Análisis Matemático II

Primer parcial: exámenes reales, enunciados

Análisis Matemático II (61.03 / 81.01) · CB001

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

14/7/26 (recuperatorio)	3
7/7/26 (recuperatorio)	4
11/5/26, tema 1 (diferido)	5
9/5/26, tema 1	6
9/5/26, tema 2	7
24/2/26 (recuperatorio)	8
10/2/26 (recuperatorio)	9
16/12/25 (recuperatorio)	10
18/10/25, tema 2	11
5/8/25 (recuperatorio)	12
15/7/25 (recuperatorio)	13
8/7/25 (recuperatorio)	14
10/5/25, tema 1	15
10/5/25, tema 2	16
10/12/24, tema 1 (recuperatorio)	17
9/11/24, tema 1 (recuperatorio)	18
21/10/24, tema 1 (diferido)	19
19/10/24, tema 1	20
19/10/24, tema 2	21
2/7/24, tema 1 (recuperatorio)	22
3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)	23
1/6/24, tema 1 (recuperatorio)	24
1/6/24, tema 2 (recuperatorio)	25
13/5/24, tema 1 (diferido)	26
11/5/24, tema 1	27
29/2/24 (libre)	28
12/12/23, tema 1 (recuperatorio)	29
13/11/23, tema 1 (recuperatorio diferido)	30
11/11/23, tema 1 (recuperatorio)	31
11/11/23, tema 2 (recuperatorio)	32
23/10/23, tema 1 (diferido)	33
21/10/23, tema 1	34
4/7/23, tema 2 (recuperatorio)	35
5/6/23, tema 1 (recuperatorio diferido)	36
3/6/23, tema 1 (recuperatorio)	37
3/6/23, tema 2 (recuperatorio)	38
15/5/23, tema 1 (diferido)	39
13/5/23, tema 1	40
13/5/23, tema 2	41
12/5/23 (otro)	42
13/12/22, tema 1 (recuperatorio)	43
13/12/22, tema 2 (recuperatorio)	44
14/11/22, tema 1 (recuperatorio diferido)	45
12/11/22, tema 1 (recuperatorio)	46
12/11/22, tema 2 (recuperatorio)	47
24/10/22, tema 1 (diferido)	48
22/10/22, tema 1	49
22/10/22, tema 2	50
12/7/22, tema 2 (recuperatorio)	51
11/6/22, tema 1 (recuperatorio)	52
11/6/22, tema 2 (recuperatorio)	53
21/5/22, tema 1	54
21/5/22, tema 2	55

14/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar
$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$,
Halle y clasifique los puntos críticos de f siendo
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 2, y < 1\}$.

Ejercicio 2. Sean $p(u, v) = 2 - u + v + uv - v^2$ el polinomio de Taylor de segundo orden en (0, 1) de $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, y $\vec{f}(x, y) = (e^{x-y} - 1, x + y + 1)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $h = g \circ \vec{f}$ en (0, 0, h(0, 0)).

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $x + e^{xy-1} + z^2 = 3$ define implícitamente a $x = f(y, z)$ en un entorno de $(x_0, y_0.z_0) = (1, 1, 1)$, con f de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales la derivada direccional de la función $h(y, z) = y^2 + yz + f(y, z)$ en el punto (1, 1) sea nula.

Ejercicio 4. Sean S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ y C la curva intersección entre S y Π: $x + y = 1$. Encuentre el o los puntos de C en los cuales la recta tangente a la curva es paralela al plano de ecuación $x - z = 0$.

Ejercicio 5. Dado el campo escalar
$f(x, y) = \sqrt{(\ln(2x - y + 4))}$
a) Determine gráfica y analíticamente el dominio natural D de f.
b) Grafique por separado el interior y la frontera de
$T = \{(x, y) \in D / f^2(x, y) < \ln 5\}$.

7/7/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar $f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$,

a) analice su continuidad en el origen;
b) calcule la derivada parcial respecto de x en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea Σ_1 el conjunto de nivel de $F(x, y, z) = \ln(xy^2) + z^3$ que contiene al punto $P = (1, -1, 1)$ y sea Σ_2 la superficie parametrizada por $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano normal a $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en P.

Ejercicio 3. a) Demuestre que la ecuación $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (1, 0, z_0)$.
b) Calcule los versores para los cuales la derivada direccional de $h = f \circ \vec{g}$ en el punto (1, 1) se anula. Considere la función f del inciso anterior y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$.

Ejercicio 4. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ y determine si allí se producen extremos.

Ejercicio 5. Grafique el dominio natural del campo $\vec{f}(x, y) = (\ln(x^2 - y), \sqrt{(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}})$; indique si es abierto, cerrado, conexo y/o acotado y represente su frontera en otro gráfico.

11/5/26, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{x + y^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$.
Si $h = f \circ \vec{g}$, calcule $h(1.95, -3.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea Γ la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en los versores $\check{v}$ tangentes a Γ en ese punto.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u \cos(v), u, u \operatorname{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en (1/2, 0) un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

9/5/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 + y)\ \sqrt{}(4 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,x^2y - 2xy + b\,y^3$ tal que (1, 1) es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f que tienen ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (1, –1, 1), la ecuación
$\ln(x + y^2 - z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(-1, 1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((-1, 1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(x + y - z, xyz)$, con f(u, v) una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $L(u, v) = 1 + 2u - v$ es la aproximación lineal de f en el punto $(u_0, v_0) = (3, -1)$. Sea Σ la superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r^2 + s^2, r + s, r - s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto (1, 1, –1).

9/5/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 - y)\ \sqrt{}(9 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\ xy^2 - 2xy + b\ x^3$ tal que (1, 1) es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f q[ilegible] ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (1, 1, –1), la ecuación
$\ln(x - y^2 + z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(1, -1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((1, -1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(xyz, x + y - z)$, con f(u, v) una función de clase C^1(ℝ[ilegible] $L(u, v) = 1 - u + 2v$ es la aproximación lineal de f en el punto (u_0, v_0) = (–1, 3[ilegible] superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r - s^2, r + s, r^2 + s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto (–1, 1, 1).

24/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $g(x, y) = xf(y) + yf(x) + 4x^2 + 2xy + y^2$; con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Demuestre que el punto (0, 0) es un punto crítico de g y clasifíquelo.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (π, 1, 0) la ecuación

$$\frac{x}{y} + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 = \pi,$$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto (π, 1, 0).

Ejercicio 3. Sea $h = f \circ \vec{g}$, con $f(x, y) = x + xy^2$, y $\vec{g}(u, v) = (au + v, v)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halle el valor de a para que el versor en el cual se produce la máxima derivada direccional de h en el punto (0, 1) sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Indique el valor de esa derivada direccional máxima.

Ejercicio 4. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Calcule, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, (Sugerencia: Utilice el resultado del ítem anterior).

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies de ecuaciones

$$z = x^2 + y^2,\ z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}.$$

Calcule el o los puntos de C donde la recta tangente resulta paralela al eje y.

10/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$\vec{f}(x, y) = \left(\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)}, \dfrac{1}{x^2 - y^2}\right)$

Determine y grafique el dominio natural D. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea la superficie Σ parametrizada por

$\vec{X}(u, v) = (u^2 + v, u - v, u + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

y P = (1, 1, 1). Determine, si existe, el punto donde la recta normal a Σ en P interseca al plano xy.

Ejercicio 3. Sea

$g(x, y) = f(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$,

donde w = f(u, v) es una función definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (2, 0)$ por

$u\, e^{vw} - 3uv - 2w = 0$.

Estime g(1.03, 0.98) mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = x^2y + y\, f(xy)$, con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 8$.

Determine si P = (1, 1) es punto crítico de h y, en caso afirmativo, clasifíquelo.

Ejercicio 5. Sea $f \in C^1$, con f(1, 2) = –1. Se sabe que la derivada de f en (1, 2) en la dirección del versor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ es $2\sqrt{2}$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en (1, 2, –1).

16/12/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{y(y + 2x)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \ (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ 0 \ (x, y) = (0, 0) \}$

a) Analice la continuidad de f en el origen.

b) Determine si existen las derivadas parciales en (0, 0) y qué puede decir de la diferenciabilidad de f en ese punto.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (1, –1, –1) la ecuación

$x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y = -2$

define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1. Calcule el valor mínimo de la derivada direccional de g en (–1, –1) y la dirección (versor) en la cual se produce.

Ejercicio 3. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y - z = 0$ y sea L la recta de ecuación

$\vec{X} = (-1, -2, 1) + \lambda(-2, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

Halle él o los puntos P en los cuales S y L se intersecan ortogonalmente.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = \alpha e^{\alpha x} - xy + \beta sen(y) - x + y + y^2$.

Determine, si existen, los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que f alcance un extremo relativo en el origen y clasifique el tipo de extremo.

Ejercicio 5. Sean f(u, v, w) un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^3)$ y h(x, y) = f(x + y, x – y, xy). Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden de h en (1, 0) es

$p(x, y) = 9 - 3x + 2y - xy - x^2 + \frac{1}{2}y^2$

y que $f'_w(1, 1, 0) = 2$.

Calcule $\nabla f(1, 1, 0)$ y halle el plano tangente al conjunto de nivel de f en el punto (1, 1, 0).

18/10/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x^2 + y)}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique por separado D y su frontera. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

b) Grafique por separado el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ y $f: D \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y^2x + 2x^2 + y^2 + 1$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (2, 1, 2), la ecuación

$xz + yz + e^{y+z-3} = 7$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((2, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $f(u, v)$ una función de clase C^1 tal que $L(u, v) = 1 + 2v - u$ es su aproximación lineal en $(-1, 1)$. Sea $g(x, y) = f(e^y x, \cos(xy) + y)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(-1, 0, g(-1, 0))$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (uv, u + v, 2v - u), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

y C la curva definida por las ecuaciones $xy + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z = 0$. Halle el o los puntos $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano normal a C en $(1, 0, -1)$.

5/8/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 - 2x}$.

Identifique y grafique el dominio natural de f e indique si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

Ejercicio 2. Sean $g(x, y, z) = f(\vec{h}(x, y, z))$, con $\vec{h}(x, y, z) = (y - x^2 + z, e^{y+z} - x)$, y $p(u, v) = 1 - uv$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(-1, 0)$. Encuentre la dirección de la máxima derivada direccional de g en el punto $(1, 0, 0)$. Justifique sus cálculos.

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones

$\{ u + vx + y = 3 \; ; \; u^2 - x^2 - yv = -1 \}$

a) verifique que en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$, el mismo define implícitamente funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de clase C^1;

b) calcule $u'_x(1, 1)$ y $v'_x(1, 1)$.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = y - x - x^2 - \dfrac{y^3}{3}$.

Halle los extremos relativos de f y en qué puntos se alcanzan.

Ejercicio 5. Halle una ecuación para el plano normal, en $P = (2, -1, 0)$, a la curva que se obtiene de la intersección de la gráfica de $f(x, y) = 1 - x - y$ con el conjunto de nivel de $g(x, y, z) = xe^z + y^3$ que contiene a P. Justifique sus cálculos.

15/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$.

a) Grafique en gráficos separados su dominio, la frontera del mismo y el conjunto de nivel 0.

b) Indique si el dominio natural es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea el campo escalar

$f(x, y) = \{ \dfrac{y}{x^2}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0. \}$

a) ¿Es f continuo en (0, 0)?

b) ¿Existen las derivadas parciales de f en (0, 0)?

c) ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen?

Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 3. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (0,1) de cierto campo escalar f(u, v) de clase C^2 es $P(u, v) = 1 - u^2 + uv$. Si $\vec{g}(x, y) = (xy, y - x)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = (f \circ \vec{g})(x, y)$ en $(-1, 0, h(-1, 0))$. Justifique todos sus cálculos.

Ejercicio 4. Considere la curva C definida por la intersección de la superficie parametrizada por $\vec{\sigma}(u, v) = (u + v^2, u^2, u + v)$, con $(u, v) \in [0, 2] \times [-1, 1]$, y la superficie de nivel de $f(x, y, z) = y^3 + xz$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Halle una ecuación para la recta tangente a la curva C en el punto (1, 1, 1).

Ejercicio 5. Halle valores reales de a y b para los cuales $f(x, y) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y^2} + xy$ tiene un extremo en (1, 1). ¿De qué extremo se trata y cuál es su valor? Analice si para esos valores de a y b existen otros puntos críticos de f.

8/7/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 4)}}{\sqrt{(xy - x)}}$.
Exprese y grafique el dominio natural de f, indicando si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

Ejercicio 2. Sean $f(x, y) = ax^2 + xy$ y C la curva de ecuación vectorial $\vec{X} = (2t, t^2 + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que en el punto $(1, \dfrac{5}{4})$ la curva C y el conjunto de nivel de f tengan la misma recta tangente.

Ejercicio 3. Sean $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$, con $\vec{g}(x, y) = (x^2y, y - x^2)$, y, $x + 2y + z = 3$ la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$. Calcule $h(1.02, 1.97)$ utilizando una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u^2 + v, u - v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle la intersección entre la recta normal a Σ en $(2, 4, -1)$ y el plano xy.

10/5/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2x - x^2 - y^2)}}{\sqrt{(x - y)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (2, 0), (0, 0).

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y$ y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$\operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y = 2$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (e^t, -\cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\nabla g(1, -1)$

b) Calcule aproximadamente $h(0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, v^2, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

10/5/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2y - y^2 - x^2)}}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (0, 2), (0, 0).

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$ y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$\operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x = 2$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 0), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\nabla g(-1, 1)$

b) Calcule aproximadamente $h(-0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, u^2, v - u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

10/12/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

a) Estudie la continuidad de f en (0, 0).

b) Calcule las derivadas parciales de f en el origen. Indique, con fundamento, si ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea g un función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en (1, –1) es $P(x, y) = 1 - x + y + x^2 + xy + y^2$.

Determine si $f(x, y) = e^{g(x,y)}$ alcanza un extremo relativo en (1, –1). En caso afirmativo indique tipo y valor.

Ejercicio 3. Considere la ecuación

$2z + \cos(y - z) + xy = 4$.

a) Pruebe que en un entorno del punto (1, 1, 1) la ecuación define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1.

b) Encuentre los versores para los cuales derivada direccional de $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto (1, 1) resulta nula. Justifique sus cálculos.

Ejercicio 4. Sea g(u, v) un campo escalar de clase C^1 tal que $w = 1 - 2u + 3v$ es una ecuación del plano tangente al gráfico de g en (2, 1, g(2, 1)). Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy)$.

Calcule f(0.9, 1.05) mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación

$\vec{X} = (u + v, \dfrac{v^2}{2}, \dfrac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$.

Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto A = (–1, 1, 1). Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

9/11/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(y + 2x)}{\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}}$.

Exprese el dominio natural de f mediante ecuaciones y/o inecuaciones, grafíquelo e indique si es abierto o cerrado. Represente en otro gráfico su frontera.

Ejercicio 2. Sea

$f(x, y) = y^3 - 6\mathbf{a}^2xy + 3\mathbf{a}x^2y$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Halle el o los valores de **a** para que f tenga un punto crítico en (1, 1) y clasifíquelo para cada valor hallado.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4 = 0$

define implícitamente en un entorno del punto (–1, 1, 2) a $z = f(x, y)$ con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en A = (–1, 1) alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{h}(r, s)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, donde $\vec{h} = \vec{F} \circ \vec{g}$ con $\vec{g}(r, s) = (r + s, r - s, s^2)$ y $\vec{F}(u, v, w) = (v, u + v, u^2 + v^2 + w)$.

Halle una ecuación del plano tangente a Σ en $P = \vec{h}(0, 1)$.

Ejercicio 5. Halle el o los puntos de la curva C definida por las ecuaciones

$\{ x^2 + y^2 = 1 \; ; \; x + y + z = 1 \}$,

para los cuales la recta tangente a C en ellos es paralela al plano yz.

21/10/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$.
Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u \cos(v), u, u \operatorname{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en (1/2, 0) un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

19/10/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (1 + \ln(xy), \sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(x - 2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y + 1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (1, 0) y clasifíquelo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$
define implícitamente una función $x = f(y, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(y_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(x + y, x^3y^2)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que $f(0, 1) = 1$ y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y - 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 - 2y - x + 1 = 0 \; ; \; y - z = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

19/10/24, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (2 - \ln(xy), \sqrt{(3 - y^2 + 2y - 4x^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(y - 2)^2 + 2x] + \mathbf{b}[(x + 1)^2 - 2y^3] + 8y - 4x$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (0, 1) y clasifíquelo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zx - \cos(z)y + xy^2 = 0$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(x_0, z_0) = y_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(x - y, x^2y^3)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que $f(0, 1) = 1$ y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, 1, g(1, 1))$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y + 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 + 2y - x + 1 = 0 \; ; \; z - y = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

2/7/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = 6x^2y - x^3y - x^2y^2$ en la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
y clasifíquelos.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$f(x, y) = \sqrt{(x + y)}\ \ln(2 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$, la ecuación
$e^{y+z} + xz^2 + y = 1$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1. Encuentre los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
Sabiendo que $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$ es el polinomio de Taylor de orden 1 de g en (0, 2, 0), halle la aproximación lineal de f alrededor del punto (1, 1).

Ejercicio 5. Halle los puntos P de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$
para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie
$\vec{X} = (uv, u + v, u - v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$
en Q = (1, 2, 0).

3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación
$z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$
en un entorno del punto $(1, 1)$. Calcular mediante una aproximación lineal el valor de $h(2.01, 0.97)$, siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie
$\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$
en $A = (1, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto $(0, -1, 2)$ es tangente a la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Ejercicio 5. Considere el campo escalar
$f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0. \}$
Determine todas las direcciones para las cuales la derivada direccional de f es nula en el origen.

1/6/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ax^2 + by^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = x^2 + xy - x - y^2 - 2y + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x + y), \sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (1, 2). Calcule mediante una aproximación lineal f(1.1, 1.95).

Ejercicio 4. Sea f(x, y) una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $2x - 3y = 1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en el punto (2, 1);
b) la derivada direccional de f en (2, 1) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(2, 1)$.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$x^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en (1, 1, 1) con el plano tangente a Σ en (1, 1, 2).

1/6/24, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x - y), \sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ay^2 + bx^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = y^2 + xy - y - x^2 - 2x + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (2, 1). Calcule mediante una aproximación lineal f(1.95, 1.1).

Ejercicio 4. Sea f(x, y) una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $3x - 2y = -1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = -2$ en el punto (1, 2);
b) la derivada direccional de f en (1, 2) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $-\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(1, 2)$.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$y^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v - u, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en (1, 1, 1) con el plano tangente a Σ en (1, 1, 2).

13/5/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, –4) y la dirección en la cual este valor se produce.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización

$\vec{X} = (2u^2, u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto (–1, –1, 1).

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$.

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$.

Sea C es la curva de ecuación

$C : f(x + y, 2x - y) = 1$.

Halle la recta normal a C en el punto (1, –1).

11/5/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización $\vec{X} = (t^2, 0, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en (0, 1) se anula.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(ye^x, x + 2y)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r, s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en (1, 2). Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0, 1))$.

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

estudie la continuidad f en (0, 0) y la existencia de $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$.

29/2/24 (libre)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Decida, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

Ejercicio 2. Sean C la curva plana de ecuación $2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x = 6$ y $f(x, y) = xy - y^2$. Halla la derivada direccional de f en (1, –1) en la dirección tangente a C en el punto (1, 2) orientada hacia y^+.

Ejercicio 3. Sea f un campo escalar de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto (3, –1) es $p(u, v) = -1 - 3v + uv + u^2 - 3v^2$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y - xy)$ en el punto (2, 1, g(2, 1)).

Ejercicio 4. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} x - yz - \cos(yz) = 0 \\ x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

define una curva regular C en un entorno del punto P = (1, 0, 2), y halle la intersección de la recta tangente a C en P con el plano de ecuación $2y - x + z = 5$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ y determine en qué puntos del disco se producen dichos extremos absolutos. .

12/12/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0. \}$

a) Analice la existencia de derivadas direccionales y parciales de f en el origen.

b) Halle las direcciones para las cuales las derivadas direccionales de f en el origen resultan nulas.

Ejercicio 2. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (2,1) de cierto campo escalar $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $P(u, v) = 1 - u - v + u^2 - 2v^2$. Si $\vec{f}(x, y) = (x + y, e^{x+3y})$, halle una ecuación para el plano tangente a la gráfica de $h(x, y) = (g \circ \vec{f})(x, y)$ en $(3, -1, h(3, -1))$. Justifique todos sus cálculos.

Ejercicio 3. Considere la curva C, definida por la intersección de la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + zy$ que pasa por el punto $(-1, 1, 2)$ y la superficie imagen de $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u^2, -2u + v)$, con $(u, v) \in [-2, 2] \times [-1, 1]$. Halle una ecuación para la recta tangente a C en el punto $(-1, 1, 2)$.

Ejercicio 4. Considere el campo escalar $G(x, y, z) = z + \cos(z - x) + xy$

a) Pruebe que, en un entorno del punto $(1, 1, 1)$, la ecuación $G(x, y, z) = 3$ define, implícitamente, $y = f(x, z)$.

b) Encuentre el valor de la máxima derivada direccional de la función $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto $(1, 1)$. Justifique sus cálculos.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2(1 + x) + y^2$ sobre el arco de curva $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. ¿En qué puntos de la curva se alcanzan esos extremos? ¿Cuáles son sus valores?

13/11/23, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) determine y grafique su dominio natural, ¿es abierto?, ¿es acotado?,

b) halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$. Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Ejercicio 4. Sea L la recta normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{F}(u, v) = (u \cos(v), u, u \operatorname{sen}(v))$ con $(u, v) \in [1, 3] \times [0, \pi]$, en el punto (0, 2, 2). Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x + y + z$ evaluada en puntos de la curva $y = -x^2 + 4$, $z = y$, $y \geq 0$.

11/11/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Para la función $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y)}{\sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)}}$ determine y grafique su dominio natural. Indique, justificando, si es abierto y represente, en otro gráfico, su frontera.

Ejercicio 2. Pruebe que la ecuación $2z\,\mathrm{sen}(x + y) + x z^2 - 4 = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(1, -1, 2)$ a $z = f(x, y)$, con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (1, -1)$ alcanza su mínimo valor e indique cuánto vale este mínimo.

Ejercicio 3. Halle una ecuación para la recta normal al conjunto de nivel 2 de $h(u, v) = (f \circ \vec{g})(u, v)$ en $P = (1, 0)$ sabiendo que

- f es un campo escalar de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $A = (1, -1, 2)$ es $2x - 6y - 2z = 4$,
- $\vec{g}(u, v) = (2uv + 1, 3u^2 - 4)$.

Ejercicio 4. Considere la curva C, definida por la intersección de las superficies $S_1 : z = x^2 + y$ y $S_2 : y = 2x^2 + 1$. Encuentre el punto de intersección entre la recta tangente a C en $(1, 3, 4)$ y el plano de ecuación $x + 2y = 4$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2y$ evaluada en puntos del arco de curva de ecuación $y = x^2 + 2x$ con $-2 \leq x \leq -1$ y determine en qué puntos de la curva se producen dichos extremos absolutos.

11/11/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Para la función $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}}$ determine y grafique su dominio natural. Indique, justificando, si es abierto y represente, en otro gráfico, su frontera.

Ejercicio 2. Pruebe que la ecuación $2z\,\mathrm{sen}(x + y) + y z^2 - 4 = 0$ define implícitamente en un entorno del punto $(-1, 1, 2)$ a $z = f(x, y)$, con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (-1, 1)$ alcanza su mínimo valor e indique cuánto vale este mínimo.

Ejercicio 3. Halle una ecuación para la recta normal al conjunto de nivel 2 de $h(u, v) = (f \circ \vec{g})(u, v)$ en $P = (0, 1)$ sabiendo que

- f es un campo escalar de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $A = (-1, 1, 2)$ es $6x - 2y - 2z = -12$,
- $\vec{g}(u, v) = (3v^2 - 4, 2uv + 1)$.

Ejercicio 4. Considere la curva C, definida por la intersección de las superficies $S_1 : z = x + y^2$ y $S_2 : x = 2y^2 + 1$. Encuentre el punto de intersección entre la recta tangente a C en $(3, 1, 4)$ y el plano de ecuación $2x + y = 4$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2 y$ evaluada en puntos del arco de curva de ecuación $y = x^2 - 2x$ con $1 \le x \le 2$ y determine en qué puntos de la curva se producen dichos extremos absolutos.

23/10/23, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio del campo escalar $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z^2 - 9)}$.

a) Halle, cuando sea posible, un punto exterior, un punto interior y un punto frontera del conjunto D.

b) Determine si D es compacto y/o conexo justificando su respuesta.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = \{ \dfrac{5x^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

a) Describa y grafique el conjunto de nivel 1 de f.

b) Determine además si f es continua en el origen justificando su respuesta.

Ejercicio 3. Sea C la curva intersección entre el gráfico de $f(x, y) = x^2$, y el plano de ecuación $x = y$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1, 1, z_0)$.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2y, x-y)$, con $z = g(u, v)$ definida implícitamente por la ecuación $ze^{u(v-1)} + ve^z = 1$ en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (4, 1, z_0)$. Calcule la dirección de la mínima derivada direccional de f en el punto (2, 1).

Ejercicio 5. Halle los extremos relativos de $f(x, y) = xye^{x+2y}$.

21/10/23, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - xy^2)}}$ y sea D su dominio natural

a) Halle y grafique D.

b) Indique si D es abierto y/o conexo, justificando su respuesta, y represente en otro gráfico su frontera.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \{ \dfrac{y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

a) Analice la continuidad de f en (0, 0).

b) Halle todos los versores para los cuales la derivada direccional en (0, 0) es nula.

Ejercicio 3. Sea C la curva intersección de las superficies Σ_1 de ecuación $y^2 + y + xz = 0$ y Σ_2 de ecuación $e^{z^2} - y^2 + 4x = 4$. Analice si el plano normal C en el punto $(1, y_0, 0)$ es paralelo al plano $x - 2y - 2z = 1$.

Ejercicio 4. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (1, –1) de un campo escalar $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ es $p_2(u, v) = 3 - u + v + u^2 - 2uv$. Halle la dirección de máxima derivada direccional de la función $h(x, y) = 2x^2y + f(x + y, -e^{xy})$ en el punto (0, 1). Justifique su procedimiento.

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = a(x - 2)^2 + b(y + 1)^2 - 2x^3$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Halle todos los valores de a y b de manera tal que (1, –1) sea un punto crítico de f. Considerando todos los valores de a y b hallados, determine aquellos valores para los cuales f tiene un extremo relativo en (1, –1) y clasifíquelo.

4/7/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \sqrt[4]{(xy)}\,\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique, por separado, D, int(D) y ∂D. Para cada uno de estos conjuntos indique si es cerrado o abierto y si es conexo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (1, 0)$ mediante la ecuación $ze^{uv} - uz^3 + \text{sen}(v) = 0$ que satisface la condición $f(1, 0) = 1$. Si $g(x, y) = f(2x + y, x^2 - y^2)$, halle $\nabla g(1, -1)$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en $P = (-1, 1)$ es $p(x, y) = 4 + 2y^2 + 5xy - 3y$ y sea $h(x, y) = xf(x, y) + 3x$. Halle el plano tangente al gráfico de h en el punto $(-1, 1, h(-1, 1))$.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = y^3 - 6xy + 3x^2y$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos. En caso de producirse un extremo indique el valor de éste.

Ejercicio 5. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ donde Σ_1 y Σ_2 son las superficies de ecuaciones $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 4 \wedge \Sigma_2 : \vec{X} = (u, v, u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación de la recta tangente a C en el punto $P = (x_0, 2, z_0)$.

5/6/23, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado o conexo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación $z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$ en un entorno del punto $(1, 1)$. Calcular mediante una aproximación lineal el valor de $h(2.01, 0.97)$, siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie $\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$ en $A = (\vec{1}, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto $(0, -1, 2)$ es tangente a la superficie de ecuación $X = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = 2x + 3y^2$ y sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$. Halle los valores mínimo y máximo absolutos que alcanza f sobre la frontera de D.

3/6/23, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en A = (1, –1) es $p_2(x, y) = x^2 - 2xy - 5x + 4y + 8$. Halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en P = (1, –1, f(1, –1)) y una para la recta normal a la curva de nivel f(x, y) = f(1, –1) en el punto A.

Ejercicio 2. Sea C el arco de curva que satisface las condiciones $y - z - 1 = 0 \wedge x^2 - y + 1 = 0 \wedge z \leq 1$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos que $f(x, y, z) = e^{2z-y}$ alcanza en C y los puntos de donde estos extremos se producen.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 + y^2}$. Sean D el dominio natural de f y sea $N_k(f)$ el conjunto de nivel k de f. Grafique los conjuntos $N_0(f)$, $N_{1/4}(f)$ y $N_1(f)$, y explique por qué lo obtenido implica que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Ejercicio 4. Sea v = g(u) la función de clase C^1 en un entorno de $u_0 = 0$ definida implícitamente por la ecuación $e^u + v + v^2 = 1$ que satisface la condición $g(0) \neq 0$. Halle la máxima derivada direccional de $f(x, y) = g(2x - y^2)$ en el punto P = (2, –2) y el versor en el cual ésta se produce.

Ejercicio 5. Sean $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $\vec{h}(u, v) = (uv, v + u, v - u) \wedge \vec{f}(x, y, z) = (x + z, yz, x^2 + z^2)$. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{f} \circ \vec{h}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{f} \circ \vec{h}(1, -1)$.

3/6/23, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $u = g(v)$ la función de clase C^1 en un entorno de $v_0 = 0$ definida implícitamente por la ecuación $e^v + u + u^2 = 1$ que satisface la condición $g(0) \neq 0$. Halle la máxima derivada direccional de $f(x, y) = g(2y - x^2)$ en el punto $P = (-2, 2)$ y el versor en el cual ésta se produce.

Ejercicio 2. Sea f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (-1, 1)$ es $p_2(x, y) = y^2 - 2xy - 5y + 4x + 8$. Halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en $P = (-1, 1, f(-1, 1))$ y una para la recta normal a la curva de nivel $f(x, y) = f(-1, 1)$ en el punto A.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \dfrac{y^2 + 2y}{x^2 + 2y^2}$. Sean D el dominio natural de f y sea $N_k(f)$ el conjunto de nivel k de f. Grafique los conjuntos $N_0(f)$, $N_{1/4}(f)$ y $N_1(f)$, y explique por qué lo obtenido implica que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Ejercicio 4. Sean $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $\vec{h}(u, v) = (v - u, uv, v + u) \wedge \vec{f}(x, y, z) = (xz, y + z, x^2 + z^2)$. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{f} \circ \vec{h}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{f} \circ \vec{h}(-1, 1)$.

Ejercicio 5. Sea C el arco de curva que satisface las condiciones $x - z - 1 = 0 \wedge y^2 - x + 1 = 0 \wedge z \leq 1$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos que $f(x, y, z) = e^{2z-x}$ alcanza en C y los puntos de donde estos extremos se producen.

15/5/23, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$. Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, –4) y la dirección en la cual este valor se produce.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización $\vec{X} = (2u^2, u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto (–1, –1, 1).

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$. Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$. Sea C es la curva de ecuación $C : f(x + y, 2x - y) = 1$. Halle la recta normal a C en el punto (1, –1).

13/5/23, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $h(x, y) = f(x-y, x+y, xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2x + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1, 1, h(1, 1))$ y que la segunda componente de $\nabla f(0, 2, 1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en (0, 2, 1) alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = ae^{ax} - xy + b\,\mathrm{sen}(y) - x + y + y^2$. Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(4x^2 - 8x + y^2)}}{\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

Ejercicio 4. Prueba que la ecuación $x^2y + xz - e^y = 1$ define implítamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(y_0, z_0) = (0, 1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v, \dfrac{v^2}{2}, \dfrac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$. Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (-1, 1, 1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación paramétrica del plano tangente a Σ en ese punto.

13/5/23, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \frac{\sqrt{(4y^2 - 8y + x^2)}}{\sqrt[4]{(9 - x^2 - y^2)}}$. Sea D el dominio natural de f. Grafique D, el interior de D y su frontera ∂D. Describa el conjunto $\partial D \cap D$ mediante ecuaciones.

Ejercicio 2. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, u + v)$, $u > 0$, $v > 0$. Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (1, 1, -1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación $y^2x + yz - e^x = 1$ define implítamente una función $y = g(x, z)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(x_0, z_0) = (0, 1)$. Calcule $g(0.05, 0.97)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = f(x+y, x-y, xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Se sabe que el plano de ecuación $2y + z = 1$ es tangente al gráfico de h en $P = (1, 1, h(1, 1))$ y que la primera componente de $\nabla f(2, 0, 1)$ es 2. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $(2, 0, 1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Ejercicio 5. Sea $f(x, y) = be^{by} - xy + a\,\mathrm{sen}(x) - y + x + x^2$. Halle todos los valores de las constantes a y b para los cuales f alcanza un extremo relativo en el origen. Clasifique el tipo de extremo para los valores de a y b obtenidos.

12/5/23 (otro)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio natural de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}{x^2 - y^2}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{R}^2)$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x, y) = f(x\,y + y, y^2\,x - 2\,x)$. Sabiendo que

- la derivada direccional máxima de h en (1, 1) es $\sqrt{13}$,
- $\nabla h(1, 1)$ tiene componentes positivas y es ortogonal al vector (−4, 6),

halle la derivada direccional mínima de f en (2, −1).

Ejercicio 3. Sea la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 = a^2 \wedge 2xz + y^2 + 2y = 3\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$ y Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v^2, 3\,u - v, 2\,u + v^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle, si existe, $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que la recta tangente a C en el punto (0, 1, a) sea paralela a la recta normal a Σ en el punto Q = (1/36, 1/6, 1/36).

Ejercicio 4. Pruebe que la ecuación $3\,e^x + 3xy + y^2 + yz + z^3 = 2$ define implícitamente a $x = f(y, z)$ definida en un entorno de (0, −1). Determine si el plano tangente al gráfico de f en el punto (g(0, −1), 0, −1) es paralelo al plano $6x - 2\,y + 6\,z = 4$.

Ejercicio 5. Sea $g(x, y) = f(x, y) + \cos(x - 1)$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^3(\mathbb{R}^2)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en (1, −1) es $p(x, y) = x^2 + 2\,y^2 - x\,y - 3\,x + 5\,y + 2$. Analice si g alcanza un extremo relativo en (1, −1) y, en caso afirmativo, clasificarlo y encontrar su valor.

13/12/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 7 = 0, z < 0\}$ y $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 + z^2 - 13 = 0\}$.
Halle el plano normal a C en el punto $(1, y_0, z_0)$ con $y_0 > 0$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 para el cual se sabe que en el punto $P = (1, -1)$ la máxima derivada direccional de f vale 2 y se produce en el versor $\check{v} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$. Halle $\nabla f(P)$ y una ecuación paramétrica para la recta que es tangente en P a la curva de nivel de f que pasa por ese punto.

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $ue^{vw} + u^2w = 12$ define en forma implícita una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3, 0)$.
Halle el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = f(x^2 + 2y, x - y)$ en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{y}, \sqrt{(2 - 2y - 2x^2)})$ y sea D su dominio natural. Sea $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \|\vec{f}(x, y)\|^2$.
Halle los valores máximo y mínimo absolutos de g en la **frontera de D** y los puntos en los cuales se producen.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x \operatorname{sen}(y)}{2x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Determine, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

13/12/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 para el cual se sabe que en el punto $P = (-1, 1)$ la máxima derivada direccional de f vale 3 y se produce en el versor $\check{v} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$. Halle $\nabla f(P)$ y una ecuación paramétrica para la recta que es tangente en P a la curva de nivel de f que pasa por ese punto.

Ejercicio 2. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 + 7 = 0, y < 0\}$ y $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 + z^2 - 13 = 0\}$.
Halle el plano normal a C en el punto $(1, y_0, z_0)$ con $z_0 > 0$.

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $ve^{uw} + v^2w = 12$ define en forma implícita una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$.
Halle el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = f(x - y, x^2 + 2y)$ en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4y \operatorname{sen}(x)}{x^4 + 4y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Determine, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{y}, \sqrt{(8 - 2y - 2x^2)})$ y sea D su dominio natural. Sea $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \|\vec{f}(x, y)\|^2$.
Halle los valores máximo y mínimo absolutos de g en la **frontera de D** y los puntos en los cuales se producen.

14/11/22, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[4]{(x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2)}}{\sqrt{(x - 1)}}.$$

Sea D el dominio natural de f. Se pide

1. Graficar D.
2. Parametrizar $C = D \cap \partial D$.

Ejercicio 2. Sea

$$f(x, y) = 2x^2 + \frac{4}{x} + y^3 - 3y^2 + 2.$$

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo. En caso de producirse extremo, indique tipo y valor.

Ejercicio 3. Pruebe, mediante el teorema de la función implícita, que existe un único $w_0 \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0) = (0, 3)$ que satisface $f(0, 3) = w_0$.
Encuentre todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 3), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $h(u, v) = f(3v - 3u, u^2 + v^2)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que el plano de ecuación $4x + 2y + 2z = 2$ es tangente al gráfico de f en $(0, 2, f(0, 2))$.
Halle la expresión de $h'((1, 1), \check{v})$ para todo versor $\check{v} \in \mathbb{R}^2$ y determine para cual de ellos la derivada direccional es máxima.

Ejercicio 5. Halle todos los puntos de la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u^2 + v^2, u + v, u - 2v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, para los cuales el plano tangente a Σ en esos puntos resulta paralelo al plano de ecuación $x + y = 1$. Halle tal plano tangente en cada punto hallado.

12/11/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x^2y, y^2 - x^2)$, con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas en todo punto. Sabiendo que la aproximación lineal de $g(u, v)$ alrededor del punto $(1, 0)$ es $L(u, v) = 4+u-2v$, halle $f'((-1, 1), \check{v})$, donde $\check{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = y\, h(x, y) + \alpha x^2 - 4x + 1$, con α constante y h una función de clase C^2 tal que $p(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - x - 1$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (1, 0)$.

1. Halle el valor de α para el cual f tiene un punto crítico en A.
2. Para el valor α hallado, determine si se produce un extremo relativo en A e indique en caso afirmativo valor y tipo.

Ejercicio 3. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - y - x^2)}}{\sqrt{y}}$$

y sea D su dominio natural.

1. Describa D mediante inecuaciones y grafíquelo.
2. Grafique la curva de nivel 1 de f y halle una parametrización de ella, indicando claramente el dominio para el parámetro.

Ejercicio 4. Sea C la curva intersección de las superficies

$\Sigma_1 : y^2 + z^2 = 2 \wedge \Sigma_2 : y - x + z = 0$.

Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano yz.

Ejercicio 5. Sea $\vec{\varphi}(u, v) = (4uv, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de la superficie Σ. Si r_0 es la recta normal a Σ en el punto $(3, 2, 1)$ y Π es el plano tangente a la superficie de ecuación $x^2 + xy + e^z = 3$ en el punto $(1, 1, 0)$, halle $r_0 \cap \Pi$.

12/11/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - y - x^2)}}{\sqrt{y}}$$

y sea D su dominio natural.

1. Describa D mediante inecuaciones y grafíquelo.
2. Grafique la curva de nivel 1 de f y halle una parametrización de ella, indicando claramente el dominio para el parámetro.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = x\,h(x, y) + \alpha y^2 - 4y + 1$, con α constante y h una función de clase C^2 tal que $p(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - y - 1$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (0, 1)$.

1. Halle el valor de α para el cual f tiene un punto crítico en A.
2. Para el valor α hallado, determine si se produce un extremo relativo en A e indique en caso afirmativo valor y tipo.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x^2 - y^2, xy^2)$, con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas en todo punto. Sabiendo que la aproximación lineal de g(u, v) alrededor del punto (0, 1) es $L(u, v) = 1 - 2u + v$, halle $f'((1, -1), \check{v})$, donde $\check{v} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{\varphi}(u, v) = (u + v, 4uv, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización de la superficie Σ. Si r_0 es la recta normal a Σ en el punto (2, 3, 1) y Π es el plano tangente a la superficie de ecuación $y^2 + xy + e^z = 3$ en el punto (1, 1, 0), halle $r_0 \cap \Pi$.

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies

$\Sigma_1 : x^2 + z^2 = 2 \wedge \Sigma_2 : x - y + z = 0$.

Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano xz.

24/10/22, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{\text{sen}(xy)}{2x^2 + 3y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$

Estudie la continuidad de f en el origen. Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Decida, con fundamento, si es posible que f'_x y f'_y sean simultáneamente continuas en $(0, 0)$.

Ejercicio 2. Sea $f = g \circ \vec{h}$ con $\vec{h}(x, y) = (-2xy, y - x^2)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sabiendo que $4x - 8y + 2z = 2$ es una ecuación para el plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$, halle el valor de la máxima derivada direccional de g en el punto $(-4, 1)$ y la dirección en la cual este valor se produce.

Ejercicio 3. Sea C la curva que se obtiene al intersecar la superficie Σ_1 de ecuación $y - x^2 + z = 1$ con la superficie Σ_2 de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u, 2u^2, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Halle todos los $P \in C$ para los cuales la recta tangente a C en P es paralela al plano de ecuación $2x + y + z = 0$.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$.

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Ejercicio 5. Pruebe, mediante el teorema de la función implícita, que existe un único $w_0 \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0) = (0, 3)$ que satisface $f(0, 3) = w_0$.

Encuentre todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 3), \check{v}) = 0$.

22/10/22, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4)}, \ln(y - x - 1))$
y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + \frac{y^3}{3}$.
Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

Ejercicio 3. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v, uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x, y, z) = x^2 + 4y + z^2$ en el punto $(x_0, 1, 1)$, con $x_0 < 0$.
Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

Ejercicio 4. Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$ la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1 que cumple $h(0, -1) = z_0$.
Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(0.1, -1.05)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(0, -1)$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar
$f(x, y) = \{ \frac{\operatorname{sen}(x^3) - y^3}{x^2 + 2y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 0), \check{v}) = 0$.

22/10/22, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(4x - x^2 + 8y - 4y^2 - 4)}, \ln(x - y - 1))$
y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

Ejercicio 2. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial
$\vec{X} = (u, u + v, uv), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x, y, z) = 4x + y^2 + z^2$ en el punto $(1, y_0, 1)$, con $y_0 < 0$.
Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

Ejercicio 3. Sea
$f(x, y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^2 + \frac{x^3}{3}$.
Halle los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

Ejercicio 4. Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe un $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ la ecuación $e^y z + xz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1 que cumple $h(-1, 0) = z_0$.
Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(-1.05, 0.1)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(-1, 0)$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar
$f(x, y) = \{ \frac{\operatorname{sen}(y^3) - x^3}{2x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ y halle los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 0), \check{v}) = 0$.

12/7/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = h(xy, x^2 + y^2)$ con $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que
$p(u, v) = 1 - 5v + 2u + 3v^2 - u^2 + uv$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en $(u_0, v_0) = (-1, 2)$.
Halle la máxima derivada direccional de f en $(1, -1)$ y determine el versor en el cual se produce ese valor.

Ejercicio 2. Sea C la curva contenida en la superficie Σ de ecuación vectorial $\vec{X} = (u, v, v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, cuya proyección ortogonal sobre el plano xy satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 2$, y sea $A = (1, -1, 1)$.
Halle una ecuación vectorial de la recta $r_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2$, donde Π_1 es el plano normal a C en A y Π_2 es el plano xz.

Ejercicio 3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y^2 - 2xy)e^x$, halle todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es paralelo al plano xy. Determine en cada uno de los puntos hallados si se produce un extremo local, indicando el tipo de extremo y su valor en caso afirmativo.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por
$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}, \ln(x - y^2 + 1))$,
donde D es el dominio natural de $\vec{f}$.
Determine y grafique los conjuntos D y H, donde H es el conjunto de puntos $(x, y) \in D$ para los cuales $\vec{f}(x, y)$ tiene alguna componente nula.

Ejercicio 5. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$ las ecuaciones
$z + z^3 + 3xy + 1 = 0 \wedge x^2 + y + z - 1 = 0$
definen funciones $y = g(x)$ y $z = h(x)$ que son de clase C^1 en un entorno de x_0. Calcule $g'(1)$ y $h'(1)$.

11/6/22, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)}}{x^2 - y^2},$$

y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.

Ejercicio 2. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2+3x+y^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

Ejercicio 3. Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xy + z = 0$ cuya proyección sobre el plano xy satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xy.

Ejercicio 4. Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - 2y, x^2 - y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3, 0)$ por la ecuación

$ue^{vw} - 2uw = 9$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u+v, u^2+v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = \sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

11/6/22, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xz - y = 0$ cuya proyección sobre el plano xz satisface la ecuación $x^2 + z^2 = 8$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xz.

Ejercicio 2. Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, x + 2y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase C^1 definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$ por la ecuación
$ve^{-uw} + 2vw = 9$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u-v, u^2-v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = -\sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

Ejercicio 4. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2+3y+x^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

Ejercicio 5. Sea
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)}}{y^2 - x^2},$$
y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.

21/5/22, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$. Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$.

Ejercicio 2. Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:
$\vec{X} = (uv, u^2 + v, u - v),\ u, v \in \mathbb{R}$
en el punto $(-1, 0, 2)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^3 = 0$ en el punto $(2, 2, -2)$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \alpha[e^{x-2} + \cos y] + \beta[xy - \operatorname{sen} y] + g(x, y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 13x - 5y$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (2, 0)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Ejercicio 4. Considere la función
$f(x, y) = \{ \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + 2y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto $(1, 1, 1)$, la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1. Calcule en forma aproximada $h(1.01, 0.98)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\check{v}$ que maximiza $h'((1, 1), \check{v})$.

21/5/22, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:
$\vec{X} = (v - u, v^2 + u, uv),\ u, v \in \mathbb{R}$
en el punto $(2, 0, -1)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^3 + y^2 + z^2 = 0$ en el punto $(-2, 2, 2)$.

Ejercicio 2. Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x, y) = (x^2y, 2x - y^2)$. Sabiendo que $h(-1, 1) = 2$ y que $\nabla h(-1, 1) = (4, -2)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, -3, f(1, -3))$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y) = \alpha[e^{y-2} + \cos x] - \beta[xy - \operatorname{sen} x] + g(x, y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x, y) = 4y^2 + 2xy + x^2 - 13y - 5x$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (0, 2)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Ejercicio 4. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto $(1, -1, -1)$, la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = -1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase C^1. Calcule en forma aproximada $h(0.98, -1.02)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\check{v}$ que maximiza $h'((1, -1), \check{v})$.

Ejercicio 5. Considere la función
$f(x, y) = \{ \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x}{2x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$.
Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.