) = y^2 + xy + e^z$ es C^1; $H(1, 1, 0) = 3$ ✓. $\nabla H = (y, 2y + x, e^z) = (1, 3, 1) \neq \vec{0}$. Π: $(x - 1) + 3(y - 1) + z = 0$, o sea $\mathbf{x + 3y + z = 4}$.

Paso 4, intersección: $(2 + 4t) + 3(3 - t) + (1 - 2t) = 12 - t = 4$, $t = 8$. Punto: $(2 + 32, 3 - 8, 1 - 16) = \mathbf{(34, -5, -15)}$. Control: $34 - 15 - 15 = 4$ ✓. Único, porque $(4, -1, -2) \cdot (1, 3, 1) = -1 \neq 0$.

Trampa: $H_y = 2y + x$ (las dos partes dependen de y), no sólo $2y$; en $(1, 1, 0)$ da 3.

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies
$\Sigma_1 : x^2 + z^2 = 2 \wedge \Sigma_2 : x - y + z = 0$.
Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano xz.

> **Respuesta:** $P_1 = (1, 2, 1)$ y $P_2 = (-1, -2, -1)$.
>
> **Planteo:** $F_1 = x^2 + z^2 - 2$ y $F_2 = x - y + z$. Una recta es paralela al plano xz cuando su dirección es perpendicular a la normal del plano, $\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$: la tangente tiene que tener componente y nula.
> **Tangente en un punto genérico de C:** $\nabla F_1 = (2x, 0, 2z)$, $\nabla F_2 = (1, -1, 1)$. $\vec{T} = \nabla F_1 \times \nabla F_2 = (0 \cdot 1 - 2z \cdot (-1), 2z \cdot 1 - 2x \cdot 1, 2x \cdot (-1) - 0 \cdot 1) = (2z, 2z - 2x, -2x)$. Sobre C, x y z no se anulan juntas ($x^2 + z^2 = 2$), así que $\vec{T} \neq \vec{0}$ y la curva es regular en todos sus puntos.
> **Condición:** $\vec{T} \cdot \hat{\jmath} = 2z - 2x = 0 \Leftrightarrow z = x$.
> **Sistema con C:** $x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$; $z = x$; $y = x + z = 2x$.
> **Resultado:** $P_1 = (1, 2, 1)$, con $\vec{T} = (2, 0, -2)$, y $P_2 = (-1, -2, -1)$, con $\vec{T} = (-2, 0, 2)$.
> **Otra forma:** parametrizando C con $x = \sqrt{2} \cos t$, $z = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$, $y = \sqrt{2} (\cos t + \operatorname{sen} t)$, la componente y de la velocidad es $\sqrt{2} (\cos t - \operatorname{sen} t)$, que se anula en $t = \pi/4$ y $t = 5\pi/4$: los mismos puntos.
> **Trampa:** pedir $\vec{T} \parallel \hat{\jmath}$ (eso es recta perpendicular al plano xz) en lugar de $\vec{T} \perp \hat{\jmath}$.

24/10/22, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{\text{sen}(xy)}{2x^2 + 3y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

Estudie la continuidad de f en el origen. Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Decida, con fundamento, si es posible que f'_x y f'_y sean simultáneamente continuas en $(0, 0)$.

> **Respuesta:** f no es continua en $(0, 0)$: por $y = mx$ el límite es $m/(2 + 3m^2)$ (0 por $y = 0$, $1/5$ por $y = x$). Las parciales existen en todo $\mathbb{R}^2$: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, y fuera del origen $f'_x = [y \cos(xy)(2x^2 + 3y^2) - 4x \text{ sen}(xy)]/(2x^2 + 3y^2)^2$, $f'_y = [x \cos(xy)(2x^2 + 3y^2) - 6y \text{ sen}(xy)]/(2x^2 + 3y^2)^2$. No es posible que f'_x y f'_y sean ambas continuas en $(0, 0)$.
>
> **Continuidad, planteo:** $f(0, 0) = 0$. Si el límite doble existiera, tendría que dar lo mismo por cualquier camino que llegue al origen; alcanza con encontrar dos caminos con límites distintos para probar que no existe.
> **Rectas $y = mx$ ($x \neq 0$):** $f(x, mx) = \text{sen}(mx^2)/((2 + 3m^2)x^2)$. Si $m = 0$ vale 0 constante. Si $m \neq 0$, escribilo como $\dfrac{\text{sen}(mx^2)}{mx^2} \cdot \dfrac{m}{2 + 3m^2} \to 1 \cdot m/(2 + 3m^2)$, porque $mx^2 \to 0$ y $\text{sen } u/u \to 1$.
> **Dos caminos distintos:** por $y = 0$ el límite es 0; por $y = x$ es $1/5$. Como dan distinto, **no existe el límite doble y f no es continua en $(0, 0)$**.
> **Parciales fuera del origen:** cada punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ tiene un entorno sin el origen donde $f = \text{sen}(xy)/(2x^2 + 3y^2)$, cociente de funciones C^1 con denominador no nulo ($2x^2 + 3y^2 = 0$ sólo en el origen). Ahí las parciales existen y, por la regla del cociente, $f'_x = [y \cos(xy)(2x^2 + 3y^2) - 4x \text{ sen}(xy)]/(2x^2 + 3y^2)^2$ y $f'_y = [x \cos(xy)(2x^2 + 3y^2) - 6y \text{ sen}(xy)]/(2x^2 + 3y^2)^2$.
> **Parciales en el origen (por definición):** $f(h, 0) = \text{sen } 0/(2h^2) = 0$ y $f(0, k) = \text{sen } 0/(3k^2) = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} (0 - 0)/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} (0 - 0)/k = 0$. Existen en todo $\mathbb{R}^2$.
> **¿Pueden ser continuas en $(0, 0)$?** Condición suficiente de diferenciabilidad: si las parciales existen en un entorno de $(0, 0)$ y son continuas en $(0, 0)$, f es diferenciable en $(0, 0)$. Acá existen en todo $\mathbb{R}^2$, así que si f'_x y f'_y fueran continuas en el origen, f sería diferenciable ahí y, en consecuencia, continua en el origen. Eso contradice lo que probamos arriba: **no es posible**.
> **Trampa:** que existan las dos parciales en el origen no dice nada de la continuidad de f (acá existen y f es discontinua): las parciales sólo miran los ejes, y en los ejes f vale 0. Tampoco calcules $f'_x(0, 0)$ reemplazando en la fórmula de afuera: en el origen la fórmula no vale.

Ejercicio 2. Sea $f = g \circ \vec{h}$ con $\vec{h}(x, y) = (-2xy, y - x^2)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sabiendo que $4x - 8y + 2z = 2$ es una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$, halle el valor de la máxima derivada direccional de g en el punto $(-4, 1)$ y la dirección en la cual este valor se produce.

> **Respuesta:** $\nabla g(-4, 1) = (-3/4, 5/2)$. Máxima derivada direccional de g en $(-4, 1)$: $\sqrt{109}/4$, en la dirección $\check{v} = (-3, 10)/\sqrt{109}$.
>
> **Datos de f:** despejando el plano, $2z = 2 - 4x + 8y$, o sea $z = 1 - 2x + 4y$. Es el plano tangente al gráfico de f en $(1, 2)$, así que **$\nabla f(1, 2) = (-2, 4)$** ($f(1, 2) = 1 - 2 + 8 = 7$).
> **El punto donde se pide g:** $\vec{h}(1, 2) = (-2 \cdot 1 \cdot 2, 2 - 1) = (-4, 1)$ ✓: justo el punto del enunciado.
> **Hipótesis:** g es C^1, luego diferenciable en $(-4, 1)$; $\vec{h}$ es polinómica. Vale la regla de la cadena: $\nabla f(1, 2) =$

$\nabla g(-4, 1)\cdot Dh(1, 2)$.

Jacobiana de $\vec{h}$ en (1, 2): $-2xy$ da $(-2y, -2x) = (-4, -2)$; $y - x^2$ da $(-2x, 1) = (-2, 1)$. $D\vec{h} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, con $\det = -4 - 4 = -8 \neq 0$: el sistema tiene solución única.

Sistema: llamando $\nabla g(-4, 1) = (a, b)$: $f'_x = -4a - 2b = -2$ y $f'_y = -2a + b = 4$. De la segunda $b = 4 + 2a$; en la primera $-4a - 8 - 4a = -2$, $a = -3/4$, y $b = 4 - 3/2 = 5/2$. **$\nabla g(-4, 1) = (-3/4, 5/2)$.**

Máximo: g es diferenciable, entonces $g'((-4, 1), \check{v}) = \nabla g\cdot\check{v} \leq \|\nabla g\|$, con igualdad en la dirección del gradiente.

Resultado: máximo **$\|\nabla g(-4, 1)\| = \sqrt{(9/16 + 100/16)} = \sqrt{109}/4 \approx 2{,}61$**, en el versor **$\check{\mathbf{v}} = (-3, 10)/\sqrt{109}$**.

Trampa: lo que se pide es la derivada de g (la de afuera) en $(-4, 1)$, no la de f en $(1, 2)$. Si respondés $\|\nabla f(1, 2)\| = 2\sqrt{5}$ estás contestando otra cosa: hay que "desarmar" la regla de la cadena resolviendo el sistema.

Ejercicio 3. Sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie Σ_1 de ecuación $y - x^2 + z = 1$ con la superficie Σ_2 de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u, 2u^2, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano de ecuación $2x + y + z = 0$.

Respuesta: Un único punto: $P = (-1, 2, 0)$, con dirección tangente $(1, -4, 2)$. (Además, la recta tangente queda contenida en el plano.)

Planteo: Σ_2: $\vec{X} = (u, 2u^2, v)$ son los puntos con $y = 2x^2$ y z libre (cilindro parabólico). Para hallar C conviene reemplazar la parametrización de Σ_2 en la ecuación de Σ_1.

Ecuación de C: $2u^2 - u^2 + v = 1 \Rightarrow v = 1 - u^2$. Entonces C: $\vec{g}(u) = (u, 2u^2, 1 - u^2)$, $u \in \mathbb{R}$, de clase C^1.

Tangente: $\vec{g}'(u) = (1, 4u, -2u)$, que nunca es $\vec{0}$ (primera componente 1): la curva es regular.

Condición de paralelismo: la recta es paralela al plano $2x + y + z = 0$ si su dirección es perpendicular a la normal $\vec{n} = (2, 1, 1)$: $\vec{g}'(u)\cdot\vec{n} = 2 + 4u - 2u = 2 + 2u = 0 \Rightarrow u = -1$.

Resultado: $P = \vec{g}(-1) = (-1, 2, 0)$, con dirección $(1, -4, 2)$ (control: $2 - 4 + 2 = 0$ ✓; P cumple $2 - 1 + 0 = 1$ en Σ_1 ✓).

Observación: P verifica $2(-1) + 2 + 0 = 0$, o sea está en el plano: la recta tangente $(-1, 2, 0) + \lambda(1, -4, 2)$ no sólo es paralela, está contenida en él. Con la convención usual (dirección perpendicular a la normal del plano) cuenta como paralela, y la respuesta es $P = (-1, 2, 0)$.

Trampa: pedir $\vec{g}' \parallel \vec{n}$: eso da recta perpendicular al plano, no paralela.

Ejercicio 4. Sea

$$f(x, y) = 2y^2 + \frac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2.$$

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Respuesta: Puntos críticos: $(0, 1)$, punto silla (no hay extremo); $(2, 1)$, mínimo local (con valor $f(2, 1) = 4$).

Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{(x, y): y \neq 0\}$; los extremos locales están entre los puntos con $\nabla f = 0$.

Derivadas: $f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f_y = 4y - 4/y^2$.

Sistema: $f_x = 0$ da $x = 0$ o $x = 2$. $f_y = 0$ da $4y^3 = 4$, $y^3 = 1$, $y = 1$ (única raíz real: $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ y $y^2 + y + 1 > 0$). **Puntos: (0, 1) y (2, 1).**

Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 4 + 8/y^3$.

Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.

(0, 1): $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\det = -72 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 1) = 8$).

(2, 1): $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $\det = 72 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**, $f(2, 1) = 2 + 4 + 8 - 12 + 2 = 4$.

Trampa: el término $4/y$ deriva a $-4/y^2$ y otra vez a $+8/y^3$; un signo mal ahí cambia f_{yy}. Y el mínimo es sólo local: cuando $y \to 0^-$, $4/y \to -\infty$.

Ejercicio 5. Pruebe, mediante el teorema de la función implícita, que existe un único $w_0 \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0) = (0, 3)$ que satisface $f(0, 3) = w_0$.
Encuentre todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 3), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $w_0 = 1$ (único); $F'_w(0, 3, 1) = 6 \neq 0$. $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$; $f'((0, 3), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Planteo: $F(u, v, w) = ve^{uw} + 2vw - 9$. El enunciado pide probar que hay un **único** w_0 que sirve, así que primero hay que encontrarlo.
Unicidad de w_0: para que $f(0, 3) = w_0$ hace falta $F(0, 3, w_0) = 0$, o sea $3e^0 + 6w_0 = 9$. Es lineal en w_0: $3 + 6w_0 = 9$ da $\mathbf{w_0 = 1}$, y no hay otro.
Hipótesis del TFI: (1) $F(0, 3, 1) = 3 + 6 - 9 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (producto de polinomio por exponencial de polinomio, más un polinomio). (3) $F'_w = uve^{uw} + 2v$, que en $(0, 3, 1)$ vale $0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces existe $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, 3)$ con $f(0, 3) = 1$.
Derivadas de f: $F'_u = vwe^{uw} \to 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$; $F'_v = e^{uw} + 2w \to 1 + 2 = 3$. $f'_u(0, 3) = -3/6 = -1/2$, $f'_v(0, 3) = -3/6 = -1/2$. $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$.
Versores: f es C^1, luego diferenciable en $(0, 3)$, y $f'((0, 3), \check{v}) = \nabla f(0, 3) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-a/2 - b/2 = 0$, o sea $b = -a$, y $2a^2 = 1$. Quedan $\check{\mathbf{v}} = \mathbf{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$ y $\check{\mathbf{v}} = \mathbf{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}$.
Trampa: "todos los versores" son dos (opuestos). Y el resultado depende de usar la diferenciabilidad: sin justificarla, $\nabla f \cdot \check{v}$ no está autorizado.

22/10/22, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4)}, \ln(y - x - 1))$ y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

> **Respuesta:** $D = \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 \leq 1, y > x + 1\}$: la mitad de la elipse de centro (1, 2) y semiejes 1 (x) y 2 (y) que queda arriba de $y = x + 1$, arco incluido y diámetro excluido. $\text{int}(D) = \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 < 1, y > x + 1\}$. ∂D = arco $\{(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 = 1, y \geq x + 1\} \cup$ segmento de $y = x + 1$ entre $(1 - 2/\sqrt{5}, 2 - 2/\sqrt{5})$ y $(1 + 2/\sqrt{5}, 2 + 2/\sqrt{5})$. D no es compacto (acotado pero no cerrado).
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los de sus componentes: $8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0$ (raíz) y $y - x - 1 > 0$ (logaritmo).
> **Completar cuadrados:** $8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 = -4(x^2 - 2x + 1) + 4 - (y^2 - 4y + 4) + 4 - 4 = 4 - 4(x - 1)^2 - (y - 2)^2$; que sea ≥ 0 equivale a $4(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$. La condición es $(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 \leq 1$: elipse de centro (1, 2), semieje 1 horizontal y 2 vertical (vértices (0, 2), (2, 2), (1, 0), (1, 4)), con contorno e interior.
> **Logaritmo:** $y - x - 1 > 0 \Leftrightarrow y > x + 1$: semiplano abierto arriba de la recta $y = x + 1$. Esa recta **pasa por el centro** (1, 2) de la elipse, así que la parte en dos mitades.
> **D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 \leq 1, y > x + 1\}$**: la media elipse que contiene a (0, 2) y (1, 4) (y no a (2, 2) ni (1, 0)).
> **Cortes recta-elipse:** con $y - 2 = x - 1$ en la elipse, $4(x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4/5 \Rightarrow x = 1 \pm 2/\sqrt{5}$, $y = x + 1$. Puntos $P_1 = (1 - 2/\sqrt{5}, 2 - 2/\sqrt{5}) \approx (0{,}11; 1{,}11)$ y $P_2 = (1 + 2/\sqrt{5}, 2 + 2/\sqrt{5}) \approx (1{,}89; 2{,}89)$.
> **Gráfico:** el arco de elipse de P_1 a P_2 pasando por (0, 2) y (1, 4) en trazo lleno, el segmento P_1P_2 (un diámetro inclinado a 45°) punteado, y P_1, P_2 con círculo vacío: están sobre la recta, donde el logaritmo no está definido.
> **Interior: $\text{int}(D) = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 < 1, y > x + 1\}$.** Con las dos desigualdades estrictas, por continuidad valen en un entorno; los puntos del arco no son interiores (cerca hay puntos de afuera de la elipse).
> **Frontera: $\partial D = \{(x - 1)^2 + (y - 2)^2/4 = 1, y \geq x + 1\} \cup \{(x, x + 1) : 1 - 2/\sqrt{5} \leq x \leq 1 + 2/\sqrt{5}\}$**: el arco (con sus extremos P_1 y P_2) y el diámetro. Cada punto del diámetro tiene de un lado puntos de D y del otro puntos que no cumplen la desigualdad del logaritmo.
> **¿Compacto?** En $\mathbb{R}^2$, compacto $\Leftrightarrow$ cerrado y acotado. D es acotado (está dentro de la elipse), pero **no es cerrado**: el centro (1, 2) es frontera ($(1, 2 + 1/n) \in D$ tiende a él) y no pertenece a D. Entonces **D no es compacto**.
> **Trampa:** no ver que la recta pasa por el centro y dibujar un casquete chico. Y P_1, P_2 son de ∂D pero no de D aunque estén sobre la elipse.

Ejercicio 2. Sea

$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + \frac{y^3}{3}$.

Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

> **Respuesta:** Los puntos son (0, 0) y (1, –1). En (0, 0) hay mínimo relativo, de valor f(0, 0) = 0. En (1, –1) el plano tangente es horizontal (z = 1/6) pero hay punto silla: no hay extremo.
>
> **Planteo:** f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que su gráfico tiene plano tangente en todo punto: $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, con normal $(f'_x, f'_y, -1)$. Es paralelo al plano xy (normal (0, 0, 1)) si y sólo si $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$: son exactamente los puntos críticos.
> **Puntos críticos:** $f'_x = x + y$, $f'_y = x + 2y + y^2$. De $f'_x = 0$, $x = -y$; en $f'_y = 0$: $-y + 2y + y^2 = y(1 + y) = 0$, o sea y = 0 o y = –1. Puntos: **(0, 0)** y **(1, –1)**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2 + 2y$, así que $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 + 2y \end{pmatrix}$ y $\det H = 1 + 2y$.
> **En (0, 0):** $\det H = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 1 > 0$: **mínimo relativo**, de valor f(0, 0) = **0** (plano tangente z = 0).
> **En (1, –1):** $\det H = -1 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. Ahí el plano tangente es $z = f(1, -1) = 1/2 - 1 + 1 - 1/3 = 1/6$.
> **Trampa:** plano tangente horizontal no quiere decir extremo: en (1, –1) el plano es horizontal y sin embargo el gráfico lo cruza (silla). Por eso hay que clasificar cada punto.

Ejercicio 3. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v, uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x, y, z) = x^2 + 4y + z^2$ en el punto $(x_0, 1, 1)$, con $x_0 < 0$.
Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

> **Respuesta:** $x_0 = -1$, dirección (–1, 2, 1). Un único punto: $P = \vec{X}(-1, 1) = (0, 1, -1)$. Plano tangente: $-x + 2y + z = 1$.
>
> **Paso 1, el punto de la superficie de nivel:** $f(x_0, 1, 1) = 6$ pide $x_0^2 + 4 + 1 = 6$, $x_0 = \pm 1$; con $x_0 < 0$, $\mathbf{x_0 = -1}$.
> **Paso 2, recta normal:** f es C^1, $\nabla f = (2x, 4, 2z)$, y en (–1, 1, 1) vale $(-2, 4, 2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{d} = (-1, 2, 1)$. La recta normal tiene dirección $\vec{d}$.
> **Paso 3, la condición:** un plano es ortogonal a una recta cuando su normal es paralela a la dirección de la recta. Hay que pedir $\vec{N}(u, v) = \lambda \vec{d}$ con $\lambda \neq 0$.
> **Paso 4, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (1, 0, v)$, $\vec{X}_v = (1, 1, u)$. $\vec{N} = (0 \cdot u - v \cdot 1, v \cdot 1 - 1 \cdot u, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = (-v, v - u, 1)$. La tercera componente es 1: Σ es regular en todos lados.
> **Paso 5, sistema:** $(-v, v - u, 1) = \lambda(-1, 2, 1)$. La tercera da $\lambda = 1$; luego $v = 1$ y $v - u = 2$, $u = -1$. Solución única.
> **Punto y plano:** $P = \vec{X}(-1, 1) = (0, 1, -1)$. Plano tangente con normal (–1, 2, 1): $-(x - 0) + 2(y - 1) + (z + 1) = 0$, o sea $\mathbf{-x + 2y + z = 1}$.
> **Trampa:** "ortogonal a la recta" no es "perpendicular a la normal": si pedís $\vec{N} \cdot \vec{d} = 0$ estás buscando planos que contienen la dirección de la recta (paralelos a ella), que es otro problema.

Ejercicio 4. Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$ la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1 que cumple $h(0, -1) = z_0$.
Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(0.1, -1.05)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(0, -1)$.

> **Respuesta:** $z_0 = 1$ (única raíz real); $F'_z(0, -1, 1) = 2 \neq 0$. $\nabla h(0, -1) = (-1/2, -1/2)$; $h(0.1, -1.05) \approx 0.975$; versor de máxima derivada direccional: $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = e^x z + yz^2 + z^3 - 1$. El z_0 no viene dado: sale de pedir $F(0, -1, z_0) = 0$.
> **Cálculo de z_0:** en $(x_0, y_0) = (0, -1)$ la ecuación queda $z - z^2 + z^3 = 1$, o sea $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$, que factoriza como $(z - 1)(z^2 + 1) = 0$. Como $z^2 + 1 > 0$, la única raíz real es $\mathbf{z_0 = 1}$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(x_0, y_0, 1) = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y exponencial). (3) $F'_z = e^x + 2yz + 3z^2$, que en el punto vale $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe $z = h(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, -1)$ con $h(0, -1) = 1$.
> **Derivadas de h:** $F'_x = e^x z \to 1$; $F'_y = z^2 \to 1$. Por el TFI, $h'_x = -1/2$ y $h'_y = -1/2$, es decir $\nabla h(0, -1) = (-1/2, -1/2)$.
> **Aproximación lineal:** h es C^1, por lo tanto diferenciable, y $h(x, y) \approx h(0, -1) + \nabla h \cdot (\Delta x, \Delta y)$. Con $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = -1.05 - (-1) = -0.05$: $h(0.1, -1.05) \approx 1 + (-1/2)(0.1) + (-1/2)(-0.05) = 1 - 0.05 + 0.025 = \mathbf{0.975}$.
> **Versor de máxima derivada direccional:** como h es diferenciable, $h'(P, \check{v}) = \nabla h(P) \cdot \check{v} \leq \|\nabla h(P)\|$, con igualdad en la dirección del gradiente ($\nabla h \neq \vec{0}$). Entonces $\check{v} = \nabla h / \|\nabla h\| = \mathbf{(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$, y ese máximo vale $\|\nabla h\| = \sqrt{2}/2$.
> **Trampa:** el versor es el gradiente **normalizado** y con su signo: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es justamente la dirección de derivada mínima.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) - y^3}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 0), \check{v}) = 0$.

> **Respuesta:** $f'((0, 0), (a, b)) = (a^3 - b^3)/(a^2 + 2b^2)$ existe para todo versor. $f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = -1/2$. Es nula para $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{v} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
>
> **Planteo:** para un versor $\check{v} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, $f'((0, 0), \check{v}) = \lim_{t \to 0} (f(ta, tb) - f(0, 0))/t$.
> **Cuenta:** para $t \neq 0$, $f(ta, tb) = [\operatorname{sen}(a^3 t^3) - b^3 t^3]/(t^2(a^2 + 2b^2))$, así que el cociente es $\dfrac{\operatorname{sen}(a^3 t^3) - b^3 t^3}{t^3(a^2 + 2b^2)} = \dfrac{1}{a^2 + 2b^2} \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen}(a^3 t^3)}{t^3} - b^3 \right)$. El denominador $a^2 + 2b^2 = 1 + b^2$ nunca es 0.
> **El límite del seno:** si $a \neq 0$, $\operatorname{sen}(a^3 t^3)/t^3 = a^3 \cdot \operatorname{sen}(a^3 t^3)/(a^3 t^3) \to a^3 \cdot 1$; si $a = 0$ es $0 = a^3$. En los dos casos tiende a a^3.
> **Resultado:** $f'((0, 0), \check{v}) = (a^3 - b^3)/(a^2 + 2b^2)$, que existe para todo versor: **f admite derivadas direccionales en el origen en todas las direcciones**.
> **Parciales:** con $\check{v} = (1, 0)$, $f'_x(0, 0) = 1/1 = \mathbf{1}$; con $\check{v} = (0, 1)$, $f'_y(0, 0) = -1/2 = \mathbf{-1/2}$.
> **Versores con derivada nula:** $(a^3 - b^3)/(a^2 + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ (la función cubo es inyectiva). Con $a^2 + b^2 = 1$: $2a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{2}$. **$\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ o $\check{v} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$**.
> **Trampa:** no uses $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$: exige f diferenciable, y esta f no lo es (la derivada direccional no es

> lineal en v̌). Con $\nabla f(0, 0) = (1, -1/2)$ te daría $a - b/2 = 0$, o sea $\pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, donde la derivada real vale $\mp 7\sqrt{5}/45$, no 0.

22/10/22, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(4x - x^2 + 8y - 4y^2 - 4)}, \ln(x - y - 1))$
y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

> **Respuesta:** $D = \{(x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 \leq 1, y < x - 1\}$: la mitad de la elipse de centro (2, 1) y semiejes 2 (x) y 1 (y) que queda debajo de $y = x - 1$, arco incluido y diámetro excluido. $\text{int}(D) = \{(x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 < 1, y < x - 1\}$. ∂D = arco $\{(x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 = 1, y \leq x - 1\} \cup$ segmento de $y = x - 1$ entre $(2 - 2/\sqrt{5}, 1 - 2/\sqrt{5})$ y $(2 + 2/\sqrt{5}, 1 + 2/\sqrt{5})$. D no es compacto (acotado pero no cerrado).
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los de sus componentes: $4x - x^2 + 8y - 4y^2 - 4 \geq 0$ (raíz) y $x - y - 1 > 0$ (logaritmo).
> **Completar cuadrados:** $4x - x^2 + 8y - 4y^2 - 4 = -(x^2 - 4x + 4) + 4 - 4(y^2 - 2y + 1) + 4 - 4 = 4 - (x - 2)^2 - 4(y - 1)^2$; que sea ≥ 0 equivale a $(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 \leq 4$. La condición es $(x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 \leq 1$: elipse de centro (2, 1), semieje 2 horizontal y 1 vertical (vértices (0, 1), (4, 1), (2, 0), (2, 2)), con contorno e interior.
> **Logaritmo:** $x - y - 1 > 0 \Leftrightarrow y < x - 1$: semiplano abierto debajo de la recta $y = x - 1$. Esa recta **pasa por el centro** (2, 1) de la elipse, así que la parte en dos mitades.
> **D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 \leq 1, y < x - 1\}$**: la media elipse que contiene a (4, 1) y (2, 0) (y no a (0, 1) ni (2, 2)).
> **Cortes recta-elipse:** con $y - 1 = x - 2$ en la elipse, $(x - 2)^2 + 4(x - 2)^2 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 4/5 \Rightarrow x = 2 \pm 2/\sqrt{5}$, $y = x - 1$. Puntos $P_1 = (2 - 2/\sqrt{5}, 1 - 2/\sqrt{5}) \approx (1{,}11; 0{,}11)$ y $P_2 = (2 + 2/\sqrt{5}, 1 + 2/\sqrt{5}) \approx (2{,}89; 1{,}89)$.
> **Gráfico:** el arco de elipse de P_1 a P_2 pasando por (2, 0) y (4, 1) en trazo lleno, el segmento P_1P_2 (un diámetro inclinado a 45°) punteado, y P_1, P_2 con círculo vacío: están sobre la recta, donde el logaritmo no está definido.
> **Interior: $\text{int}(D) = \{(x, y) : (x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 < 1, y < x - 1\}$.** Con las dos desigualdades estrictas, por continuidad valen en un entorno; los puntos del arco no son interiores (cerca hay puntos de afuera de la elipse).
> **Frontera: $\partial D = \{(x - 2)^2/4 + (y - 1)^2 = 1, y \leq x - 1\} \cup \{(x, x - 1) : 2 - 2/\sqrt{5} \leq x \leq 2 + 2/\sqrt{5}\}$**: el arco (con sus extremos P_1 y P_2) y el diámetro. Cada punto del diámetro tiene de un lado puntos de D y del otro puntos que no cumplen la desigualdad del logaritmo.
> **¿Compacto?** En $\mathbb{R}^2$, compacto $\Leftrightarrow$ cerrado y acotado. D es acotado (está dentro de la elipse), pero **no es cerrado**: el centro (2, 1) es frontera ($(2 + 1/n, 1) \in D$ tiende a él) y no pertenece a D. Entonces **D no es compacto**.
> **Trampa:** no ver que la recta pasa por el centro y dibujar un casquete chico. Y P_1, P_2 son de ∂D pero no de D aunque estén sobre la elipse.

Ejercicio 2. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial
$\vec{X} = (u, u + v, uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x, y, z) = 4x + y^2 + z^2$ en el punto $(1, y_0, 1)$, con $y_0 < 0$.
Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

Respuesta: $y_0 = -1$, dirección $(2, -1, 1)$. Un único punto: $P = \vec{X}(1, -1) = (1, 0, -1)$. Plano tangente: $2x - y + z = 1$.

Paso 1, el punto de la superficie de nivel: $f(1, y_0, 1) = 6$ pide $4 + y_0^2 + 1 = 6$, $y_0 = \pm 1$; con $y_0 < 0$, $\mathbf{y_0 = -1}$.
Paso 2, recta normal: f es C^1, $\nabla f = (4, 2y, 2z)$, y en $(1, -1, 1)$ vale $(4, -2, 2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{d} = (2, -1, 1)$.
Paso 3, la condición: el plano tangente es ortogonal a la recta cuando su normal es paralela a $\vec{d}$: $\vec{N}(u, v) = \lambda\vec{d}$, $\lambda \neq 0$.
Paso 4, normal de Σ: $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (1, 1, v)$, $\vec{X}_v = (0, 1, u)$. $\vec{N} = (1 \cdot u - v \cdot 1, v \cdot 0 - 1 \cdot u, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (u - v, -u, 1)$. La tercera componente es 1: Σ es regular en todos lados.
Paso 5, sistema: $(u - v, -u, 1) = \lambda(2, -1, 1)$. $\lambda = 1$, $u = 1$ y $u - v = 2$, $v = -1$. Solución única.
Punto y plano: $P = \vec{X}(1, -1) = (1, 0, -1)$. Plano tangente con normal $(2, -1, 1)$: $2(x - 1) - y + (z + 1) = 0$, o sea $\mathbf{2x - y + z = 1}$.
Trampa: la condición es $\vec{N} \parallel \vec{d}$ (producto vectorial nulo o $\vec{N} = \lambda\vec{d}$), no $\vec{N} \cdot \vec{d} = 0$; esta última describe planos paralelos a la recta.

Ejercicio 3. Sea

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

Respuesta: Puntos: $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. En $(0, 0)$ hay mínimo relativo, de valor $f(0, 0) = 0$. En $(-1, 1)$ hay punto silla (no hay extremo; $f(-1, 1) = 1/6$).

Planteo: f es polinómica, así que es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y su gráfico tiene plano tangente en todo punto: $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Ese plano es paralelo al plano xy (o sea, horizontal, $z = \text{cte}$) si y sólo si $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$: lo que se pide son los **puntos críticos** de f.
Gradiente: $f'_x = y + 2x + x^2$, $f'_y = y + x$.
Puntos críticos: de $f'_y = 0$ sale $y = -x$. Reemplazando en la otra: $-x + 2x + x^2 = x(1 + x) = 0$, así que $x = 0$ o $x = -1$. Quedan **(0, 0)** y **(−1, 1)**.
Hessiano: $f''_{xx} = 2 + 2x$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 1$, es decir $H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
En (0, 0): $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det H = 2 - 1 = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $\mathbf{f(0, 0) = 0}$.
En (−1, 1): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det H = 0 - 1 = -1 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. El plano tangente es $z = f(-1, 1) = 1/2 - 1 + 1 - 1/3 = 1/6$, horizontal, pero el gráfico lo atraviesa.
Trampa: "plano tangente paralelo al plano xy" no garantiza extremo: sólo pide $\nabla f = 0$. Por eso el enunciado pregunta aparte si hay extremo, y uno de los dos puntos es silla. Y no te olvides de $x = 0$ al resolver $x(1 + x) = 0$ (si dividís por x lo perdés).

Ejercicio 4. Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe un $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ la ecuación $e^y z + xz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1 que cumple $h(-1, 0) = z_0$.
Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(-1.05, 0.1)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(-1, 0)$.

> **Respuesta:** $z_0 = 1$ (única raíz real); $F'_z(-1, 0, 1) = 2 \neq 0$. $\nabla h(-1, 0) = (-1/2, -1/2)$; $h(-1.05, 0.1) \approx 0.975$; versor de máxima derivada direccional: $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = e^y z + xz^2 + z^3 - 1$. El z_0 no viene dado: sale de pedir $F(-1, 0, z_0) = 0$.
> **Cálculo de z_0:** en $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ la ecuación queda $z - z^2 + z^3 = 1$, o sea $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$, que factoriza como $(z - 1)(z^2 + 1) = 0$. Como $z^2 + 1 > 0$, la única raíz real es $\mathbf{z_0 = 1}$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(x_0, y_0, 1) = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y exponencial). (3) $F'_z = e^y + 2xz + 3z^2$, que en el punto vale $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe $z = h(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(-1, 0)$ con $h(-1, 0) = 1$.
> **Derivadas de h:** $F'_x = z^2 \to 1$; $F'_y = e^y z \to 1$. Por el TFI, $h'_x = -1/2$ y $h'_y = -1/2$, es decir $\nabla h(-1, 0) = (-1/2, -1/2)$.
> **Aproximación lineal:** h es C^1, por lo tanto diferenciable, y $h(x, y) \approx h(-1, 0) + \nabla h \cdot (\Delta x, \Delta y)$. Con $\Delta x = -1.05 - (-1) = -0.05$ y $\Delta y = 0.1$: $h(-1.05, 0.1) \approx 1 + (-1/2)(-0.05) + (-1/2)(0.1) = 1 + 0.025 - 0.05 =$ **0.975**.
> **Versor de máxima derivada direccional:** como h es diferenciable, $h'(P, \check{v}) = \nabla h(P) \cdot \check{v} \leq \|\nabla h(P)\|$, con igualdad en la dirección del gradiente ($\nabla h \neq \vec{0}$). Entonces $\check{v} = \nabla h / \|\nabla h\|$ = **$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$**, y ese máximo vale $\|\nabla h\| = \sqrt{2}/2$.
> **Trampa:** el versor es el gradiente **normalizado** y con su signo: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es justamente la dirección de derivada mínima.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar
$f(x, y) = \{ \dfrac{\operatorname{sen}(y^3) - x^3}{2x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 0), \check{v}) = 0$.

> **Respuesta:** $f'((0, 0), (a, b)) = (b^3 - a^3)/(2a^2 + b^2)$ existe para todo versor. $f'_x(0, 0) = -1/2$, $f'_y(0, 0) = 1$. Es nula para $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{v} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
>
> **Planteo:** para un versor $\check{v} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, $f'((0, 0), \check{v}) = \lim_{t \to 0} (f(ta, tb) - f(0, 0))/t$.
> **Cuenta:** para $t \neq 0$, $f(ta, tb) = [\operatorname{sen}(b^3 t^3) - a^3 t^3]/(t^2(2a^2 + b^2))$, así que el cociente es $\dfrac{\operatorname{sen}(b^3 t^3) - a^3 t^3}{t^3(2a^2 + b^2)} = \dfrac{1}{2a^2 + b^2} \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen}(b^3 t^3)}{t^3} - a^3 \right)$. El denominador $2a^2 + b^2 = 1 + a^2$ nunca es 0.
> **El límite del seno:** si $b \neq 0$, $\operatorname{sen}(b^3 t^3)/t^3 = b^3 \cdot \operatorname{sen}(b^3 t^3)/(b^3 t^3) \to b^3$; si $b = 0$ es $0 = b^3$. En los dos casos tiende a b^3.
> **Resultado:** $f'((0, 0), \check{v}) = (b^3 - a^3)/(2a^2 + b^2)$, que existe para todo versor: **f admite derivadas direccionales en el origen en todas las direcciones**.
> **Parciales:** con $\check{v} = (1, 0)$, $f'_x(0, 0) = -1/2 =$ **$-1/2$**; con $\check{v} = (0, 1)$, $f'_y(0, 0) = 1/1 =$ **1**.
> **Versores con derivada nula:** $(b^3 - a^3)/(2a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow b^3 = a^3 \Leftrightarrow a = b$ (la función cubo es inyectiva). Con $a^2 + b^2 = 1$: $2a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{2}$. **$\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ o $\check{v} = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$**.
> **Trampa:** no uses $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$: exige f diferenciable, y esta f no lo es (la derivada direccional no es

lineal en v̌). Con ∇f(0, 0) = (–1/2, 1) te daría –a/2 + b = 0, o sea ±(2/√5, 1/√5), donde la derivada real vale ∓7√5/45, no 0.

12/7/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = h(xy, x^2 + y^2)$ con $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que
$p(u, v) = 1 - 5v + 2u + 3v^2 - u^2 + uv$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en $(u_0, v_0) = (-1, 2)$.
Halle la máxima derivada direccional de f en $(1, -1)$ y determine el versor en el cual se produce ese valor.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -1) = (6, -6)$. Máxima derivada direccional: $6\sqrt{2}$, en el versor $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
>
> **Datos de h:** el Taylor de orden 2 de h en $(-1, 2)$ coincide con h en valor, primeras y segundas derivadas en ese punto. Está escrito desarrollado (no en potencias de $u + 1$ y $v - 2$), así que hay que **derivar p y evaluar**: $p'_u = 2 - 2u + v \to 2 + 2 + 2 = 6$; $p'_v = -5 + 6v + u \to -5 + 12 - 1 = 6$. Entonces **$\nabla h(-1, 2) = (6, 6)$**.
> **El punto interior:** $(xy, x^2 + y^2)$ en $(1, -1)$ da $(-1, 2)$ ✓.
> **Hipótesis:** $h \in C^2$ y la función interior es polinómica, así que f es C^1 (de hecho C^2), en particular diferenciable en $(1, -1)$. Eso permite la regla de la cadena y la fórmula $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$.
> **Jacobiana interior en (1, −1):** $u = xy$ da $(y, x) = (-1, 1)$; $v = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (2, -2)$.
> **Cuenta:** $f'_x = 6 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 = 6$; $f'_y = 6 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) = -6$. **$\nabla f(1, -1) = (6, -6)$**.
> **Máximo:** $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v} \le \|\nabla f(P)\|$ (Cauchy-Schwarz con $\|\check{v}\| = 1$), con igualdad sólo si $\check{v} = \nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$.
> **Resultado:** máxima derivada direccional **$\|\nabla f(1, -1)\| = \sqrt{(36 + 36)} = 6\sqrt{2}$**, en el versor **$\check{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$**.
> **Trampa:** leer $\nabla h(-1, 2)$ como los coeficientes de u y de v (2 y −5) está mal: esos serían las derivadas en $(0, 0)$, no en $(-1, 2)$. El Taylor desarrollado hay que derivarlo y evaluarlo en el punto.

Ejercicio 2. Sea C la curva contenida en la superficie Σ de ecuación vectorial $\vec{X} = (u, v, v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, cuya proyección ortogonal sobre el plano xy satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 2$, y sea $A = (1, -1, 1)$.
Halle una ecuación vectorial de la recta $r_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2$, donde Π_1 es el plano normal a C en A y Π_2 es el plano xz.

> **Respuesta:** Π_1: $x + y - 2z + 2 = 0$. r_0: $(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(2, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
>
> **Σ en cartesianas:** $\vec{X} = (u, v, v^2)$ es la gráfica de $z = y^2$ (cilindro parabólico). C es la parte de Σ que se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, o sea $C = \{x^2 + y^2 = 2, z = y^2\}$. A está en C: $1 + 1 = 2$ y $(-1)^2 = 1$ ✓.
> **Parametrización:** $\vec{g}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen}^2 t)$, de clase C^1; A corresponde a $t = -\pi/4$ ($\cos t = 1/\sqrt{2}$, $\operatorname{sen} t = -1/\sqrt{2}$).
> **Tangente en A:** $\vec{g}'(t) = (-\sqrt{2} \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t, 4 \operatorname{sen} t \cos t)$, así que $\vec{g}'(-\pi/4) = (1, 1, -2) \neq \vec{0}$. Control: $\nabla(x^2 + y^2) = (2x, 2y, 0) = (2, -2, 0)$ y $\nabla(z - y^2) = (0, -2y, 1) = (0, 2, 1)$ en A; $(2, -2, 0) \times (0, 2, 1) = (-2, -2, 4) \parallel (1, 1, -2)$ ✓.
> **Π_1 (plano normal a C en A):** su normal es la tangente de la curva: $(x - 1) + (y + 1) - 2(z - 1) = 0$, es decir $x + y - 2z + 2 = 0$.
> **Π_2:** el plano xz es $y = 0$, con normal $(0, 1, 0)$.
> **Dirección de r_0:** perpendicular a las dos normales: $(1, 1, -2) \times (0, 1, 0) = (1 \cdot 0 - (-2) \cdot 1, (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (2, 0, 1)$.

Un punto de r_0: con y = 0 queda x − 2z + 2 = 0; eligiendo z = 1, x = 0: (0, 0, 1).
Resultado: r_0: (x, y, z) = (0, 0, 1) + λ(2, 0, 1), λ ∈ ℝ. Control: y = 0 ✓ y 2λ + 0 − 2(1 + λ) + 2 = 0 ✓.
Trampa: el plano xz es y = 0, no z = 0. Y "la proyección satisface $x^2 + y^2 = 2$" no da la curva sola: hay que cruzarla con Σ para obtener la z de cada punto.

Ejercicio 3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y^2 - 2xy)e^x$, halle todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy. Determine en cada uno de los puntos hallados si se produce un extremo local, indicando el tipo de extremo y su valor en caso afirmativo.

Respuesta: Los puntos son (0, 0) y (−2, −2). En (0, 0) hay punto silla (no hay extremo). En (−2, −2) hay mínimo local, de valor $f(-2, -2) = -4e^{-2}$.

Planteo: f es producto de un polinomio por e^x, así que es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y en cada punto el gráfico tiene plano tangente $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, con normal $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$. Ese plano es paralelo al plano xy (normal (0, 0, 1)) si y sólo si $\vec{n} \parallel (0, 0, 1)$, es decir $\mathbf{f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0}$: son los puntos críticos.
Derivadas: $f_x = (y^2 - 2y - 2xy)e^x = -y(2x - y + 2)e^x$; $f_y = (2y - 2x)e^x$.
Sistema: como $e^x \neq 0$, $f_y = 0$ da y = x. Reemplazando en $f_x = 0$: $-x(2x - x + 2) = -x(x + 2) = 0$, así que x = 0 o x = −2. **Puntos: (0, 0) y (−2, −2)**, con f(0, 0) = 0 y $f(-2, -2) = (4 - 8)e^{-2} = -4e^{-2}$.
Derivadas segundas: $f_{xx} = (y^2 - 4y - 2xy)e^x$, $f_{xy} = (2y - 2x - 2)e^x$, $f_{yy} = 2e^x$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si det H > 0 y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si det H > 0 y $f_{xx} < 0$, máximo local; si det H < 0, punto silla; si det H = 0 el criterio no decide.
En (0, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, det H = −4 < 0: **punto silla**, no hay extremo. Se ve también a mano: $f(0, y) = y^2 > 0$ y $f(x, x) = -x^2e^x < 0$ cerca del origen, y f(0, 0) = 0.
En (−2, −2): $H = \begin{pmatrix} 4e^{-2} & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & 2e^{-2} \end{pmatrix}$, $\det H = 8e^{-4} - 4e^{-4} = 4e^{-4} > 0$ y $f_{xx} = 4e^{-2} > 0$: **mínimo local, $f(-2, -2) = -4e^{-2}$**.
Trampa: "plano tangente paralelo al plano xy" no es "f = 0" ni "$f_x = 0$" solo: hacen falta las dos derivadas nulas. Y un plano tangente horizontal no garantiza extremo: el origen tiene plano tangente z = 0 y es silla.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por
$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}, \ln(x - y^2 + 1))$,
donde D es el dominio natural de $\vec{f}$.
Determine y grafique los conjuntos D y H, donde H es el conjunto de puntos (x, y) ∈ D para los cuales $\vec{f}(x, y)$ tiene alguna componente nula.

Respuesta: $D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2 - 1\} = \{|y| < \sqrt{7}/2, y^2 - 1 < x \leq \sqrt{(1 - y^2/4)}\}$: la región entre la parábola $x = y^2 - 1$ (excluida) y el arco derecho de la elipse (incluido), con los puntos $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$ y (−1, 0) excluidos. $H = H_1 \cup H_2$, con $H_1 = \{4x^2 + y^2 = 4, 3/4 < x \leq 1\}$ (arco de elipse sin sus extremos) y $H_2 = \{x = y^2, |y| \leq y_0\}$, $y_0 = \sqrt{((\sqrt{65} - 1)/8)} \approx 0{,}94$ (arco de parábola por el origen que termina sobre la elipse en $(y_0^2, \pm y_0) \approx (0{,}88; \pm 0{,}94)$).

Condiciones: $f_1 = \sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}$ pide $4x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2/4 \leq 1$ (elipse cerrada, vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 2)$). $f_2 = \ln(x - y^2 + 1)$ pide $x - y^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > y^2 - 1$: los puntos a la derecha de la parábola $x = y^2 - 1$ (vértice $(-1, 0)$, abre hacia la derecha), sin la parábola.
Cortes: en la parábola $y^2 = x + 1$; en la elipse queda $4x^2 + x + 1 = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (4x - 3)(x + 1) = 0$. Con $x = -1$, $y = 0$: el vértice de la parábola es el vértice izquierdo de la elipse (ahí se tocan). Con $x = 3/4$, $y^2 = 7/4$: los puntos $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$. Entre esos puntos la parábola va por adentro de la elipse (en $y = 1$ la parábola está en $x = 0$ y la elipse va de $x \approx -0{,}87$ a $x \approx 0{,}87$).
D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4,\ x > y^2 - 1\}$. Por franjas horizontales: si $|y| < \sqrt{7}/2$, $y^2 - 1 < x \leq \sqrt{(1 - y^2/4)}$; si $|y| \geq \sqrt{7}/2$ no hay ningún x (haría falta $x > y^2 - 1 \geq 3/4$ y $x \leq \sqrt{(1 - y^2/4)} \leq 3/4$). Gráfico: una medialuna con el arco derecho de la elipse (de $(3/4, -\sqrt{7}/2)$ a $(3/4, \sqrt{7}/2)$ pasando por $(1, 0)$) en trazo lleno, el arco de parábola entre los mismos puntos pasando por $(-1, 0)$ punteado, y $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$ y $(-1, 0)$ en círculo vacío. La zona entre el arco izquierdo de la elipse y la parábola no es de D.
H: $H = \{(x, y) \in D : f_1(x, y) = 0 \text{ o } f_2(x, y) = 0\}$.
$f_1 = 0$: $4x^2 + y^2 = 4$, pero sólo los puntos de la elipse que están en D. Sobre la elipse $y^2 = 4 - 4x^2$, y $x > y^2 - 1$ se vuelve $4x^2 + x - 3 > 0 \Leftrightarrow (4x - 3)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 3/4$ (en la elipse $x \in [-1, 1]$, y en $x = -1$ la desigualdad estricta falla). **$H_1 = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 4,\ 3/4 < x \leq 1\}$**: el arco derecho, sin sus extremos $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$.
$f_2 = 0$: $\ln(x - y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = y^2$: la parábola de vértice en el origen. Para que el punto esté en D: $x > y^2 - 1$ vale siempre ($y^2 > y^2 - 1$) y la elipse pide $4y^4 + y^2 \leq 4$. La raíz positiva de $4s^2 + s - 4 = 0$ es $s = (\sqrt{65} - 1)/8 \approx 0{,}883$, así que la condición es $y^2 \leq (\sqrt{65} - 1)/8$. **$H_2 = \{(y^2, y) : |y| \leq y_0\}$**, con $y_0 = \sqrt{((\sqrt{65} - 1)/8)} \approx 0{,}940$: el arco de $x = y^2$ desde $(y_0^2, -y_0)$ hasta (y_0^2, y_0) pasando por $(0, 0)$, con los extremos incluidos (están sobre la elipse con $x \approx 0{,}883 > 3/4$: ahí se anulan las dos componentes).
Resultado: $H = H_1 \cup H_2$. Gráfico: el arco derecho de la elipse (sin las puntas $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$) y, pegado a él en $(0{,}883; \pm 0{,}940)$, el arco de la parábola $x = y^2$ que pasa por el origen. Entre los dos encierran un "gajo" y al arco de elipse le sobran dos colitas, de $(0{,}883; \pm 0{,}940)$ hasta cerca de $(3/4, \pm\sqrt{7}/2)$.
Trampa: $\ln u = 0$ es $u = 1$, no $u = 0$ ($u = 0$ ni siquiera está en el dominio). Y en H_1 no va toda la elipse: sólo la parte que está en D.

Ejercicio 5. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$ las ecuaciones
$z + z^3 + 3xy + 1 = 0 \wedge x^2 + y + z - 1 = 0$
definen funciones $y = g(x)$ y $z = h(x)$ que son de clase C^1 en un entorno de x_0. Calcule $g'(1)$ y $h'(1)$.

Respuesta: $\partial(F_1, F_2)/\partial(y, z)(P) = -1 \neq 0$. $g'(1) = -11$, $h'(1) = 9$.

Planteo: sistema $\vec{F} = (F_1, F_2)$ con $F_1 = z + z^3 + 3xy + 1$, $F_2 = x^2 + y + z - 1$, punto $P = (1, -1, 1)$. Son dos ecuaciones y tres variables: se despejan las dos dependientes (y, z) en función de x.
Hipótesis del TFI para sistemas: (1) $F_1(P) = 1 + 1 - 3 + 1 = 0$ ✓ y $F_2(P) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F_1 y F_2 son polinómicas, C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) El jacobiano respecto de las variables dependientes: $\partial(F_1, F_2)/\partial(y, z) = \begin{pmatrix} 3x & 1 + 3z^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que en P es $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante $3 - 4 = -1 \neq 0$ ✓. Entonces existen g y h de clase C^1 en un entorno de $x_0 = 1$, con $g(1) = -1$, $h(1) = 1$, y $F_1(x, g(x), h(x)) = F_2(x, g(x), h(x)) = 0$.
Derivación implícita: derivando cada identidad respecto de x (regla de la cadena, todo es C^1): F_1: $3y + 3x\,g' + (1 + 3z^2)\,h' = 0$; F_2: $2x + g' + h' = 0$. En P: $3g' + 4h' = 3$ y $g' + h' = -2$.
Cuenta: de la segunda, $g' = -2 - h'$; en la primera: $-6 - 3h' + 4h' = 3$, $h' = 9$, $g' = -11$. Control: $3(-11) + 4(9) = 3$ ✓.
Resultado: $g'(1) = -11$, $h'(1) = 9$.

> **Trampa:** el jacobiano que tiene que ser no nulo es el de las variables que se despejan, (y, z); el de (x, y) o (x, z) no sirve. Y al derivar F_1 no te olvides el término $3x\,g'$: el producto xy depende de x por los dos factores.

11/6/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)}}{x^2 - y^2},$$

y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x^2/4 + y^2 \leq 1, y \neq x, y \neq -x\}$: elipse de semiejes 2 (en x) y 1 (en y) con su interior, sin las rectas $y = \pm x$. ∂D = la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ ∪ los segmentos de $y = x$ y de $y = -x$ con $|x| \leq 2/\sqrt{5}$. $\text{int}(D) = \{x^2/4 + y^2 < 1, y \neq \pm x\}$: cuatro regiones abiertas separadas por las diagonales.
>
> **Condiciones:** $f(x, y)$ existe si el radicando no es negativo y el denominador no se anula: $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$ y $x^2 - y^2 \neq 0$.
> **La raíz:** $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2/4 + y^2 \leq 1$ (dividí por 4). Es la elipse centrada en el origen con semieje 2 sobre el eje x y semieje 1 sobre el eje y (vértices $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$), **con** su contorno (la desigualdad es ≥, incluye el =) y su interior.
> **El denominador:** $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ o $y = -x$. Hay que sacar las dos diagonales.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2 \leq 1, y \neq x, y \neq -x\}$. Las diagonales cortan a la elipse donde $4x^2 + x^2 = 4$ (reemplazando $y^2 = x^2$), o sea $x = \pm 2/\sqrt{5}$: en los cuatro puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$. Gráfico: la elipse pintada con el contorno en trazo lleno, las dos diagonales en trazo punteado dentro de la elipse (no pertenecen) y esos cuatro puntos del contorno con círculo vacío (tampoco están en D).
> **Frontera:** P es frontera si todo entorno de P tiene puntos de D y puntos fuera de D. (i) Los puntos de la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ lo son: cerca hay puntos de afuera de la elipse y puntos de adentro que no están sobre las diagonales. (ii) Los puntos de las diagonales con $|x| \leq 2/\sqrt{5}$ también: no están en D, pero a los costados hay puntos de D. (iii) Afuera de la elipse las diagonales no son frontera: tienen un entorno sin puntos de D. Entonces $\boldsymbol{\partial D = \{x^2/4 + y^2 = 1\} \cup \{(x, x) : |x| \leq 2/\sqrt{5}\} \cup \{(x, -x) : |x| \leq 2/\sqrt{5}\}}$: la elipse entera más una cruz (dos segmentos que se cortan en el origen y terminan sobre la elipse), todo en trazo lleno.
> **Interior:** sacando de D los puntos de la elipse queda $\boldsymbol{\text{int}(D) = \{(x, y) : x^2/4 + y^2 < 1, y \neq x, y \neq -x\}}$: la elipse abierta partida por la cruz en cuatro regiones (arriba, abajo, izquierda y derecha), con todo el contorno y la cruz punteados. En cada uno de esos puntos las condiciones son desigualdades estrictas de funciones continuas, así que valen en un entorno.
> **De yapa (lo piden en otras variantes):** D no es abierto (los puntos de la elipse están en D y son frontera) ni cerrado (los segmentos de la cruz son frontera y no están en D). No es conexo: $g(x, y) = x^2 - y^2$ es continua y no se anula en D; los abiertos $\{g > 0\}$ y $\{g < 0\}$ son disjuntos, cubren D y los dos tienen puntos de D, por ejemplo (1, 0) y (0, 1/2). De hecho queda en cuatro pedazos. Es acotado pero no compacto (no es cerrado).
> **Trampa:** la frontera no es sólo la elipse. Los tramos de diagonal que quedan adentro son frontera aunque no pertenezcan a D, y los puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$ son de ∂D pero no de D.

Ejercicio 2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2+3x+y^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 4 en (1, 0); mínimo absoluto −9/4 en (−3/2, 0).

Existencia (Weierstrass): D es el disco cerrado de centro (–1, 0) y radio 2: cerrado y acotado, o sea compacto. f es polinómica, continua. Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en D.
Interior: $\nabla f = (2x + 3, 2y) = \vec{0}$ da (–3/2, 0). Está en el interior de D: $(-3/2 + 1)^2 + 0^2 = 1/4 < 4$. Vale $f(-3/2, 0) = 9/4 - 9/2 = -9/4$.
Frontera, regularidad: $g = (x + 1)^2 + y^2 - 4$, $\nabla g = (2(x + 1), 2y)$, que sólo se anula en el centro (–1, 0), que no está en la circunferencia. La restricción es regular y vale Lagrange.
Lagrange: Sistema: $2x + 3 = 2\lambda(x + 1)$, $2y = 2\lambda y$. Si $y \neq 0$, la segunda da $\lambda = 1$ y la primera queda $2x + 3 = 2x + 2$, absurdo. Entonces $y = 0$, y de la ecuación del borde $(x + 1)^2 = 4$: $x = 1$ o $x = -3$. $f(1, 0) = 1 + 3 = 4$ y $f(-3, 0) = 9 - 9 = 0$.
Control por sustitución: en el borde es $y^2 = 4 - (x + 1)^2 = 3 - 2x - x^2$, así que $f = x^2 + 3x + 3 - 2x - x^2 = x + 3$ con $x \in [-3, 1]$: va de 0 (en $x = -3$) a 4 (en $x = 1$) ✓.
Comparación: candidatos –9/4 (interior), 4 y 0 (borde).
Resultado: máximo absoluto **4** en **(1, 0)**; mínimo absoluto **–9/4** en **(–3/2, 0)**.
Control geométrico: completando cuadrados, $f = (x + 3/2)^2 + y^2 - 9/4$: $f + 9/4$ es el cuadrado de la distancia a P = (–3/2, 0), que está en D. El mínimo es en P mismo; el máximo, en el punto de D más lejano de P, que está sobre la recta que pasa por P y el centro (–1, 0), del otro lado: (1, 0), a distancia 5/2, $f = 25/4 - 9/4 = 4$ ✓.
Trampa: en la sustitución, x no recorre todo $\mathbb{R}$ sino [–3, 1] (donde el radicando $4 - (x + 1)^2$ es ≥ 0): olvidarse del intervalo es perder los extremos del borde. Y el crítico interior hay que chequear que esté en D antes de usarlo.

Ejercicio 3. Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xy + z = 0$ cuya proyección sobre el plano xy satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xy.

Respuesta: Cuatro puntos: (1, 1, –1), (–1, 1, 1), (–1, –1, –1) y (1, –1, 1).

La curva: $C = \{x^2 + y^2 = 2, z = -xy\}$. Parametrizo $\vec{g}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, -2 \operatorname{sen} t \cos t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$, de clase C^1.
Vector tangente: $\vec{g}'(t) = (-\sqrt{2} \operatorname{sen} t, \sqrt{2} \cos t, -2 \cos 2t)$, nunca nulo (las dos primeras componentes no se anulan juntas): C es regular y tiene recta tangente en todo punto.
Condición: la recta tangente es paralela al plano xy si su dirección es perpendicular a (0, 0, 1), o sea si la componente z es nula: $-2 \cos 2t = 0$, $2t = \pi/2 + k\pi$, $t = \pi/4 + k\pi/2$.
Puntos: $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ y $7\pi/4$ dan **(1, 1, –1), (–1, 1, 1), (–1, –1, –1) y (1, –1, 1)**.
Control con gradientes: $(2x, 2y, 0) \times (y, x, 1) = (2y, -2x, 2x^2 - 2y^2)$; la tercera componente es nula si $x^2 = y^2$, y con $x^2 + y^2 = 2$ queda $x^2 = y^2 = 1$ y $z = -xy$: los mismos cuatro ✓. En cada uno la dirección es $(2y, -2x, 0) \neq \vec{0}$.
Trampa: son cuatro puntos, no dos: $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$ con todas las combinaciones de signos. Y la z no es libre, sale de $z = -xy$ en cada uno.

Ejercicio 4. Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - 2y, x^2 - y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3, 0)$ por la ecuación
$ue^{vw} - 2uw = 9$.

Respuesta: $w_0 = f(3, 0) = -1$, $\nabla f(3, 0) = (1/2, -1/2)$; $g(1, -1) = -1$, $\nabla g(1, -1) = (0, -2)$. Plano tangente: $z = -2y - 3$ (o sea $2y + z + 3 = 0$).

Planteo: $F(u, v, w) = ue^{vw} - 2uw - 9$. Para el plano hace falta $g(1, -1)$ y $\nabla g(1, -1)$; como $g = f \circ h$ con $h(x, y) = (x^2 - 2y, x^2 - y^2)$, primero hay que sacar todo lo de f.
Dónde cae la composición: $\vec{h}(1, -1) = (1 + 2, 1 - 1) = (3, 0) = (u_0, v_0)$ ✓.
Valor w_0: en $(3, 0)$ la ecuación queda $3e^0 - 6w = 9$, lineal en w: $w_0 = -1$ (único). Así $g(1, -1) = f(3, 0) = -1$.
Hipótesis del TFI: F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (producto de polinomio por exponencial de polinomio, más un polinomio); $F(3, 0, -1) = 0$; $F'_w = uve^{vw} - 2u$, que en $(3, 0, -1)$ vale $0 - 6 = -6 \neq 0$ ✓. Entonces f es C^1 en un entorno de $(3, 0)$ (lo que dice el enunciado) y sus parciales salen de $-F'/F'_w$.
Derivadas de f: $F'_u = e^{vw} - 2w \to 1 + 2 = 3$; $F'_v = uwe^{vw} \to 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$. $f'_u(3, 0) = -3/(-6) = 1/2$, $f'_v(3, 0) = -(-3)/(-6) = -1/2$.
Regla de la cadena: $\vec{h}$ es polinómica (diferenciable) y f es diferenciable en $(3, 0)$ por ser C^1, así que g es diferenciable en $(1, -1)$ con $Dg(1, -1) = Df(3, 0) \cdot D\vec{h}(1, -1)$. $D\vec{h} = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ en $(1, -1)$.

$\nabla g(1, -1) = (1/2, -1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (1 - 1, -1 - 1) = \mathbf{(0, -2)}$.

Plano tangente en $(1, -1, -1)$: $z = -1 + 0 \cdot (x - 1) - 2(y + 1)$, o sea $\mathbf{z = -2y - 3}$.
Trampa: el punto del gráfico es $(1, -1, g(1, -1))$ y $g(1, -1) = f(3, 0) = w_0 = -1$: hay que calcular w_0 antes de todo, porque además entra en las derivadas de F.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u+v, u^2+v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = \sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

Respuesta: $\nabla f(A) = (3, 3, -3)$; $L(x, y, z) = 1 + 3(x - 1) + 3(y - 2) - 3(z - 2) = 3x + 3y - 3z - 2$.

Hipótesis: f tiene derivadas parciales continuas, así que es diferenciable y su aproximación lineal en A es $L(x, y, z) = f(A) + \nabla f(A) \cdot (x - 1, y - 2, z - 2)$. Como $A \in \Sigma$ y Σ es el conjunto de nivel 1, $f(A) = 1$. Falta $\nabla f(A)$.
Parámetros de A: $u = 1$ da la primera coordenada, $u + v = 2$ da $v = 1$, y $u^2 + v = 2$ ✓: $A = \vec{X}(1, 1)$.
$\nabla f(A)$ es normal a Σ: $f(\vec{X}(u, v)) = 1$ para todo (u, v). $\vec{X}$ es C^1 y f diferenciable, así que por la regla de la cadena $\nabla f(A) \cdot \vec{X}_u = 0$ y $\nabla f(A) \cdot \vec{X}_v = 0$.
Normal de Σ en A: $\vec{X}_u = (1, 1, 2u) = (1, 1, 2)$, $\vec{X}_v = (0, 1, 1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (-1, -1, 1) \neq \vec{0}$, así que $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ son linealmente independientes y lo único perpendicular a los dos es un múltiplo de $\vec{N}$: $\nabla f(A) = \lambda(-1, -1, 1)$.
Derivada direccional: $f'(A, \check{r}) = \nabla f(A) \cdot \check{r} = \lambda(-1 - 1 + 1)/\sqrt{3} = -\lambda/\sqrt{3} = \sqrt{3}$, de donde $\lambda = -3$ y $\mathbf{\nabla f(A) = (3, 3, -3)}$.
Resultado: $\mathbf{L(x, y, z) = 1 + 3(x - 1) + 3(y - 2) - 3(z - 2) = 3x + 3y - 3z - 2}$. Control: $L(A) = 3 + 6 - 6 - 2 = 1$ ✓, $(3, 3, -3) \cdot (1, 1, 2) = 0$ ✓ y $(3, 3, -3) \cdot (0, 1, 1) = 0$ ✓.
Trampa: no es el plano tangente a Σ: lo que se pide es la aproximación lineal de f (una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$), que necesita $f(A) = 1$ y el gradiente completo, con su módulo, no sólo su dirección.

11/6/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xz - y = 0$ cuya proyección sobre el plano xz satisface la ecuación $x^2 + z^2 = 8$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xz.

> **Respuesta:** Cuatro puntos: (2, 4, 2), (−2, −4, 2), (−2, 4, −2) y (2, −4, −2).
>
> **La curva:** $C = \{x^2 + z^2 = 8, y = xz\}$. Parametrizo $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $z = 2\sqrt{2}\operatorname{sen} t$, $y = xz = 8\operatorname{sen} t\cos t = 4\operatorname{sen} 2t$: $\vec{g}(t) = (2\sqrt{2}\cos t, 4\operatorname{sen} 2t, 2\sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi)$, de clase C^1.
> **Vector tangente:** $\vec{g}'(t) = (-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 8\cos 2t, 2\sqrt{2}\cos t)$, nunca nulo (la primera y la tercera componente no se anulan juntas): C es regular.
> **Condición:** la tangente es paralela al plano xz si su dirección es perpendicular a (0, 1, 0), o sea si la componente y es nula: $8\cos 2t = 0$, $t = \pi/4 + k\pi/2$.
> **Puntos:** $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ y $7\pi/4$ dan **(2, 4, 2), (−2, −4, 2), (−2, 4, −2) y (2, −4, −2)**.
> **Control con gradientes:** $(2x, 0, 2z) \times (z, -1, x) = (2z, 2z^2 - 2x^2, -2x)$; la segunda componente es nula si $x^2 = z^2$, y con $x^2 + z^2 = 8$ queda $x^2 = z^2 = 4$ e $y = xz$: los mismos cuatro ✓, con dirección $(2z, 0, -2x) \neq \vec{0}$.
> → Es el ejercicio del tema 1 con los papeles de y y z intercambiados.
> **Trampa:** son cuatro puntos ($x = \pm 2$, $z = \pm 2$ con todas las combinaciones) y la y de cada uno sale de $y = xz$, no se elige.

Ejercicio 2. Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, x + 2y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$ por la ecuación
$ve^{-uw} + 2vw = 9$.

> **Respuesta:** $w_0 = f(0, 3) = 1$, $\nabla f(0, 3) = (1/2, -1/2)$; $g(1, -1) = 1$, $\nabla g(1, -1) = (1/2, 3)$. Plano tangente: $z = 1 + (1/2)(x - 1) + 3(y + 1)$, o sea $x + 6y - 2z + 7 = 0$.
>
> **Planteo:** $F(u, v, w) = ve^{-uw} + 2vw - 9$ y $g = f \circ \vec{h}$ con $\vec{h}(x, y) = (x^2 - y^2, x + 2y^2)$.
> **Dónde cae la composición:** $\vec{h}(1, -1) = (1 - 1, 1 + 2) = (0, 3) = (u_0, v_0)$ ✓.
> **Valor w_0:** en (0, 3) la ecuación queda $3 + 6w = 9$, lineal en w: $w_0 = 1$ (único). Así $g(1, -1) = f(0, 3) = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** F es C^1 en $\mathbb{R}^3$; $F(0, 3, 1) = 0$; $F'_w = -uve^{-uw} + 2v$, que en (0, 3, 1) vale $0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces f es C^1 en un entorno de (0, 3).
> **Derivadas de f:** $F'_u = -vwe^{-uw} \to -3$; $F'_v = e^{-uw} + 2w \to 1 + 2 = 3$. $f'_u(0, 3) = -(-3)/6 = 1/2$, $f'_v(0, 3) = -3/6 = -1/2$.
> **Regla de la cadena:** $\vec{h}$ es polinómica y f es diferenciable en (0, 3), así que $Dg(1, -1) = Df(0, 3) \cdot D\vec{h}(1, -1)$.
> $D\vec{h} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 4y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ en (1, −1). $\nabla g(1, -1) = (1/2, -1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = (1 - 1/2, 1 + 2) =$ **(1/2, 3)**.
> **Plano tangente** en (1, −1, 1): $z = 1 + (1/2)(x - 1) + 3(y + 1)$, o sea $\mathbf{z = x/2 + 3y + 7/2}$ (equivalente: $x + 6y - 2z + 7 = 0$).
> **Trampa:** el signo menos del exponente (e^{-uw}) cambia el signo de F'_u; si lo perdés, f'_u sale −1/2 y el plano entero cambia.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u-v, u^2-v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = -\sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

> **Respuesta:** $\nabla f(A) = (-3, -3, 3)$; $L(x, y, z) = 1 - 3(x - 1) - 3(y - 2) + 3(z - 2) = -3x - 3y + 3z + 4$.
>
> **Hipótesis:** f tiene derivadas parciales continuas, así que es diferenciable y su aproximación lineal en A es $L(x, y, z) = f(A) + \nabla f(A) \cdot (x - 1, y - 2, z - 2)$. Como $A \in \Sigma$ y Σ es el conjunto de nivel 1, $f(A) = 1$. Falta $\nabla f(A)$.
> **Parámetros de A:** $u = 1$ da la primera coordenada, $u - v = 2$ da $v = -1$, y $u^2 - v = 1 + 1 = 2$ ✓: $A = \vec{X}(1, -1)$.
> **$\nabla f(A)$ es normal a Σ:** $f(\vec{X}(u, v)) = 1$ para todo (u, v). $\vec{X}$ es C^1 y f diferenciable, así que por la regla de la cadena $\nabla f(A) \cdot \vec{X}_u = 0$ y $\nabla f(A) \cdot \vec{X}_v = 0$.
> **Normal de Σ en A:** $\vec{X}_u = (1, 1, 2u) = (1, 1, 2)$, $\vec{X}_v = (0, -1, -1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1, 1, -1) \neq \vec{0}$, así que $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ son linealmente independientes y lo único perpendicular a los dos es un múltiplo de $\vec{N}$: $\nabla f(A) = \lambda(1, 1, -1)$.
> **Derivada direccional:** $f'(A, \check{r}) = \nabla f(A) \cdot \check{r} = \lambda(1 + 1 - 1)/\sqrt{3} = \lambda/\sqrt{3} = -\sqrt{3}$, de donde $\lambda = -3$ y **$\nabla f(A) = (-3, -3, 3)$**.
> **Resultado: $L(x, y, z) = 1 - 3(x - 1) - 3(y - 2) + 3(z - 2) = -3x - 3y + 3z + 4$**. Control: $L(A) = -3 - 6 + 6 + 4 = 1$ ✓, $(-3, -3, 3) \cdot (1, 1, 2) = 0$ ✓ y $(-3, -3, 3) \cdot (0, -1, -1) = 0$ ✓.
> **Trampa:** no es el plano tangente a Σ: lo que se pide es la aproximación lineal de f (una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$), que necesita $f(A) = 1$ y el gradiente completo, con su módulo, no sólo su dirección.

Ejercicio 4. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2+3y+x^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

> **Respuesta:** Máximo absoluto 4 en $(0, 1)$; mínimo absoluto $-9/4$ en $(0, -3/2)$.
>
> **Existencia (Weierstrass):** D es el disco cerrado de centro $(0, -1)$ y radio 2: cerrado y acotado, o sea compacto. f es polinómica, continua. Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en D.
> **Interior:** $\nabla f = (2x, 2y + 3) = \vec{0}$ da $(0, -3/2)$. Está en el interior de D: $0^2 + (-3/2 + 1)^2 = 1/4 < 4$. Vale $f(0, -3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4$.
> **Frontera, regularidad:** $g = x^2 + (y + 1)^2 - 4$, $\nabla g = (2x, 2(y + 1))$, que sólo se anula en el centro $(0, -1)$, que no está en la circunferencia. La restricción es regular y vale Lagrange.
> **Lagrange:** Sistema: $2x = 2\lambda x$, $2y + 3 = 2\lambda(y + 1)$. Si $x \neq 0$, la primera da $\lambda = 1$ y la segunda queda $2y + 3 = 2y + 2$, absurdo. Entonces $x = 0$, y de la ecuación del borde $(y + 1)^2 = 4$: $y = 1$ o $y = -3$. $f(0, 1) = 1 + 3 = 4$ y $f(0, -3) = 9 - 9 = 0$.
> **Control por sustitución:** en el borde es $x^2 = 4 - (y + 1)^2 = 3 - 2y - y^2$, así que $f = y^2 + 3y + 3 - 2y - y^2 = y + 3$ con $y \in [-3, 1]$: va de 0 (en $y = -3$) a 4 (en $y = 1$) ✓.
> **Comparación:** candidatos $-9/4$ (interior), 4 y 0 (borde).
> **Resultado:** máximo absoluto **4** en **$(0, 1)$**; mínimo absoluto **$-9/4$** en **$(0, -3/2)$**.
> **Control geométrico:** completando cuadrados, $f = x^2 + (y + 3/2)^2 - 9/4$: $f + 9/4$ es el cuadrado de la distancia a $P = (0, -3/2)$, que está en D. El mínimo es en P mismo; el máximo, en el punto de D más lejano de P, que está sobre la recta que pasa por P y el centro $(0, -1)$, del otro lado: $(0, 1)$, a distancia 5/2, $f = 25/4 - 9/4 = 4$ ✓.
> **Trampa:** en la sustitución, y no recorre todo $\mathbb{R}$ sino $[-3, 1]$ (donde el radicando $4 - (y + 1)^2$ es ≥ 0):

olvidarse del intervalo es perder los extremos del borde. Y el crítico interior hay que chequear que esté en D antes de usarlo.

Ejercicio 5. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}}{y^2 - x^2},$$

y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.

Respuesta: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2/4 \leq 1, y \neq x, y \neq -x\}$: elipse de semiejes 1 (en x) y 2 (en y) con su interior, sin las rectas $y = \pm x$. ∂D = la elipse $x^2 + y^2/4 = 1 \cup$ los segmentos de $y = x$ y de $y = -x$ con $|x| \leq 2/\sqrt{5}$. $\text{int}(D) = \{x^2 + y^2/4 < 1, y \neq \pm x\}$: cuatro regiones abiertas separadas por las diagonales.

Condiciones: $f(x, y)$ existe si el radicando no es negativo y el denominador no se anula: $4 - 4x^2 - y^2 \geq 0$ y $y^2 - x^2 \neq 0$.
La raíz: $4 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2/4 \leq 1$ (dividí por 4). Es la elipse centrada en el origen con semieje 1 sobre el eje x y semieje 2 sobre el eje y (vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 2)$), **con** su contorno (la desigualdad es $\geq$, incluye el $=$) y su interior.
El denominador: $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow y = x$ o $y = -x$. Hay que sacar las dos diagonales.
Dominio: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2/4 \leq 1, y \neq x, y \neq -x\}$. Las diagonales cortan a la elipse donde $4x^2 + x^2 = 4$ (reemplazando $y^2 = x^2$), o sea $x = \pm 2/\sqrt{5}$: en los cuatro puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$. Gráfico: la elipse pintada con el contorno en trazo lleno, las dos diagonales en trazo punteado dentro de la elipse (no pertenecen) y esos cuatro puntos del contorno con círculo vacío (tampoco están en D).
Frontera: P es frontera si todo entorno de P tiene puntos de D y puntos fuera de D. (i) Los puntos de la elipse $x^2 + y^2/4 = 1$ lo son: cerca hay puntos de afuera de la elipse y puntos de adentro que no están sobre las diagonales. (ii) Los puntos de las diagonales con $|x| \leq 2/\sqrt{5}$ también: no están en D, pero a los costados hay puntos de D. (iii) Afuera de la elipse las diagonales no son frontera: tienen un entorno sin puntos de D. Entonces $\boldsymbol{\partial D = \{x^2 + y^2/4 = 1\} \cup \{(x, x) : |x| \leq 2/\sqrt{5}\} \cup \{(x, -x) : |x| \leq 2/\sqrt{5}\}}$: la elipse entera más una cruz (dos segmentos que se cortan en el origen y terminan sobre la elipse), todo en trazo lleno.
Interior: sacando de D los puntos de la elipse queda $\boldsymbol{\text{int}(D) = \{(x, y) : x^2 + y^2/4 < 1, y \neq x, y \neq -x\}}$: la elipse abierta partida por la cruz en cuatro regiones (arriba, abajo, izquierda y derecha), con todo el contorno y la cruz punteados. En cada uno de esos puntos las condiciones son desigualdades estrictas de funciones continuas, así que valen en un entorno.
De yapa (lo piden en otras variantes): D no es abierto (los puntos de la elipse están en D y son frontera) ni cerrado (los segmentos de la cruz son frontera y no están en D). No es conexo: $g(x, y) = y^2 - x^2$ es continua y no se anula en D; los abiertos $\{g > 0\}$ y $\{g < 0\}$ son disjuntos, cubren D y los dos tienen puntos de D, por ejemplo $(0, 1)$ y $(1/2, 0)$. De hecho queda en cuatro pedazos. Es acotado pero no compacto (no es cerrado).
Trampa: la frontera no es sólo la elipse. Los tramos de diagonal que quedan adentro son frontera aunque no pertenezcan a D, y los puntos $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5})$ son de ∂D pero no de D.

21/5/22, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$. Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$.

> **Respuesta:** $f(1, 3) = 2$, $\nabla f(1, 3) = (2, 0)$. Plano tangente al gráfico de f: $z = 2x$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(1, -1) = (1\cdot(-1)^2, 1^2 - 2(-1)) = (1, 3)$. Entonces $f(1, 3) = h(1, -1) = \mathbf{2}$.
> **Hipótesis:** f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (en particular en $(1, 3)$) y $\vec{g}$ es polinómica; vale la regla de la cadena $\nabla h(1, -1) = \nabla f(1, 3) \cdot D\vec{g}(1, -1)$. La diferenciabilidad de f en $(1, 3)$ es también lo que garantiza que exista el plano tangente.
> **Jacobiana:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$, y en $(1, -1)$ da $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, con determinante $-2 + 4 = 2 \neq 0$: el sistema tiene solución única.
> **Sistema:** con $\nabla f(1, 3) = (a, b)$: $(a, b)\cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (a + 2b, -2a - 2b) = (2, -4)$. Sumando las dos ecuaciones, $-a = -2$, así que $a = 2$; y $2 + 2b = 2$ da $b = 0$. **$\nabla f(1, 3) = (2, 0)$**. Control: $-2\cdot 2 - 2\cdot 0 = -4$ ✓.
> **Plano tangente:** $z = f(1, 3) + f_x(1, 3)(x - 1) + f_y(1, 3)(y - 3) = 2 + 2(x - 1)$, o sea **$z = 2x$**.
> **Trampa:** el plano es del gráfico de f, en $(1, 3)$, no del de h en $(1, -1)$: no uses $\nabla h = (2, -4)$ como si fuera ∇f. Y $f_y(1, 3) = 0$ hace que el plano no tenga y; está bien así.

Ejercicio 2. Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:
$\vec{X} = (uv, u^2 + v, u - v)$, $u, v \in \mathbb{R}$
en el punto $(-1, 0, 2)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^3 = 0$ en el punto $(2, 2, -2)$.

> **Respuesta:** r_0: $\vec{X} = (-1, 0, 2) + t(1, 0, 1)$; plano tangente: $x + y + 3z = -2$; un único punto de corte: $(-11/4, 0, 1/4)$.
>
> **Paso 1, parámetros de $(-1, 0, 2)$:** $uv = -1$, $u^2 + v = 0$, $u - v = 2$. De la segunda $v = -u^2$, y en la primera $-u^3 = -1$, $u = 1$, $v = -1$; se comprueba $u - v = 2$ ✓.
> **Paso 2, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (v, 2u, 1) = (-1, 2, 1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, -1) = (1, 1, -1)$. $\vec{N} = (2\cdot(-1) - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - (-1)(-1), (-1)\cdot 1 - 2\cdot 1) = (-3, 0, -3) \neq \vec{0}$, proporcional a $(1, 0, 1)$. r_0: **$\vec{X} = (-1, 0, 2) + t(1, 0, 1)$**.
> **Paso 3, plano tangente:** $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$ es C^1; $(2, 2, -2)$ está en el nivel 0: $4 + 4 - 8 = 0$ ✓. $\nabla H = (2x, 2y, 3z^2) = (4, 4, 12) \neq \vec{0}$, proporcional a $(1, 1, 3)$. Plano: $(x - 2) + (y - 2) + 3(z + 2) = 0$, o sea **$x + y + 3z = -2$**.
> **Paso 4, intersección:** $(-1 + t) + 0 + 3(2 + t) = -2 \Longrightarrow 5 + 4t = -2 \Longrightarrow t = -7/4$. Punto: **$(-11/4, 0, 1/4)$**. Control: $-11/4 + 0 + 3/4 = -2$ ✓. Es el único punto porque la dirección $(1, 0, 1)$ no es ortogonal a $(1, 1, 3)$ (producto $4 \neq 0$): la recta no es paralela al plano.
> **Trampa:** $3z^2$ en $z = -2$ da 12 (el cuadrado borra el signo); y "todos los puntos" no implica que haya varios: una recta no paralela corta a un plano en uno solo.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \alpha[e^{x-2} + \cos y] + \beta[xy - \operatorname{sen} y] + g(x, y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 13x - 5y$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (2, 0)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Respuesta: $\alpha = -3$, $\beta = 1$. En $A = (2, 0)$ hay mínimo relativo ($Hf(A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; valor $f(A) = -16$).

Planteo: f es suma de funciones C^∞ (las de α y β) y de g, que es C^3; entonces f es C^2 (de hecho C^3) en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ es abierto y vale el criterio del hessiano. Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $A = (2, 0)$, comparte con g el valor, las derivadas primeras y las segundas en A.

Datos de g en A (derivando P_2): $P_2(2, 0) = 16 - 26 = -10$, así que $g(A) = -10$. $\partial P_2/\partial x = 8x + 2y - 13$ y $\partial P_2/\partial y = 2x + 2y - 5$, que en $(2, 0)$ dan $\nabla g(A) = (3, -1)$. Hessiano de P_2 (constante): $Hg(A) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Gradiente de la parte con α y β: $u = e^{x-2} + \cos y$ tiene $\nabla u = (e^{x-2}, -\operatorname{sen} y)$, en A: $(1, 0)$. $v = xy - \operatorname{sen} y$ tiene $\nabla v = (y, x - \cos y)$, en A: $(0, 2 - 1) = (0, 1)$.

Condición de punto crítico: $\nabla f(A) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + (3, -1) = (\alpha + 3, \beta - 1) = (0, 0)$, de donde **$\alpha = -3$, $\beta = 1$**.

Hessiano en A: $Hu = \begin{pmatrix} e^{x-2} & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$, en A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $Hv = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \operatorname{sen} y \end{pmatrix}$, en A: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $Hf(A) = -3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.

Clasificación: $\det Hf(A) = 25 - 9 = 16 > 0$ y $f''_{xx}(A) = 5 > 0$: en A hay un **mínimo relativo**. Su valor (no se pedía): $f(A) = -3(1 + 1) + 1\cdot(0 - 0) - 10 = -16$.

Trampa: P_2 está desarrollado en potencias de x e y, no de $(x - 2)$: las derivadas de g en A no son los coeficientes, hay que derivar P_2 y evaluar en $(2, 0)$. Por ejemplo, el -13 no es $g'_x(A)$; $g'_x(A) = 3$.

Ejercicio 4. Considere la función

$f(x, y) = \{ \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + 2y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.

Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

Respuesta: Existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$: $f'((0, 0), \check{u}) = a^2b/(a^2 + 2b^2)$ con $\check{u} = (a, b)$ versor ($f'_x = f'_y = 0$). f no es diferenciable en $(0, 0)$: el resto $f(x, y)/\sqrt{(x^2 + y^2)}$ tiende a $1/(3\sqrt{2}) \neq 0$ por $y = x$ ($x \to 0^+$).

Planteo: derivada direccional por definición en $A = (0, 0)$ según el versor $\check{u} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$. Como $f(0, 0) = 0$: $f'(A, \check{u}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(ta, tb)}{t}$. Para $t \neq 0$ el punto (ta, tb) no es el origen, así que se usa la fórmula de arriba.

Cuenta: $f(ta, tb)/t = \dfrac{t^2a^2 \operatorname{sen}(tb)}{t\cdot t^2(a^2 + 2b^2)} = \dfrac{a^2}{a^2 + 2b^2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(tb)}{t}$. El denominador $a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 = 1$ no se anula. Si $b = 0$ el cociente es 0. Si $b \neq 0$, $\dfrac{\operatorname{sen}(tb)}{t} = b\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(tb)}{tb} \to b$ (límite notable $\operatorname{sen} u/u \to 1$).

Derivadas direccionales: existen en **todas** las direcciones y valen $f'(A, \check{u}) = \dfrac{a^2b}{a^2 + 2b^2}$ (la fórmula

también da 0 cuando b = 0). En particular $f'_x(0, 0) = f'(A, (1, 0)) = 0$ y $f'_y(0, 0) = f'(A, (0, 1)) = 0$, o sea $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Diferenciabilidad por definición: si f fuera diferenciable, su aproximación lineal sería $f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y = 0$, y f es diferenciable en el origen si y sólo si el resto cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x, y) - 0}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0$. Por la recta $y = x$ con $x \to 0^+$: $\dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{3x^2 \cdot \sqrt{2} \cdot x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3\sqrt{2} \cdot x} \to \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0$. Entonces ese límite no es 0 (ni siquiera existe: sobre los ejes el cociente vale 0) y **f no es diferenciable** en (0, 0).

Control con las direccionales: si f fuera diferenciable valdría $f'(A, \check{u}) = \nabla f(0, 0) \cdot \check{u} = 0$ para todo $\check{u}$; pero con $\check{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ da $(1/2)(1/\sqrt{2})/(1/2 + 1) = 1/(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}/6 \neq 0$. La derivada direccional existe pero no es lineal en $\check{u}$, lo que confirma que no es diferenciable.

Observación: f sí es continua en el origen, porque $|f(x, y)| = \dfrac{x^2}{x^2 + 2y^2} \cdot |\operatorname{sen} y| \leq |\operatorname{sen} y| \leq |y| \to 0$. Es el caso clásico: continua, con todas las derivadas direccionales, y aun así no diferenciable.

Trampa: que existan todas las direccionales no alcanza para la diferenciabilidad. Tampoco alcanza ver que el resto da 0 sobre los ejes: hay que probar el límite doble (o encontrar un camino donde no dé 0, como acá la recta $y = x$).

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto (1, 1, 1), la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1. Calcule en forma aproximada $h(1.01, 0.98)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\check{v}$ que maximiza $h'((1, 1), \check{v})$.

Respuesta: $F'_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. $\nabla h(1, 1) = (-1, 1/2)$; $h(1.01, 0.98) \approx 0.98$; versor que maximiza: $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = x^2z - yz^2 + z^3 - 1$.

Hipótesis del TFI: (1) $F(1, 1, 1) = 0$ ✓ (ahí $x^2z - yz^2 + z^3$ vale $1 - 1 + 1 = 1$). (2) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$. (3) $F'_z = x^2 - 2yz + 3z^2$, que en (1, 1, 1) vale $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe $z = h(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de (1, 1) con $h(1, 1) = 1$.

Derivadas de h: $F'_x = 2xz \to 2$; $F'_y = -z^2 \to -1$. Por el TFI, $\nabla h(1, 1) = -(F'_x, F'_y)/F'_z = (-1, 1/2)$.

Aproximación lineal: h es diferenciable (es C^1), y con $\Delta x = 0.01$ y $\Delta y = -0.02$: $h(1.01, 0.98) \approx 1 + (-1)(0.01) + (1/2)(-0.02) = 1 - 0.01 - 0.01 =$ **0.98**.

Versor que maximiza $h'((1, 1), \check{v})$: $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h \cdot \check{v} \leq \|\nabla h\|$, con igualdad para $\check{v} = \nabla h/\|\nabla h\|$. Como $\|\nabla h\| = \sqrt{(1 + 1/4)} = \sqrt{5}/2$, queda $\check{\mathbf{v}} = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, y el máximo vale $\sqrt{5}/2$.

Trampa: $F'_y = -z^2$ es negativo, así que $h'_y = +1/2$: el signo menos de la fórmula $-F'_y/F'_z$ se come con el de F'_y, y ahí es donde más se equivoca el signo.

21/5/22, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:
$\vec{X} = (v - u, v^2 + u, uv),\ u, v \in \mathbb{R}$
en el punto $(2, 0, -1)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^3 + y^2 + z^2 = 0$ en el punto $(-2, 2, 2)$.

> **Respuesta:** r_0: $\vec{X} = (2, 0, -1) + t(1, 0, 1)$; plano tangente: $3x + y + z = -2$; un único punto de corte: $(1/4, 0, -11/4)$.
>
> **Paso 1, parámetros de (2, 0, –1):** $v - u = 2$, $v^2 + u = 0$, $uv = -1$. De la segunda $u = -v^2$, y en la tercera $-v^3 = -1$, $v = 1$, $u = -1$; se comprueba $v - u = 2$ ✓.
> **Paso 2, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (-1, 1, v) = (-1, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (1, 2v, u) = (1, 2, -1)$. $\vec{N} = (1\cdot(-1) - 1\cdot 2, 1\cdot 1 - (-1)(-1), (-1)\cdot 2 - 1\cdot 1) = (-3, 0, -3) \neq \vec{0}$, proporcional a $(1, 0, 1)$. r_0: **$\vec{X} = (2, 0, -1) + t(1, 0, 1)$**.
> **Paso 3, plano tangente:** $H(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$ es C^1; $(-2, 2, 2)$ está en el nivel 0: $-8 + 4 + 4 = 0$ ✓. $\nabla H = (3x^2, 2y, 2z) = (12, 4, 4) \neq \vec{0}$, proporcional a $(3, 1, 1)$. Plano: $3(x + 2) + (y - 2) + (z - 2) = 0$, o sea **$3x + y + z = -2$**.
> **Paso 4, intersección:** $3(2 + t) + 0 + (-1 + t) = -2 \Longrightarrow 5 + 4t = -2 \Longrightarrow t = -7/4$. Punto: **$(1/4, 0, -11/4)$**. Control: $3/4 + 0 - 11/4 = -2$ ✓. Es el único: $(1, 0, 1) \cdot (3, 1, 1) = 4 \neq 0$, la recta no es paralela al plano.
> **Trampa:** $3x^2$ en $x = -2$ da 12, positivo; y el punto de la superficie paramétrica se despeja de las tres coordenadas, no de dos ($v - u = 2$ sola admite infinitos pares).

Ejercicio 2. Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x, y) = (x^2y, 2x - y^2)$. Sabiendo que $h(-1, 1) = 2$ y que $\nabla h(-1, 1) = (4, -2)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, -3, f(1, -3))$.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -3) = (-2, 0)$, $f(1, -3) = 2$. Plano tangente: $z = 2 - 2(x - 1)$, o sea $2x + z = 4$.
>
> **Planteo:** $\vec{g}(-1, 1) = ((-1)^2\cdot 1, 2\cdot(-1) - 1^2) = (1, -3)$, así que el punto del enunciado es justamente la imagen de $(-1, 1)$: $f(1, -3) = f(\vec{g}(-1, 1)) = h(-1, 1) = 2$. Para el plano falta $\nabla f(1, -3)$, y lo sacamos de $\nabla h(-1, 1)$ con la regla de la cadena.
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es polinómica (diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$) y f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, en particular en $\vec{g}(-1, 1) = (1, -3)$. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en $(-1, 1)$ y vale $\nabla h(-1, 1) = \nabla f(1, -3) \cdot D\vec{g}(-1, 1)$.
> **Jacobiana de $\vec{g}$:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2 & -2y \end{pmatrix}$, y en $(-1, 1)$: $D\vec{g} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, con determinante $4 - 2 = 2 \neq 0$ (por eso el sistema tiene solución única).
> **Sistema:** llamando $\nabla f(1, -3) = (a, b)$: $(a, b)\cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (-2a + 2b, a - 2b) = (4, -2)$. De la segunda, $a = 2b - 2$; en la primera, $-2(2b - 2) + 2b = 4$, o sea $-2b + 4 = 4$, $b = 0$ y $a = -2$. Entonces **$\nabla f(1, -3) = (-2, 0)$**. Control: $(-2)(-2) + 0\cdot 2 = 4$ ✓ y $(-2)\cdot 1 + 0\cdot(-2) = -2$ ✓.
> **Plano tangente:** como f es diferenciable en $(1, -3)$, su gráfico tiene plano tangente $z = f(1, -3) + f'_x(1, -3)(x - 1) + f'_y(1, -3)(y + 3) = 2 - 2(x - 1)$, es decir **$2x + z = 4$**.
> **Trampa:** el producto es vector fila por jacobiana ($\nabla f \cdot D\vec{g}$), no $D\vec{g} \cdot \nabla f$. Si multiplicás al revés (o usás la transpuesta) te queda otro sistema y otro gradiente. Y el plano pedido es el del gráfico de f en $(1, -3)$, no el de h en $(-1, 1)$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \alpha[e^{y-2} + \cos x] - \beta[xy - \operatorname{sen} x] + g(x, y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x, y) = 4y^2 + 2xy + x^2 - 13y - 5x$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (0, 2)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Respuesta: $\alpha = -3$, $\beta = -1$. En $A = (0, 2)$ hay mínimo relativo ($Hf(A) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; valor $f(A) = -16$).

Planteo: f es suma de funciones C^∞ (las de α y β) y de g, que es C^3; entonces f es C^2 en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ es abierto y vale el criterio del hessiano. Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $A = (0, 2)$, comparte con g el valor, las derivadas primeras y las segundas en A.
Datos de g en A (derivando P_2): $P_2(0, 2) = 16 - 26 = -10$, así que $g(A) = -10$. $\partial P_2/\partial x = 2x + 2y - 5$ y $\partial P_2/\partial y = 8y + 2x - 13$, que en $(0, 2)$ dan $\nabla g(A) = (-1, 3)$. Hessiano de P_2 (constante): $Hg(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.
Gradiente de la parte con α y β: $u = e^{y-2} + \cos x$ tiene $\nabla u = (-\operatorname{sen} x, e^{y-2})$, en A: $(0, 1)$. $v = xy - \operatorname{sen} x$ tiene $\nabla v = (y - \cos x, x)$, en A: $(2 - 1, 0) = (1, 0)$.
Condición de punto crítico: $f = \alpha u - \beta v + g$, así que $\nabla f(A) = \alpha(0, 1) - \beta(1, 0) + (-1, 3) = (-\beta - 1, \alpha + 3) = (0, 0)$, de donde **$\alpha = -3$, $\beta = -1$**.
Hessiano en A: $Hu = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & e^{y-2} \end{pmatrix}$, en A: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $Hv = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en A: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $Hf(A) = -3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
Clasificación: $\det Hf(A) = 25 - 9 = 16 > 0$ y $f''_{xx}(A) = 5 > 0$: en A hay un **mínimo relativo**. Su valor (no se pedía): $f(A) = -3(1 + 1) - (-1)(0 - 0) - 10 = -16$.
Trampa: acá β va con signo menos adelante, así que sale $\beta = -1$ (en el tema 1 salía $\beta = 1$); y al armar el hessiano el $-\beta$ multiplica a Hv, con lo que $-(-1)\cdot Hv = +Hv$. Además P_2 está desarrollado en potencias de x e y: las derivadas de g en A salen derivando P_2 y evaluando en $(0, 2)$, no de los coeficientes.

Ejercicio 4. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto $(1, -1, -1)$, la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = -1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1. Calcule en forma aproximada $h(0.98, -1.02)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\check{v}$ que maximiza $h'((1, -1), \check{v})$.

Respuesta: $F'_z(1, -1, -1) = 2 \neq 0$. $\nabla h(1, -1) = (1, 1/2)$; $h(0.98, -1.02) \approx -1.03$; versor que maximiza: $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = x^2z - yz^2 + z^3 + 1$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(1, -1, -1) = 0$ ✓ (ahí $x^2z - yz^2 + z^3$ vale $-1 + 1 - 1 = -1$). (2) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$. (3) $F'_z = x^2 - 2yz + 3z^2$, que en $(1, -1, -1)$ vale $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe $z = h(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, -1)$ con $h(1, -1) = -1$.
Derivadas de h: $F'_x = 2xz \to -2$; $F'_y = -z^2 \to -1$. Por el TFI, $\nabla h(1, -1) = -(F'_x, F'_y)/F'_z = (1, 1/2)$.
Aproximación lineal: h es diferenciable (es C^1), y con $\Delta x = -0.02$ y $\Delta y = -0.02$: $h(0.98, -1.02) \approx -1 + 1\cdot(-0.02) + (1/2)(-0.02) = -1 - 0.02 - 0.01 =$ **-1.03**.
Versor que maximiza h'((1, −1), v̌): $h'((1, -1), \check{v}) = \nabla h\cdot\check{v} \leq \|\nabla h\|$, con igualdad para $\check{v} = \nabla h/\|\nabla h\|$. Como

$\|\nabla h\| = \sqrt{(1 + 1/4)} = \sqrt{5}/2$, queda $\check{\mathbf{v}} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, y el máximo vale $\sqrt{5}/2$.
Trampa: $F'_y = -z^2$ es negativo, así que $h'_y = +1/2$: el signo menos de la fórmula $-F'_y/F'_z$ se come con el de F'_y, y ahí es donde más se equivoca el signo.

Ejercicio 5. Considere la función
$f(x, y) = \{ \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x}{2x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en (0, 0).

Respuesta: Existen todas las derivadas direccionales en (0, 0): $f'((0, 0), \check{u}) = ab^2/(2a^2 + b^2)$ con $\check{u} = (a, b)$ versor ($f'_x = f'_y = 0$). f no es diferenciable en (0, 0): el resto $f(x, y)/\sqrt{(x^2 + y^2)}$ tiende a $1/(3\sqrt{2}) \neq 0$ por $y = x$ ($x \to 0^+$).

Planteo: derivada direccional por definición en $A = (0, 0)$ según el versor $\check{u} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$. Como $f(0, 0) = 0$: $f'(A, \check{u}) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(ta, tb)}{t}$. Para $t \neq 0$ el punto (ta, tb) no es el origen, así que se usa la fórmula de arriba.

Cuenta: $f(ta, tb)/t = \dfrac{t^2 b^2 \operatorname{sen}(ta)}{t \cdot t^2(2a^2 + b^2)} = \dfrac{b^2}{2a^2 + b^2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(ta)}{t}$. El denominador $2a^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 = 1$ no se anula. Si $a = 0$ el cociente es 0. Si $a \neq 0$, $\dfrac{\operatorname{sen}(ta)}{t} = a \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(ta)}{ta} \to a$ (límite notable $\operatorname{sen} u/u \to 1$).

Derivadas direccionales: existen en **todas** las direcciones y valen $f'(A, \check{u}) = \dfrac{ab^2}{2a^2 + b^2}$ (la fórmula también da 0 cuando $a = 0$). En particular $f'_x(0, 0) = f'(A, (1, 0)) = 0$ y $f'_y(0, 0) = f'(A, (0, 1)) = 0$, o sea $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.
Diferenciabilidad por definición: si f fuera diferenciable, su aproximación lineal sería $f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y = 0$, y f es diferenciable en el origen si y sólo si el resto cumple $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{f(x, y) - 0}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0$. Por la recta $y = x$ con $x \to 0^+$: $\dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{3x^2 \cdot \sqrt{2} \cdot x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3\sqrt{2} \cdot x} \to \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0$. Entonces ese límite no es 0 (ni siquiera existe: sobre los ejes el cociente vale 0) y **f no es diferenciable** en (0, 0).
Control con las direccionales: si f fuera diferenciable valdría $f'(A, \check{u}) = \nabla f(0, 0) \cdot \check{u} = 0$ para todo $\check{u}$; pero con $\check{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ da $(1/\sqrt{2})(1/2)/(1 + 1/2) = 1/(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}/6 \neq 0$. La derivada direccional existe pero no es lineal en $\check{u}$, lo que confirma que no es diferenciable.
Observación: f sí es continua en el origen, porque $|f(x, y)| = \dfrac{y^2}{2x^2 + y^2} \cdot |\operatorname{sen} x| \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x| \to 0$. Es el caso clásico: continua, con todas las derivadas direccionales, y aun así no diferenciable.
Trampa: que existan todas las direccionales no alcanza para la diferenciabilidad. Tampoco alcanza ver que el resto da 0 sobre los ejes: hay que probar el límite doble (o encontrar un camino donde no dé 0, como acá la recta $y = x$).