Análisis Matemático II

Final, libre e integrador: exámenes reales, con resoluciones

Análisis Matemático II (61.03 / 81.01) · CB001

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; las resoluciones son nuestras. Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

14/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial	3
14/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial	6
7/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial	9
7/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial	13
29/6/26 (diferido)	16
27/6/26, tema 1	20
27/6/26, tema 2	23
11/5/26, tema 1 (diferido)	26
9/5/26, tema 1	29
9/5/26, tema 2	32
3/3/26 (integrador)	35
24/2/26 (recuperatorio)	39
24/2/26 (integrador)	42
10/2/26 (recuperatorio) · 1er parcial	45
10/2/26 (recuperatorio) · 2do parcial	48
16/12/25 (recuperatorio) · 1er parcial	51
16/12/25 (recuperatorio) · 2do parcial	54
6/12/25, tema 1	57
6/12/25, tema 2	60
18/10/25, tema 2	63
5/8/25 (recuperatorio)	66
5/8/25 (integrador)	69
15/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial	72
15/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial	75
8/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial	78
8/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial	81
30/6/25 (diferido)	84
28/6/25, tema 2	87
10/5/25, tema 1	90
10/5/25, tema 2	93
25/2/25, tema 1 (integrador)	96
25/2/25, tema 2 (integrador)	99
18/2/25, tema 2 (integrador)	102
11/2/25, tema 2 (integrador)	105
17/12/24, tema 2 (integrador)	108
10/12/24, tema 1 (recuperatorio)	111
10/12/24, tema 1 (integrador)	114
10/12/24, tema 2 (integrador)	117
9/11/24, tema 1 (recuperatorio)	120
21/10/24, tema 1 (diferido)	123
19/10/24, tema 1	126
19/10/24, tema 2	129
13/8/24, tema 1 (integrador)	132
13/8/24, tema 2 (integrador)	135
6/8/24, tema 1 (integrador)	138
30/7/24, tema 1 (integrador)	141
30/7/24, tema 2 (integrador)	144
10/7/24, tema 2 (integrador)	147
2/7/24, tema 1 (recuperatorio)	151
2/7/24, tema 1 (integrador)	154
3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)	157
1/6/24, tema 1 (recuperatorio)	160
1/6/24, tema 2 (recuperatorio)	163
13/5/24, tema 1 (diferido)	166
11/5/24, tema 1	169
5/3/24, tema 2 (integrador)	172
29/2/24 (libre)	175
27/2/24, tema 1 (integrador)	178
27/2/24, tema 2 (integrador)	182
20/2/24, tema 2 (integrador)	186

14/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar
$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$,
Halle y clasifique los puntos críticos de f siendo
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 2, y < 1\}$.

> **Respuesta:** En D hay tres puntos críticos: (1, 0) mínimo local con f(1, 0) = −2; (−1, 0) máximo local con f(−1, 0) = 2; (0, −√3) punto silla. El punto (0, √3) también anula el gradiente pero no está en D (√3 > 1).
>
> **Planteo:** $D = \{|x| < 2, y < 1\}$ es abierto y f es polinómica (C^∞), así que los candidatos a extremo local en D son los puntos de D donde $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 - 3 + y^2$, $f_y = 2xy$.
> **Sistema:** $f_y = 0$ da x = 0 o y = 0. Si x = 0: $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$. Si y = 0: $3x^2 = 3$, $x = \pm 1$. Candidatos: (1, 0), (−1, 0), (0, √3), (0, −√3).
> **¿Están en D?** (±1, 0): $|\pm 1| < 2$ y $0 < 1$, sí. (0, −√3): $-\sqrt{3} < 1$, sí. (0, √3): $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ no es menor que 1, **queda afuera** y no se clasifica.
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 2y$, $f_{yy} = 2x$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
> **(1, 0):** $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 12 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local, f(1, 0) = −2**.
> **(−1, 0):** $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det = 12 > 0$, $f_{xx} = -6 < 0$: **máximo local, f(−1, 0) = 2**.
> **(0, −√3):** $H = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -12 < 0$: **punto silla** (f(0, −√3) = 0).
> **Trampa:** clasificar (0, √3) como si fuera de D. El enunciado restringe el dominio justamente para que lo descartes, y hay que decirlo explícitamente.

Ejercicio 2. Sean $p(u, v) = 2 - u + v + uv - v^2$ el polinomio de Taylor de segundo orden en (0, 1) de $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, y $\vec{f}(x, y) = (e^{x-y} - 1, x + y + 1)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $h = g \circ \vec{f}$ en (0, 0, h(0, 0)).

> **Respuesta:** g(0, 1) = 2, $\nabla g(0, 1) = (0, -1)$; h(0, 0) = 2, $\nabla h(0, 0) = (-1, -1)$. Plano tangente: x + y + z = 2.
>
> **Punto imagen:** $\vec{f}(0, 0) = (e^0 - 1, 0 + 0 + 1) = (0, 1)$, donde está centrado el Taylor de g.
> **Qué da el Taylor:** $g \in C^3$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. h(0, 0) = g(0, 1) = p(0, 1) = 2 − 0 + 1 + 0 − 1 = **2**. $\nabla p(u, v) = (-1 + v, 1 + u - 2v)$, y en (0, 1): **$\nabla g(0, 1) = (0, -1)$**.
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es C^1 (exponencial y polinomio) y g es C^3, en particular diferenciable en (0, 1). Entonces $h = g \circ \vec{f}$ es diferenciable en (0, 0) y vale la regla de la cadena.

Cadena: $\vec{Df}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, en (0, 0): $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(0, 0) = (0, -1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = **(–1, –1)**.

Plano tangente: h es diferenciable en (0, 0), así que su gráfico tiene plano tangente $z = h(0, 0) + h'_x(0, 0)\cdot x + h'_y(0, 0)\cdot y = 2 - x - y$, o sea **x + y + z = 2**.

Trampa: tomar $\nabla g(0, 1) = (-1, 1)$ leyendo los coeficientes lineales de p. p está escrito en u, v, no en u y (v – 1): hay que derivar y evaluar en (0, 1).

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $x + e^{xy-1} + z^2 = 3$ define implícitamente a x = f(y, z) en un entorno de $(x_0, y_0.z_0) = (1, 1, 1)$, con f de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales la derivada direccional de la función $h(y, z) = y^2 + yz + f(y, z)$ en el punto (1, 1) sea nula.

Respuesta: $\nabla f(1, 1) = (-1/2, -1)$; $\nabla h(1, 1) = (5/2, 0)$; $\check{v} = (0, 1)$ y $\check{v} = (0, -1)$.

Planteo: $F(x, y, z) = x + e^{xy-1} + z^2 - 3$; se despeja x. (El punto impreso dice $(x_0, y_0.z_0)$: es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.)

Punto: $F(1, 1, 1) = 1 + e^0 + 1 - 3 = 0$. ✓

Derivadas de F: $F'_x = 1 + ye^{xy-1}$, $F'_y = xe^{xy-1}$, $F'_z = 2z$. En (1, 1, 1): $F'_x = 2$, $F'_y = 1$, $F'_z = 2$.

Hipótesis del TFI: (i) F(1, 1, 1) = 0; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_x(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Entonces x = f(y, z) es C^1 cerca de (1, 1), con $f(1, 1) = 1$, $f_y(1, 1) = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -1/2$ y $f_z(1, 1) = -\dfrac{F'_z}{F'_x} = -2/2 = -1$.

Gradiente de h: $h = y^2 + yz + f(y, z)$ es suma de un polinomio y una función C^1, así que es C^1 y diferenciable en (1, 1). $h_y = 2y + z + f_y = 2 + 1 - 1/2 = 5/2$; $h_z = y + f_z = 1 - 1 = 0$. $\nabla h(1, 1) = (5/2, 0)$.

Versores: por ser h diferenciable, $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1)\cdot\check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $(5/2)a + 0\cdot b = 0$, o sea a = 0 y b = ±1. **$\check{v}$ = (0, 1)** y **$\check{v}$ = (0, –1)**.

Trampa: el orden de las variables de h es (y, z): las componentes del versor son (dirección en y, dirección en z). Y no te olvides del término yz al derivar respecto de z (aporta y = 1, que cancela $f_z = -1$).

Ejercicio 4. Sean S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ y C la curva intersección entre S y Π: x + y = 1. Encuentre el o los puntos de C en los cuales la recta tangente a la curva es paralela al plano de ecuación x – z = 0.

Respuesta: Un punto: P = (1/4, 3/4, 3/8).

Planteo: la recta tangente es paralela al plano x – z = 0 cuando su dirección es perpendicular a la normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

Parametrización de C: con x = t, el plano da y = 1 – t y la superficie $z = 1 - x^2 - y^2 = 1 - t^2 - (1 - t)^2 = 2t - 2t^2$. Queda $\vec{g}(t) = (t, 1 - t, 2t - 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.

Tangente: $\vec{g}'(t) = (1, -1, 2 - 4t) \neq \vec{0}$ para todo t: curva regular.

Condición: $g'(t)\cdot(1, 0, -1) = 1 - (2 - 4t) = 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/4$.

Resultado: $P = \vec{g}(1/4) = (1/4, 3/4, 1/2 - 1/8)$ = **(1/4, 3/4, 3/8)**, con dirección tangente (1, –1, 1). Control: 1 – 1 = 0 ✓; P cumple 1/16 + 9/16 + 3/8 = 1 y 1/4 + 3/4 = 1 ✓. Como x – z = 1/4 – 3/8 = –1/8 ≠ 0, la recta es paralela y no está contenida en el plano.

Con gradientes: $\nabla(x^2 + y^2 + z) \times \nabla(x + y) = (2x, 2y, 1) \times (1, 1, 0) = (-1, 1, 2x - 2y)$. Su producto escalar con (1, 0, –1) es $-1 - 2x + 2y = 0$, que junto con x + y = 1 da x = 1/4: el mismo punto.

Trampa: plantear tangente ∥ (1, 0, –1), que es la condición de recta perpendicular al plano.

Ejercicio 5. Dado el campo escalar

$f(x, y) = \sqrt{(\ln(2x - y + 4))}$

a) Determine gráfica y analíticamente el dominio natural D de f.

b) Grafique por separado el interior y la frontera de

$T = \{(x, y) \in D \,/\, f^2(x, y) < \ln 5\}$.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y \leq 2x + 3\}$: el semiplano cerrado por debajo de la recta $y = 2x + 3$, con la recta incluida. b) $T = \{2x - 1 < y \leq 2x + 3\}$, franja entre dos rectas paralelas (la de arriba incluida, la de abajo no). Interior: la franja abierta $2x - 1 < y < 2x + 3$. Frontera: las dos rectas completas $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 3$.
>
> **a) Condiciones:** el ln pide $2x - y + 4 > 0$. La raíz pide $\ln(2x - y + 4) \geq 0$, y como ln es creciente con $\ln 1 = 0$, eso es $2x - y + 4 \geq 1$, o sea $y \leq 2x + 3$.
> **Dominio:** la segunda condición implica la primera (si el argumento es ≥ 1, es > 0), así que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x + 3\}$.
> **Gráfico:** la recta $y = 2x + 3$ (pendiente 2, corta los ejes en $(0, 3)$ y $(-3/2, 0)$) en trazo lleno y todo el semiplano de abajo a la derecha sombreado; contiene al origen ($\ln 4 \geq 0$). Sobre la recta f vale $\sqrt{(\ln 1)} = 0$, por eso la recta pertenece. Es un conjunto cerrado, no acotado y conexo (convexo), que no es abierto.
> **b) Planteo:** en D, $f \geq 0$ y $f^2 = \ln(2x - y + 4)$. Entonces $f^2 < \ln 5 \Leftrightarrow \ln(2x - y + 4) < \ln 5 \Leftrightarrow 2x - y + 4 < 5$ (ln estrictamente creciente) $\Leftrightarrow y > 2x - 1$.
> **El conjunto:** $T = \{(x, y) : 2x - 1 < y \leq 2x + 3\}$: la franja entre las rectas paralelas $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 3$, con la de arriba incluida y la de abajo excluida.
> **Interior (un gráfico):** $\text{int } T = \{2x - 1 < y < 2x + 3\}$, la franja con los dos bordes en punteado. Cada punto con las dos desigualdades estrictas tiene una bola dentro de T, porque $g(x, y) = y - 2x$ es continua y $\{-1 < g < 3\}$ es abierto; un punto de $y = 2x + 3$ no es interior, porque toda bola centrada en él tiene puntos con $y > 2x + 3$, que no están en T.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial T = \{y = 2x - 1\} \cup \{y = 2x + 3\}$, las dos rectas enteras en trazo lleno. Toda bola centrada en un punto de cualquiera de las dos tiene puntos de T (del lado de la franja) y puntos que no son de T (del otro lado). Notá que la recta de abajo es frontera aunque no pertenezca a T.
> **Trampa:** al despejar, $2x - y + 4 < 5$ da $-y < 1 - 2x$ y, al multiplicar por -1, se da vuelta: $y > 2x - 1$. Y no confundas interior con T: T no es abierto (le sobra la recta de arriba) ni cerrado (le falta la de abajo).

14/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (z + y, x + z + 3y^2, x + y)$.
a) Pruebe que $\vec{f}$ es campo de gradientes y halle una función potencial.
b) Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, con
C: $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, $x \geq 0$,
recorrida de modo tal que la coordenada y resulta creciente.

> **Respuesta:** a) $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3$, $U = xy + yz + xz + y^3$. b) C va de $(0, -2, 2)$ a $(0, 2, 2)$; $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 24$.
>
> **a) Hipótesis:** $\vec{f} = (P, Q, R) = (z + y, x + z + 3y^2, x + y)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$.
> **Rotor:** $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = \vec{0}$. Como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, $\vec{f}$ es de gradientes.
> **Potencial:** $U'_x = z + y \Rightarrow U = xz + xy + a(y, z)$. $U'_y = x + a'_y = x + z + 3y^2 \Rightarrow a = yz + y^3 + b(z)$. $U'_z = x + y + b'(z) = x + y \Rightarrow b$ constante. **$U = xy + yz + xz + y^3$** (más cualquier constante).
> **b) La curva:** cilindro $x^2 + y^2 = 4$ cortado por el plano $z = 2 - x$, con $x \geq 0$: media elipse. $\vec{X}(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ($x = 2 \cos t \geq 0$). Como $y' = 2 \cos t \geq 0$, y crece con t: se recorre de $\vec{X}(-\pi/2) = (0, -2, 2)$ a $\vec{X}(\pi/2) = (0, 2, 2)$.
> **Cuenta:** $U(0, 2, 2) = 0 + 4 + 0 + 8 = 12$; $U(0, -2, 2) = 0 - 4 + 0 - 8 = -12$.
> **Resultado:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 12 - (-12) = \mathbf{24}$.
> **Trampa:** en a) no alcanza con $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$: hay que decir que $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo (o exhibir el potencial, como hicimos). En b), C es un arco abierto, no da 0.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por $(1, 0)$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^{x^2} - 3y, \cos^2(y) + x)$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el versor tangente a Γ en $(1, 0)$ sea $(0, -1)$.

> **Respuesta:** Γ: $x^2 + y^2/4 = 1$ en sentido horario. $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8\pi$.
>
> **Línea de campo:** $\vec{g} = (y, -4x)$. Donde $y \neq 0$, $y' = \dfrac{-4x}{y} \Rightarrow y\,dy = -4x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -2x^2 + c \Rightarrow$ **$4x^2 + y^2 = K$**. Por $(1, 0)$: $K = 4$. Control: $\nabla(4x^2 + y^2) \cdot \vec{g} = (8x, 2y) \cdot (y, -4x) = 0$, así que $\vec{g}$ es tangente a toda la elipse, también en $(1, 0)$ ($\vec{g}$ sólo se anula en el origen). Γ: $\mathbf{x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1}$, cerrada, semiejes 1 en x y 2 en y.
> **Orientación:** en $(1, 0)$, el punto más a la derecha, el versor tangente es $(0, -1)$: la curva baja por la derecha, o sea **sentido horario** (negativo). Parametrización compatible: $r(t) = (\cos t, -2 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, con $r'(0) = (0, -2)$, cuyo versor es $(0, -1)$ ✓ (coincide con $\vec{g}(1, 0) = (0, -4)$).
> **Hipótesis de Green:** $P = e^{x^2} - 3y$, $Q = \cos^2(y) + x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; $D = \{x^2 + y^2/4 \leq 1\}$ es regular y Γ es su borde, cerrado, simple y C^1. $Q'_x = 1$, $P'_y = -3$, **$Q'_x - P'_y = 4$**. Como Γ es horaria, $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 4\,dA = -4 \cdot \text{área}(D) = -4 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 = -8\pi$.
> **Cara directa:** $e^{x^2}\,dx$ y $\cos^2(y)\,dy$ son exactas (dependen de una sola variable), así que en la curva cerrada no aportan. Queda $\oint -3y\,dx + x\,dy$ con $r(t)$: $-3(-2 \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t\,(-2 \cos t) = -6 \operatorname{sen}^2 t - 2 \cos^2 t$, y $\int_0^{2\pi} (-6 \operatorname{sen}^2 t - 2 \cos^2 t)\,dt = -6\pi - 2\pi = -8\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-8\pi}$.
> **Trampa:** el versor $(0, -1)$ en $(1, 0)$ fija sentido horario; si aplicás Green sin el signo menos te da 8π.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo
H: $1 \le z \le 5 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 32\pi k/3$ ($k > 0$ la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$; hay que describir H, escribir la densidad y elegir coordenadas.
> **El sólido:** $z = 5 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono circular de eje z con vértice en (0, 0, 5) que abre hacia abajo. H es lo que queda debajo del cono y arriba del plano $z = 1$. Se cortan donde $5 - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 1$, o sea sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ a altura 1. Sin las otras condiciones sería un cono macizo de altura 4 y radio de base 4 (base en $z = 1$, vértice en (0, 0, 5)); $x \ge 0$, $y \ge 0$ se queda con el cuarto del primer octante. Cada corte horizontal a altura z es un cuarto de disco de radio $5 - z$.
> **Densidad:** la distancia de (x, y, z) al plano xy es $|z| = z$ (en H, $z \ge 1 > 0$): $\delta(x, y, z) = kz$, con $k > 0$ la constante de proporcionalidad.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $x \ge 0$ e $y \ge 0$ equivalen a $0 \le \theta \le \pi/2$; $\sqrt{(x^2 + y^2)} = r$, así que $1 \le z \le 5 - r$, que sólo tiene puntos si $5 - r \ge 1$, o sea $0 \le r \le 4$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_1^{5-r} z\, r\, dz\, dr\, d\theta$. Primitiva en z: $\frac{z^2}{2}$, entre 1 y $5 - r$: $\frac{r[(5-r)^2 - 1]}{2} = \frac{24r - 10r^2 + r^3}{2}$. Primitiva en r: $\frac{1}{2}(12r^2 - \frac{10r^3}{3} + \frac{r^4}{4})$, entre 0 y 4: $\frac{1}{2}(192 - \frac{640}{3} + 64) = \frac{1}{2} \cdot \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$. La integral en θ da $\pi/2$.
> **Resultado:** $M = k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{64}{3} = \mathbf{\frac{32\pi k}{3}}$.
> **Control (otro orden, por cortes horizontales):** para cada $z \in [1, 5]$, $0 \le r \le 5 - z$: $M = k\int_0^{\pi/2} \int_1^5 \int_0^{5-z} z\, r\, dr\, dz\, d\theta = k\frac{\pi}{2} \int_1^5 \frac{z(5-z)^2}{2}\, dz$. Con $u = 5 - z$: $\int_0^4 \frac{(5-u)u^2}{2}\, du = \frac{1}{2}(\frac{320}{3} - 64) = \frac{64}{3}$, y otra vez $M = \frac{32\pi k}{3}$ ✓.
> **Trampa:** tomar r de 0 a 5 (eso es el cono hasta $z = 0$, no hasta el plano $z = 1$), usar como densidad la distancia al origen o al eje z, o perder el r del jacobiano.

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie Σ: $z + y^2 = 5$, $y \ge 0$, $0 \le x \le 2$, $z \ge 1$.
Indique en un gráfico las orientaciones utilizadas en el cálculo.

> **Respuesta:** Normal de Σ hacia arriba, $\vec{N} = (0, 2y, 1)$, y borde recorrido $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. Con las dos orientaciones invertidas, -4.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x + z$, $Q = y^2 - xy$, $R = y + z^2$: polinomios, $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
> **La superficie y su borde:** Σ es el trozo del cilindro parabólico $z = 5 - y^2$ con $z \ge 1$ (o sea $y^2 \le 4$, y como $y \ge 0$, $0 \le y \le 2$) y $0 \le x \le 2$: el gráfico de $z = 5 - y^2$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ del plano xy. Su borde C tiene cuatro tramos: C_1 segmento $y = 0$, $z = 5$, de (0, 0, 5) a (2, 0, 5); C_2 arco de parábola $z = 5 - y^2$ en $x = 2$, de (2, 0, 5) a (2, 2, 1); C_3 segmento $y = 2$, $z = 1$, de (2, 2, 1) a (0, 2, 1); C_4 arco de parábola en $x = 0$, de (0, 2, 1) a (0, 0, 5). Es cerrada y suave a trozos.
> **Superficie elegida:** el borde no está en un plano, así que no hay un trozo de plano que lo tenga como borde; la propia Σ es la cómoda: un gráfico C^1 sobre un rectángulo, suave y orientable. Con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor.
> **Orientación:** tomo $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2y, 1)$, que apunta hacia arriba (tercera componente positiva).

Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia arriba los dedos giran en sentido antihorario visto desde arriba, así que el borde se recorre de modo que su proyección da la vuelta a R en sentido antihorario: **C_1 → C_2 → C_3 → C_4**, es decir (0, 0, 5) → (2, 0, 5) → (2, 2, 1) → (0, 2, 1) → (0, 0, 5). En el gráfico van las dos orientaciones: la normal $\vec{N}$ dibujada sobre Σ apuntando hacia arriba (hacia el lado de z grande) y las flechas del borde en ese orden.
Rotor: $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 0, 1 - 0, -y - 0) =$ **(1, 1, –y)**.
Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2y + (-y) \cdot 1 = y$. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \int_0^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 [y^2/2]_0^2 \, dx = \int_0^2 2 \, dx = 4$.
Resultado: recorriendo (0, 0, 5) → (2, 0, 5) → (2, 2, 1) → (0, 2, 1) → (0, 0, 5), $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$ (en el sentido contrario, –4).
Control: tramo por tramo, C_1 da 12, C_2 da –48, C_3 da –4 y C_4 da 44: suman 4.
Trampa: la normal de $z = 5 - y^2$ es (0, 2y, 1), no (0, 0, 1): el término 2y se multiplica con la segunda componente del rotor y con (0, 0, 1) te daría –4. Fijate que se piden las dos orientaciones en el gráfico: la de Σ (la normal) y la de C, y tienen que ser compatibles.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 3$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + y^2, y - z^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

Respuesta: $\nabla \cdot \vec{f} = 3$; vol(H) = 9/2; flujo con normales hacia el interior = –27/2.

Planteo: H es el tetraedro limitado por $x + y + z = 3$ y los tres planos coordenados: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3 - x$, $0 \le z \le 3 - x - y$. ∂H son cuatro triángulos: superficie cerrada y suave a trozos.
Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (x + y^2, y - z^2, z)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior, $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}_{ext} \, d\sigma = \iiint_H \nabla \cdot \vec{f} \, dV$; el enunciado pide normales hacia el interior, así que el flujo pedido es menos esa triple.
Divergencia: $\partial/\partial x(x + y^2) + \partial/\partial y(y - z^2) + \partial/\partial z(z) = 1 + 1 + 1 =$ **3**.
Volumen: $\int_0^3 \int_0^{3-x} (3 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^3 \frac{(3 - x)^2}{2} \, dx = \left[-\frac{(3 - x)^3}{6}\right]_0^3 = \frac{3^3}{6} = \frac{9}{2}$.
Cuenta: flujo saliente $= 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$.
Resultado: con normales hacia el interior, **flujo = –27/2**.
Trampa: el signo (normales interiores). Los términos y^2 y z^2 no aportan a la divergencia: y^2 está en la primera componente y se deriva respecto de x, z^2 está en la segunda y se deriva respecto de y.

7/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar $f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$,

a) analice su continuidad en el origen;
b) calcule la derivada parcial respecto de x en (0, 0).

> **Respuesta:** a) No es continua en (0, 0): por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = x$ es 2. b) $f'_x(0, 0) = 0$.
>
> **a) Planteo:** f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Probamos con caminos.
> **Por el eje x** ($y = 0$, $x \neq 0$): $f(x, 0) = 0/x^2 = 0 \to 0$.
> **Por la recta y = x** ($x \neq 0$): $f(x, x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x^4} = \dfrac{2}{1 + x^2} \to 2$.
> **Conclusión:** dos caminos que llegan al origen dan límites diferentes (0 y 2), el límite doble no existe y f **no es continua** en el origen. (Por la parábola $x = y^2$ es peor todavía: $f(y^2, y) = 2y^3/(2y^4) = 1/y$, que no está acotada.)
>
> **b) Por definición:** para $h \neq 0$, $f(h, 0) = (2\cdot h\cdot 0)/(h^2 + 0) = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$
> $= \lim_{h\to 0} \dfrac{0 - 0}{h} = \mathbf{0}$.
> **Trampa:** que f no sea continua no impide que exista la derivada parcial: la parcial respecto de x sólo usa los valores sobre el eje x. Y no la calcules derivando la fórmula de $(x, y) \neq (0, 0)$ y evaluando en el origen: allí la fórmula no vale (daría 0/0).

Ejercicio 2. Sea Σ_1 el conjunto de nivel de $F(x, y, z) = \ln(xy^2) + z^3$ que contiene al punto $P = (1, -1, 1)$ y sea Σ_2 la superficie parametrizada por $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano normal a $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en P.

> **Respuesta:** Plano normal: **3x + 9y + 5z = −1** (tangente a C en P paralela a (3, 9, 5)).
>
> **Planteo:** $F(P) = \ln(1\cdot 1) + 1 = 1$, así que Σ_1: $\ln(xy^2) + z^3 = 1$. F es C^1 donde $xy^2 > 0$ ($x > 0$, $y \neq 0$), que es un entorno de P. El plano normal a C en P tiene como normal al vector tangente a C.
> **Normal a Σ_1:** $\nabla F = (1/x, 2/y, 3z^2) \to \nabla F(P) = (1, -2, 3) \neq \vec{0}$.
> **Parámetros de P en Σ_2:** $u + v = -1$ y $u - v = 1 \Rightarrow u = 0$, $v = -1$; control: $u + v^2 = 1$ ✓.
> **Normal a Σ_2:** $\vec{\Gamma}_u = (1, 1, 1)$, $\vec{\Gamma}_v = (2v, 1, -1) \to (-2, 1, -1)$. $\vec{N} = \vec{\Gamma}_u \times \vec{\Gamma}_v = (1\cdot(-1) - 1\cdot 1, 1\cdot(-2) - 1\cdot(-1), 1\cdot 1 - 1\cdot(-2))$ $= (-2, -1, 3) \neq \vec{0}$: Σ_2 es regular en P.
> **Tangente a C:** $\vec{T} = \nabla F(P) \times \vec{N} = (1, -2, 3) \times (-2, -1, 3) = ((-2)\cdot 3 - 3\cdot(-1), 3\cdot(-2) - 1\cdot 3, 1\cdot(-1) - (-2)(-2)) =$ $(-3, -9, -5) \parallel (3, 9, 5)$. Es no nulo (las normales no son paralelas), así que C es regular en P.
> **Plano normal:** $3(x - 1) + 9(y + 1) + 5(z - 1) = 0$, o sea **3x + 9y + 5z = −1**. Control: P da $3 - 9 + 5 = -1$ ✓.
> **Control de la normal a Σ_2:** despejando $u = (y + z)/2$ y $v = (y - z)/2$, Σ_2 es $x = (y + z)/2 + (y - z)^2/4$; el gradiente de $x - (y + z)/2 - (y - z)^2/4$ en P es $(1, 1/2, -3/2) \parallel (2, 1, -3) \parallel \vec{N}$ ✓.
> **Trampa:** evaluar $\vec{\Gamma}_v$ en las coordenadas de P en lugar de en $(u, v) = (0, -1)$; o dar como plano normal el que tiene normal ∇F (ese es el plano tangente a Σ_1).

Ejercicio 3. a) Demuestre que la ecuación $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (1, 0, z_0)$.
b) Calcule los versores para los cuales la derivada direccional de $h = f \circ \vec{g}$ en el punto $(1, 1)$ se anula. Considere la función f del inciso anterior y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$.

> **Respuesta:** a) $z_0 = 1$ (único); F es C^1 cerca de $(1, 0, 1)$ y $F'_z(1, 0, 1) = 2 \neq 0$, así que $z = f(u, v)$ existe y es C^1, con $\nabla f(1, 0) = (1, -1/2)$. b) $\nabla h(1, 1) = (2, 3/2)$; $h'((1, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = (3/5, -4/5)$ y $\check{v} = (-3/5, 4/5)$.
>
> **a) Planteo:** llamamos $F(u, v, z) = z - u^2 + v^2 + \ln(v + z)$. El punto viene con z_0 sin dar: sale de pedir $F(1, 0, z_0) = 0$, o sea $z_0 - 1 + \ln z_0 = 0$.
> **Cálculo de z_0:** la función $\varphi(z) = z + \ln z - 1$ está definida para $z > 0$ y es estrictamente creciente ($\varphi'(z) = 1 + 1/z > 0$), así que tiene a lo sumo una raíz; como $\varphi(1) = 0$, **$z_0 = 1$** y es el único.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(1, 0, 1) = 1 - 1 + 0 + \ln 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{v + z > 0\}$ (suma de polinomios y del logaritmo de algo positivo), que contiene al punto porque $v_0 + z_0 = 1 > 0$, así que F es C^1 en un entorno. (3) $F'_z = 1 + \dfrac{1}{v + z}$, que en $(1, 0, 1)$ vale $1 + 1 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe una única $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$ y $F(u, v, f(u, v)) = 0$.
> **Derivadas de f en (1, 0):** $F'_u = -2u \to -2$; $F'_v = 2v + \dfrac{1}{v + z} \to 0 + 1 = 1$. Por el TFI, $f'_u(1, 0) = -F'_u/F'_z = -(-2)/2 = 1$ y $f'_v(1, 0) = -1/2$. $\nabla f(1, 0) = (1, -1/2)$.
> **b) Planteo:** $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$ con $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$. Primero chequeamos que la composición caiga donde f está definida: $\vec{g}(1, 1) = (1 \cdot 1, 1 - 1) = (1, 0)$ ✓, justo el punto del inciso a).
> **Hipótesis de la regla de la cadena:** $\vec{g}$ es polinómica, diferenciable en $(1, 1)$; f es C^1 en un entorno de $(1, 0)$, por lo tanto diferenciable en $(1, 0)$. Entonces h es diferenciable en $(1, 1)$ y $Dh(1, 1) = Df(1, 0) \cdot D\vec{g}(1, 1)$.
> **Jacobiana de $\vec{g}$:** $D\vec{g} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$, que en $(1, 1)$ da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
> **Cuenta:** $\nabla h(1, 1) = (1, -1/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + (-1/2)(-2), 1 \cdot 2 + (-1/2) \cdot 1) =$ **$(2, 3/2)$**.
> **Versores:** como h es diferenciable, $h'((1, 1), \check{v}) = \nabla h(1, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $2a + (3/2)b = 0$, o sea $4a + 3b = 0$, $b = -4a/3$; normalizando, $a^2 + 16a^2/9 = 1$, $a = \pm 3/5$. Quedan **$\check{v} = (3/5, -4/5)$** y **$\check{v} = (-3/5, 4/5)$**.
> **Trampa:** son dos versores (opuestos), no uno. Y la fórmula $\nabla h \cdot \check{v}$ sólo vale porque h es diferenciable: hay que decirlo, no alcanza con que existan las parciales.

Ejercicio 4. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ y determine si allí se producen extremos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: $(0, 0)$, punto silla (no hay extremo); $(1/6, -1/12)$, mínimo local con $f(1/6, -1/12) = -1/432$.
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞ en $\mathbb{R}^2$), así que los extremos locales sólo pueden estar donde $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 + y$, $f_y = x + 2y$.
> **Sistema:** de $f_y = 0$, $x = -2y$. En $f_x = 0$: $3 \cdot 4y^2 + y = y(12y + 1) = 0$, así que $y = 0$ (y entonces $x = 0$) o $y = -1/12$ (y entonces $x = 1/6$). **Puntos: $(0, 0)$ y $(1/6, -1/12)$.**
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si

det H = 0 el criterio no decide.

(0, 0): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, det = –1 < 0: **punto silla**, no hay extremo.

(1/6, –1/12): $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, det = 2 – 1 = 1 > 0 y $f_{xx} = 1 > 0$: **mínimo local**. Valor: f = 1/216 + (1/6)(–1/12) + 1/144 = 2/432 – 6/432 + 3/432 = **–1/432**.

Trampa: perder la solución y = 0 (y con ella el punto crítico (0, 0), que es la silla) por dividir por y en y(12y + 1) = 0. Factorizá siempre en lugar de simplificar.

Ejercicio 5. Grafique el dominio natural del campo $\vec{f}(x, y) = (\ln(x^2 - y), \sqrt{(1 - x^2 - \frac{y^2}{4})})$; indique si es abierto, cerrado, conexo y/o acotado y represente su frontera en otro gráfico.

Respuesta: D = {(x, y) : $y < x^2$, $x^2 + y^2/4 \leq 1$}: la elipse llena de semiejes 1 (en x) y 2 (en y) sin la parte que queda sobre o arriba de la parábola $y = x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo y es acotado. Frontera: el arco de la elipse con $y \leq x^2$ (de $(-x_0, y_0)$ a (x_0, y_0) pasando por (–1, 0), (0, –2) y (1, 0)) más el arco de parábola $y = x^2$ con $|x| \leq x_0$, donde $y_0 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$ y $x_0 = \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)} \approx 0{,}91$. Pertenece a D el arco de elipse salvo sus dos extremos; el arco de parábola no.

Condiciones: el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de sus dos componentes. $\ln(x^2 - y)$ pide $x^2 - y > 0$, o sea $y < x^2$. $\sqrt{(1 - x^2 - y^2/4)}$ pide $1 - x^2 - y^2/4 \geq 0$, o sea $x^2 + y^2/4 \leq 1$ (acá la raíz no divide, así que el borde entra).

Dominio: D = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$: $y < x^2$, $x^2 + y^2/4 \leq 1$}.

Cortes: con $y = x^2$ en la elipse: $y + y^2/4 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \pm 2\sqrt{2}$. Como $y = x^2 \geq 0$, sirve $y_0 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}83$, con $x = \pm x_0$, $x_0 = \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)} \approx 0{,}91$.

Gráfico de D: la elipse de centro (0, 0) con vértices (±1, 0) y (0, ±2), parada (más alta que ancha). La parábola $y = x^2$ le "muerde" la parte de arriba: de la elipse se saca la copa que queda adentro de la parábola, que contiene al origen y al vértice (0, 2). Lo que queda es la elipse sin esa copa: toda la mitad inferior (si y < 0, seguro $y < x^2$) más dos "orejas" a los costados que suben hasta los puntos de corte. El arco de elipse que bordea a D va en trazo lleno; el arco de parábola, en punteado; el origen no está en D (0 < 0 es falso).

Abierto: no. (0, –2) ∈ D (cumple 0 + 1 ≤ 1 y –2 < 0), pero toda bola centrada en él tiene puntos con y > –2, fuera de la elipse: no es interior.

Cerrado: no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como (0, –ε), y él mismo no está en D) y no pertenece a D.

Acotado: sí: D está dentro de la elipse, así que $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 2$.

Conexo: sí. La parte $E = \{x^2 + y^2/4 \leq 1, y < 0\}$ está en D y es convexa (elipse ∩ semiplano). Cualquier otro punto (x, y) de D con $|x| < 1$ se une con E bajando en vertical hasta $(x, -\sqrt{(1 - x^2)})$: el segmento queda en la elipse (los cortes verticales de la elipse son intervalos) y debajo de la parábola (al bajar, y sigue siendo $< x^2$). Los puntos (±1, 0) se unen primero en horizontal con (±1/2, 0) ∈ D. Así D es arcoconexo.

Frontera (otro gráfico): $\partial D = \{x^2 + y^2/4 = 1, y \leq x^2\} \cup \{y = x^2, |x| \leq x_0\}$: el arco de la elipse que va de $(-x_0, y_0)$ a (x_0, y_0) por abajo (pasando por (–1, 0), (0, –2) y (1, 0)), cerrado por el arco de parábola que pasa por el origen. Es una curva cerrada. Pertenecen a D los puntos del arco de elipse salvo los dos extremos $(\pm x_0, y_0)$, que están sobre la parábola; no pertenece ningún punto del arco de parábola. El arco de elipse de arriba ($y > x^2$) **no** es frontera: cerca de él no hay puntos de D.

> **Trampa:** dibujar la frontera como "elipse + parábola enteras". La copa de la elipse que quedó afuera y los pedazos de parábola fuera de la elipse no tocan a D.

7/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el volumen del cuerpo H: $2y \le z \le 3 - x^2 - y^2$.

> **Respuesta:** $V(H) = 8\pi$.
>
> **Planteo:** $V = \iiint_H dV$ con piso el plano $z = 2y$ y techo el paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$.
> **El cuerpo:** $z = 3 - x^2 - y^2$ es un paraboloide con vértice $(0, 0, 3)$ que abre hacia abajo; $z = 2y$ es un plano inclinado que contiene al eje x. El plano corta al paraboloide y entre los dos encierran un sólido acotado: la tapa del paraboloide que queda por encima del plano.
> **Dónde se cortan (sombra):** $2y = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4$. La curva intersección es una elipse en el plano $z = 2y$, y su proyección sobre xy es la circunferencia de centro $(0, -1)$ y radio 2. La sombra D es el disco $x^2 + (y + 1)^2 \le 4$, y adentro la altura techo − piso es $3 - x^2 - y^2 - 2y = 4 - x^2 - (y + 1)^2 \ge 0$, así que el plano queda abajo.
> **Coordenadas:** polares centradas en $(0, -1)$: $x = r\cos\theta$, $y = -1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r (una traslación no cambia el jacobiano de polares). Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, y z va de $2y = -2 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta$ hasta $3 - x^2 - y^2 = 2 + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta - r^2$. La diferencia es $4 - r^2$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva de $4r - r^3$: $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. En θ: 2π.
> **Resultado: $V = 8\pi$.**
> **Control:** en cartesianas, $V = \int_{-2}^{2}\int_{-1-\sqrt{(4-x^2)}}^{-1+\sqrt{(4-x^2)}} (3 - x^2 - y^2 - 2y)\, dy\, dx$ también da 8π. Y es el volumen de un paraboloide $z = h - r^2$ de altura $h = 4$ cortado en su base de radio 2: $\frac{\pi}{2}\cdot 2^4 = 8\pi$ ✓.
> **Trampa:** la sombra no es un disco centrado en el origen: hay que completar cuadrados. Usar polares comunes con $r \le 2$ (o con $r \le \sqrt{3}$, donde el paraboloide corta $z = 0$) da otra región. Y el piso es el plano $z = 2y$, no $z = 0$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(x) - y^2,\ xy + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de la curva
C: $x - y^2 = 0$, $x \le 1$
recorrida de modo que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = e - 1/e$ (= 2 sh 1 ≈ 2,350).
>
> **La curva:** $x = y^2$ con $x \le 1$ es el arco de parábola con $y \in [-1, 1]$, de $(1, -1)$ a $(1, 1)$ pasando por el origen (y creciente). No es cerrada: la cierro.
> **Cierre:** C_1: segmento $x = 1$ de $(1, 1)$ a $(1, -1)$. $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{-1 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\}$. Al subir por la parábola (lado izquierdo de D), D queda a la derecha: el recorrido es **horario**, orientación negativa.
> **Hipótesis del teorema:** $P = h(x) - y^2$ y $Q = xy + e^y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$ ($h \in C^1$); D es una región elemental con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
> **Rotor:** $Q'_x = y$, $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
> **Doble integral:** $\iint_D 3y\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} 3y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} 3y(1 - y^2)\, dy = 0$ (integrando impar en un intervalo simétrico; D es simétrica respecto del eje x). Entonces $\oint_{C \cup C_1} = 0$.
> **Segmento:** C_1: $(1, y)$, y de 1 a −1; $dx = 0$, así que sólo cuenta $Q(1, y) = y + e^y$ (y h no aparece): $\int_1^{-1} (y + e^y)\, dy = [y^2/2 + e^y]_1^{-1} = (½ + 1/e) - (½ + e) = 1/e - e$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - (1/e - e) = \mathbf{e - 1/e} \approx 2{,}350$.
Control (la otra cara): con $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $t \in [-1, 1]$, $\vec{r}' = (2t, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{r}' = 2t\, h(t^2) - 2t^3 + t^3 + e^t$. Los términos $2t\, h(t^2)$ y $-t^3$ son impares y se anulan entre -1 y 1; queda $\int_{-1}^{1} e^t\, dt = e - 1/e$ ✓.
Trampa: en el segmento vertical $dx = 0$, así que P (la que tiene h) no aporta: no hace falta conocer h.

Ejercicio 3. Halle el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 3 - 2x$, $z \le 0$
orientada de modo que en $(-1, 0, -2)$ la normal tenga tercera componente negativa. Se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f}) = 2$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (y, x, 2)$.

Si lo necesita, use que el volumen de la esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Respuesta: $\Phi = 8\pi/3$ (normal saliente de la semiesfera, la pedida).

Planteo: $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$: esfera de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2. Σ es su mitad de abajo ($z \le 0$), abierta, con borde en $z = 0$, que es justo donde conocemos $\vec{f}$. La cerramos con la tapa T: $z = 0$, $(x + 1)^2 + y^2 \le 4$, y V es la media bola de abajo.
Orientación: $(-1, 0, -2)$ es el polo sur; ahí una normal con tercera componente negativa apunta hacia abajo, o sea hacia afuera de la esfera. Σ va con la normal **saliente** de V.
Hipótesis: el enunciado da $\operatorname{div} \vec{f} = 2$, así que $\vec{f}$ se supone de clase C^1 en un entorno de V; V es acotado y $\partial V = \Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, con normal exterior.
Triple: $\iiint_V 2\, dV = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (4/3)\pi \cdot 2^3 = 32\pi/3$.
Tapa: la normal saliente de la media bola de abajo en $z = 0$ es $(0, 0, 1)$. $\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) = 2$, flujo $= 2 \cdot$ área(T) $= 2 \cdot 4\pi = 8\pi$.
Resultado: $\Phi_\Sigma = 32\pi/3 - 8\pi = \mathbf{8\pi/3}$.
Trampa: la tapa de una semiesfera de **abajo** lleva normal hacia **arriba** (es la saliente de ese sólido). Con la normal hacia abajo te daría $32\pi/3 + 8\pi = 56\pi/3$.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y,\ 3x^2y^2z^2 + y,\ 2x^2y^3z)$
y C el borde del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ y $(0, 1, 1)$. Indique el sentido de recorrido considerado en el cálculo mediante un gráfico.

Respuesta: Recorriendo $P_1 = (1, 0, 0) \to P_3 = (0, 1, 1) \to P_2 = (0, -1, 1) \to P_1$ (antihorario visto desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1$. En el sentido contrario, -1.

Planteo: borde de un triángulo, curva cerrada: Stokes con el triángulo como superficie. Es el mismo campo del integrador del 5/8/25: $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, y, 0)$.
Plano del triángulo: $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, -1, 1)$, $P_3 = (0, 1, 1)$. $P_3 - P_1 = (-1, 1, 1)$, $P_2 - P_1 = (-1, -1, 1)$, $(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) = (2, 0, 2) \parallel (1, 0, 1)$. Plano $\mathbf{x + z = 1}$ (los tres vértices lo cumplen).
Superficie elegida: el triángulo, $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x)$ con $(x, y) \in T$, el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$: $T = \{0 \le x \le 1,\ |y| \le 1 - x\}$, Área$(T) = \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular, orientable; borde poligonal cerrado, suave a trozos.
Sentido elegido (lo que va en el gráfico): $P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1$. Proyectado: $(1, 0) \to (0, 1) \to (0, -1) \to (1, 0)$, antihorario visto desde arriba. En el dibujo: el triángulo con el lado P_2P_3 horizontal a altura $z = 1$ sobre el plano yz y el vértice P_1 en el eje x, con flechas $P_1 \to P_3 \to P_2$ y la normal $(1, 0, 1)$ saliendo hacia

arriba y hacia x positivo.

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con los dedos en $P_1 \to P_3 \to P_2$ el pulgar da $(P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1) = (2, 0, 2)$: coincide con la normal de la parametrización.

Rotor: el gradiente no aporta; $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot}(-y, y, 0) = (0, 0, 1)$ (con $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P)$ sobre $\vec{f}$ completo da lo mismo).

Flujo del rotor: $\iint_T (0, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)\, dxdy = \text{Área}(T) = 1$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{1}$ en el sentido $P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1$ (y -1 en el opuesto).

Control (circulación directa): el gradiente da 0 en la curva cerrada; queda $\oint -y\,dx + y\,dy$. $P_1 \to P_3$: $(1 - t, t, t)$, $\vec{r}' = (-1, 1, 1)$: $\int_0^1 (t + t)\, dt = 1$. $P_3 \to P_2$: $(0, 1 - 2t, 1)$, $\vec{r}' = (0, -2, 0)$: $\int_0^1 -2(1 - 2t)\, dt = 0$. $P_2 \to P_1$: $(t, t - 1, 1 - t)$, $\vec{r}' = (1, 1, -1)$: $\int_0^1 (-y + y)\, dt = 0$. Total 1 ✓.

Trampa: el orden en que te dan los vértices (P_1, P_2, P_3) da la normal hacia abajo, $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) = (-2, 0, -2)$. Si usás ese recorrido, el resultado es -1. Cualquiera de los dos vale si lo declarás y lo dibujás.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \varphi(x)(2y + x^2, x)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, tal que

1. $\vec{f}(-1, 0) = (-2, 2)$;
2. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada C.

Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva

$\Gamma: \vec{X} = (\sqrt{(3 + t^2)}, t^4 + t + 1), -1 \le t \le 1$

orientada según esa parametrización.

Respuesta: $\varphi(x) = 2x$; $\vec{f} = \nabla U$ con $U = 2x^2y + x^4/2$; Γ va de $(2, 1)$ a $(2, 3)$; circulación = 16.

Condición 2 ⇔ gradiente: circulación nula sobre toda curva cerrada equivale a que $\vec{f}$ sea de gradientes en $\mathbb{R}^2$. $\vec{f}$ es C^1 porque $\varphi \in C^1$, así que si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

La EDO: $P = \varphi(x)(2y + x^2)$, $Q = x\varphi(x)$. $P'_y = 2\varphi$; $Q'_x = \varphi + x\varphi'$. Igualando: $\mathbf{x\,\varphi'(x) = \varphi(x)}$ para todo x.

Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(\varphi/x)' = \dfrac{x\varphi' - \varphi}{x^2} = 0$, así que φ/x es constante en cada semirrecta: $\varphi(x) = c_1 x$ para $x > 0$ y $\varphi(x) = c_2 x$ para $x < 0$ (y $\varphi(0) = 0$ por continuidad). Como φ es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: $\boldsymbol{\varphi(x) = cx}$ en todo $\mathbb{R}$.

Condición 1: $\vec{f}(-1, 0) = \varphi(-1)\cdot(0 + 1, -1) = (\varphi(-1), -\varphi(-1)) = (-2, 2) \Rightarrow \varphi(-1) = -2 \Rightarrow c\cdot(-1) = -2 \Rightarrow c = 2$. $\boldsymbol{\varphi(x) = 2x}$.

Suficiencia y potencial: $\vec{f} = (4xy + 2x^3, 2x^2)$ cumple $P'_y = 4x = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$ (simplemente conexo). $U'_y = 2x^2 \Rightarrow U = 2x^2y + k(x)$; $U'_x = 4xy + k'(x) = 4xy + 2x^3 \Rightarrow k = x^4/2$. $U(x, y) = 2x^2y + \dfrac{x^4}{2}$.

Extremos de Γ: $\vec{X}(-1) = (\sqrt{4}, 1 - 1 + 1) = (2, 1)$ y $\vec{X}(1) = (\sqrt{4}, 1 + 1 + 1) = (2, 3)$; orientada según la parametrización, va de $(2, 1)$ a $(2, 3)$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(2, 3) - U(2, 1) = (24 + 8) - (8 + 8) = \mathbf{16}$. No hace falta tocar la parametrización (que es fea a propósito).

Trampa: el dato está en $x = -1$ y Γ vive en $x \ge 2$: la constante encontrada vale para $x < 0$, y sólo porque φ es derivable en 0 se sabe que es la misma para $x > 0$. Con otra constante en las x positivas daría otra cosa (por ejemplo, -16 con $\varphi = -2x$).

29/6/26 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región H de $\mathbb{R}^3$ definida por
$H: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 17,\ z \geq 2,$
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 81\pi k/8$ ($\delta = kz$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta\, dV$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 2z^2 = 17$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$ y $\sqrt{(17/2)} \approx 2{,}92$. El plano $z = 2$ lo corta en $x^2 + y^2 = 17 - 8 = 9$ (circunferencia de radio 3). H es el casquete de arriba: entre $z = 2$ y la punta $z = \sqrt{(17/2)}$. Cada tajada $z = cte$ es el disco $x^2 + y^2 \leq 17 - 2z^2$.
> **Densidad:** la distancia al plano xy es $|z| = z$ (en H, $z \geq 2$): $\delta = kz$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $2 \leq z \leq \sqrt{(17/2)}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(17 - 2z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r da el área del disco, $\pi(17 - 2z^2)$. $M = k\pi \int_2^{\sqrt{(17/2)}} z(17 - 2z^2)\, dz$. Primitiva: $\frac{17z^2}{2} - \frac{z^4}{2}$. En $z^2 = \frac{17}{2}$: $\frac{289}{4} - \frac{289}{8} = \frac{289}{8}$. En $z = 2$: $34 - 8 = 26 = \frac{208}{8}$.
> Diferencia: $\frac{81}{8}$.
> **Resultado: $M = \frac{81\pi k}{8}$.**
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 3$ y $2 \leq z \leq \sqrt{(\frac{17 - r^2}{2})}$. $M = 2\pi k \int_0^3 r[\frac{z^2}{2}]_2^{\sqrt{((17 - r^2)/2)}}\, dr =$
> $\pi k \int_0^3 r \cdot \frac{9 - r^2}{2}\, dr = \frac{\pi k}{2}[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{81}{4} = \frac{81\pi k}{8}$ ✓.
> **Trampa:** el techo es $z = \sqrt{(17/2)}$, no $\sqrt{17}$: el 2 que multiplica a z^2 achica ese semieje. En el orden dz dr, r va hasta 3 (radio del corte con $z = 2$).

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^x + h(3x + 3y),\ x^2 + h(3x + 3y))$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$
recorrida en sentido antihorario.

> **Respuesta:** $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 76/15$ (antihorario).
>
> **Planteo:** $P = e^x + h(3x + 3y)$, $Q = x^2 + h(3x + 3y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. No conocemos h, así que parametrizar no sirve: Green.
> **La región:** $D = \{|y| \leq x \leq 2 - y^2\}$. Las curvas se cortan donde $|y| = 2 - y^2$, o sea $|y|^2 + |y| - 2 = 0$, $(|y| + 2)(|y| - 1) = 0$, $|y| = 1$: en (1, 1) y (1, –1). Entonces $D = \{-1 \leq y \leq 1,\ |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$: a la izquierda la "V" $x = |y|$ (vértice en el origen) y a la derecha el arco de parábola $x = 2 - y^2$.
> **Hipótesis del teorema:** P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una función lineal, más e^x y x^2). D es una región elemental (regular) y su borde, formado por dos segmentos y un arco de parábola, es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es antihorario: orientación positiva, Green se aplica tal cual.
> **Rotor:** por la regla de la cadena, $Q'_x = 2x + 3h'(3x + 3y)$ y $P'_y = 3h'(3x + 3y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{2x}$: la h desaparece (de hecho $(h(3x + 3y), h(3x + 3y)) = \nabla(H(3x + 3y)/3)$ con $H' = h$).

Doble integral: $\iint_D 2x\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{|y|}^{2-y^2} 2x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}[x^2]_{|y|}^{2-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1}(4-4y^2+y^4-y^2)\,dy = 2[4y - 5y^3/3 + y^5/5]_0^1 = 2(4 - 5/3 + 1/5) = 76/15$.
Resultado: $\oint_{\partial D}\vec{f}\cdot d\vec{s} =$ **76/15**.
Control (la otra cara): e^x y los términos con h son gradientes y no aportan en una curva cerrada; queda $\oint x^2\,dy$. En sentido antihorario: por la parábola $x = 2 - y^2$, y de −1 a 1: $\int_{-1}^{1}(2-y^2)^2\,dy = 86/15$; por $x = |y|$, de (1, 1) a (0, 0) y a (1, −1), y de 1 a −1: $\int_1^{-1} y^2\,dy = -2/3$. Total $86/15 - 10/15 = 76/15$ ✓.
Trampa: elegí bien el orden: con franjas verticales la región se parte en dos ($x \in [0, 1]$ entre $y = \pm x$ y $x \in [1, 2]$ entre $y = \pm\sqrt{(2-x)}$); con franjas horizontales (x entre $|y|$ y $2 - y^2$) sale en una sola integral, y como el integrando queda par en y se duplica la de 0 a 1.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 2,\ y \ge 0$
orientada de modo tal que las normales apunten hacia el eje z.
Calcule el flujo a través de Σ de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, \cos(xyz))$.

Respuesta: $\Phi = -8\pi$ (con $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0)$, hacia el eje z).

Planteo: $x^2 + y^2 = 4$ es el cilindro de radio 2 y eje z; con $y \ge 0$ es la mitad, $\theta \in [0, \pi]$. $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$, $D = [0, \pi] \times [0, 2]$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)$.
Orientación: ese vector es $1\cdot(x, y, 0)$: va del eje hacia el punto, o sea hacia afuera. Se pide hacia el eje z: **cambio el signo**, $\vec{N} = (-2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta, 0)$.
Producto escalar: $\vec{f}(X) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, \cos(4z\operatorname{sen}\theta\cos\theta))$. La tercera componente de $\vec{N}$ es 0, así que el coseno no aporta nada: $\vec{f}\cdot\vec{N} = -4\cos^2\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta = -4$.
Cuenta: $\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2}(-4)\,dz\,d\theta = -4\cdot 2\cdot\pi = -8\pi$.
Resultado: $\Phi =$ **-8π**.
Control con el versor: $\check{n} = -(x, y, 0)/2$, $\vec{f}\cdot\check{n} = -(x^2 + y^2)/2 = -2$ constante sobre Σ; el área del medio cilindro es $\pi\cdot 2\cdot 2 = 4\pi$, así que $\Phi = -8\pi$ ✓.
Trampa: asustarse con cos(xyz) y querer cerrar con Gauss: las tapas $z = 0$ y $z = 2$ sí ven ese término y la cuenta se complica. Directo, no aparece.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por (1, 0) y está contenida en el semiplano $3x - y \ge 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (2 + xy^2, y + x^2y)$ a lo largo de C. Indique en un gráfico la orientación elegida.

Respuesta: C: media elipse $9x^2 + y^2 = 9$ con $y \le 3x$, de $(-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ a $(1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ pasando por (1, 0). $\vec{f} = \nabla U$ con $U = 2x + x^2y^2/2 + y^2/2$. En sentido antihorario la circulación vale $2\sqrt{2}$ (en sentido horario, $-2\sqrt{2}$).

Planteo: hay que hallar la línea de campo de $\vec{g}$ por (1, 0), quedarse con la parte que cae en el semiplano y, si $\vec{f}$ es de gradientes, usar el potencial entre los extremos.
Línea de campo (EDO): $\vec{X}' = \vec{g}(\vec{X})$ da $x' = -y$, $y' = 9x$. Las trayectorias cumplen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9x}{-y}$, separable: $y\,dy = -9x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{9x^2}{2} + k \Rightarrow 9x^2 + y^2 = c$. Por (1, 0): $c = 9$. La línea es la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (semieje 1 en x, 3 en y). Control: $\dfrac{d}{dt}(9x^2 + y^2) = 18x(-y) + 2y(9x) = 0$.

Recorte con $3x - y \geq 0$: la recta $y = 3x$ pasa por el centro de la elipse; reemplazando, $9x^2 + 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$. Corta en $B = (-1/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ y $A = (1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$. El semiplano $y \leq 3x$ contiene a $(1, 0)$ ($3 \cdot 1 - 0 = 3 \geq 0$), así que C es la media elipse que va de B a A pasando por $(1, 0)$.

Orientación elegida (gráfico): dibujá la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ y la recta $y = 3x$ por el origen, y quedate con la mitad que está a la derecha y abajo de la recta (la que contiene a $(1, 0)$). Marcá la flecha en sentido antihorario: sale de B, pasa por $(1, 0)$ y llega a A. Es el sentido de $\vec{g}$ (en $(1, 0)$, $\vec{g} = (0, 9)$ apunta para arriba). Parametrización con ese sentido: $\vec{X}(s) = (\cos s, 3 \operatorname{sen} s)$, $-3\pi/4 \leq s \leq \pi/4$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = 2 + xy^2$ y $Q = y + x^2y$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $P'_y = 2xy = Q'_x$. $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, entonces $\vec{f}$ es de gradientes.

Potencial: $U'_x = 2 + xy^2 \Rightarrow U = 2x + \dfrac{x^2y^2}{2} + h(y)$. Derivando en y: $x^2y + h'(y) = y + x^2y \Rightarrow h' = y$, $h = y^2/2$.

Queda $U = 2x + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

Cuenta: en A, $x^2y^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{4}$ e $y^2 = \dfrac{9}{2}$, así que $U(A) = \sqrt{2} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{9}{4} = \sqrt{2} + \dfrac{27}{8}$. En B los cuadrados son los mismos y sólo cambia el signo de $2x$: $U(B) = -\sqrt{2} + \dfrac{27}{8}$.

Resultado: con la orientación antihoraria, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = \mathbf{2\sqrt{2}}$. Si se elige la horaria (de A a B por $(1, 0)$), da $-2\sqrt{2}$.

Trampa: el enunciado no fija el sentido, así que sin la orientación indicada (en el gráfico) la respuesta está incompleta: el signo depende de ella. Y C es un arco abierto, no la elipse entera: sobre la elipse cerrada la circulación daría 0.

Ejercicio 5. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y^2, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por
$x^2 + y^2 - 2y = 0$, $2y + z = 6$.
Indique la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con C recorrida en sentido antihorario vista desde arriba (normal del plano hacia arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 - y^2$, $Q = 3x^2y^2z^2 + y$, $R = 2x^2y^3z$: polinomios, así que $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. Parametrizar directo deja integrales trigonométricas larguísimas por el término $2xy^3z^2$; conviene el teorema del rotor.

La curva: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, un cilindro circular de radio 1 con eje paralelo a z por $(0, 1)$; $2y + z = 6$ es un plano. C es la elipse donde el plano corta al cilindro: cerrada y suave.

Rotor: $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = 6xy^2z^2 - (6xy^2z^2 - 2y) = 2y$. **$\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, 2y)$.** (Es lo mismo que ver $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y^2, y, 0)$: sólo circula la parte $(-y^2, y, 0)$.)

Superficie elegida: el trozo S del plano $z = 6 - 2y$ que queda dentro del cilindro, $(x, y) \in D$: $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Es un gráfico C^1 (suave, orientable, acotada) y su borde es C. Como $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor, y el trozo de plano es la superficie más cómoda con ese borde.

Orientación elegida: C recorrida en sentido **antihorario mirando desde arriba** (su proyección gira antihoraria alrededor de $(0, 1)$); por ejemplo, en $(0, 0, 6)$, que es el punto más bajo de la proyección, la tangente es $(1, 0, 0)$. Con $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $z = 4 - 2 \operatorname{sen} t$, t creciente. Regla de la mano derecha: dedos según el recorrido, pulgar hacia arriba, así que la normal compatible del trozo de plano es $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2, 1)$.

Cuenta: rot f · N = 0 · 0 + 0 · 2 + 2y · 1 = 2y. Entonces $\int_C f \cdot ds = \iint_D 2y\,dx\,dy$. Con $x = \rho\cos\theta$, $y = 1 + \rho\,\text{sen}\,\theta$, jacobiano ρ, $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 2(1 + \rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}[\rho^2 + (2/3)\rho^3\,\text{sen}\,\theta]_0^1\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1 + (2/3)\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta = 2\pi$. (Más rápido: $\iint_D y\,dA = \bar{y} \cdot \text{área}(D) = 1 \cdot \pi$.)
Resultado: con C antihoraria vista desde arriba, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 2\pi}$; con el sentido opuesto, -2π.
Trampa: el enunciado deja elegir el sentido, pero hay que decirlo y que la normal sea la compatible con él. Un 2π sin orientación declarada no está bien resuelto.

27/6/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint$ xz dxdydz.

> **Respuesta:** $\iiint_H xz\,dx\,dy\,dz = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble de eje z a 45°; Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. "Limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2" es: por encima de la hoja de arriba del cono, $z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$, y por debajo de la esfera. Se cortan en $2z^2 = 8$: $z = 2$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Es el cucurucho de helado, y el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$; $z \geq 0$ ya vale adentro del cono) se queda con un cuarto.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Adentro del cono: $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/4]$. Esfera: $\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. Rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $xz \cdot |J| = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \cdot \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \cos\theta$.
> **Cuenta:** $\iiint_H xz\,dV = (\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi\,d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4\,d\rho)$. En ρ: primitiva $\dfrac{\rho^5}{5}$, da $\dfrac{(2\sqrt{2})^5}{5} = \dfrac{128\sqrt{2}}{5}$. En φ: primitiva $\dfrac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}$ (sustitución $u = \operatorname{sen}\varphi$), entre 0 y π/4 da $\dfrac{(\sqrt{2}/2)^3}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.
> En θ: primitiva sen θ, da $\operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen} 0 = 1$.
> **Resultado:** $\iiint_H xz\,dV = \dfrac{128\sqrt{2}}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1 = \dfrac{256}{60} = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$.
> **Control en cilíndricas:** $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, 2]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$, integrando $r \cos\theta \cdot z \cdot r$. En z: primitiva $\dfrac{z^2}{2}$, da $\dfrac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 r^2(4 - r^2)\,dr = \dfrac{4r^3}{3} - \dfrac{r^5}{5}$ entre 0 y 2 $= \dfrac{32}{3} - \dfrac{32}{5} = \dfrac{64}{15}$. En θ: $\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = 1$. Total $\dfrac{64}{15}$ ✓.
> **Trampa:** en esféricas el integrando lleva ρ^4 (dos ρ del xz y ρ^2 del jacobiano) y $\operatorname{sen}^2\varphi$ (uno del x, otro del jacobiano). Y el primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$: el cos θ no se anula al integrar, a diferencia de la vuelta entera, donde daría 0.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - y, 3x + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la unión de los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con A = (0, 0), B = (2, 4) y C = (4, 0), recorrida en el sentido A → B → C.

> **Respuesta:** $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 32$.
>
> El exponente de e está borroso en la foto; se lee cos(y), como en el tema 2. El resultado no depende de esa lectura mientras el exponente sea una función sólo de y: no entra en Q'_x y en el segmento del eje x es dy = 0.
> **La curva:** la poligonal va de A = (0, 0) a B = (2, 4) y de ahí a C = (4, 0). No es cerrada: la cierro con C_1, el segmento de C a A sobre el eje x.
> **Orientación:** A → B → C → A sube, baja y vuelve hacia la izquierda por abajo: el triángulo T = ABC queda a la derecha, sentido **horario** (orientación negativa).
> **Hipótesis del teorema:** $P = x^3 - y$ y $Q = 3x + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; T es una región regular y su borde es

una poligonal cerrada y simple (suave a trozos). Por la orientación, $\oint = -\iint_T (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x - P'_y = 3 - (-1) = 4$ (la exponencial depende sólo de y).
Doble integral: el rotor es constante, así que $\iint_T$ = constante · área(T); área(T) = ½ · 4 · 4 = 8. $\iint = 4 \cdot 8 = 32$, y por el sentido horario $\oint_{AB \cup BC \cup CA} = -32$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 4 a 0; dy = 0 y P(t, 0) = t^3: $\int_4^0 t^3\, dt = [t^4/4]_4^0 = -64$.
Resultado: $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32 + 64 = \mathbf{32}$.
Trampa: $e^{\cos(y)}$ no tiene primitiva elemental, pero $e^{\cos(y)}\, dy$ es exacta: lo que aporta en AB (y de 0 a 4) se cancela con lo de BC (y de 4 a 0). No hace falta integrarla ni por Green (no entra en el rotor) ni directo. En el segmento del eje x, dy = 0 y sólo queda $\int x^3\, dx$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
Σ: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$, $1 \le z \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{15\sqrt{2}\,\pi}{4} \approx 16{,}66$.

Planteo: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$ es la hoja de arriba del cono con vértice en el origen. Σ es la parte entre las alturas z = 1 y z = 4 con x ≥ 0, y ≥ 0: un cuarto de tronco de cono. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$.
Dominio D: sobre el cono z = r, así que $1 \le z \le 4$ es $1 \le r \le 4$. x ≥ 0 e y ≥ 0 dan $0 \le \theta \le \pi/2$. $D = [1, 4] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\, r$, que no se anula en D (r ≥ 1, el vértice queda afuera): Σ es regular.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 1 y 4 da $\dfrac{\sqrt{2}\,(16 - 1)}{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt{2}$.
Integral en θ: multiplica por $\dfrac{\pi}{2}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \dfrac{\mathbf{15\sqrt{2}\,\pi}}{\mathbf{4}} \approx 16{,}66$.
Control: como gráfica, $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de corona $1 \le r \le 4$, de área $\dfrac{\pi(16 - 1)}{4}$; por √2 da lo mismo ✓. Y con la fórmula del tronco: $\pi\,(1 + 4)\, g$ con $g = \sqrt{((4 - 1)^2 + (4 - 1)^2)} = 3\sqrt{2}$ da $15\sqrt{2}\,\pi$, y la cuarta parte es $15\sqrt{2}\,\pi/4$ ✓.
Trampa: olvidarse del √2 y dar el área de la proyección, o integrar r desde 0 (eso agrega el pedacito de cono entre el vértice y z = 1, que no es parte de Σ).

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, \varphi(x), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
Σ: $z = 5 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con las normales hacia arriba (exteriores al sólido): $\Phi = 20\pi$. Con la orientación opuesta: $\Phi = -20\pi$.

Planteo: Σ: $z = 5 - x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 \le 4$ es un paraboloide hacia abajo, con vértice (0, 0, 5), recortado por el cilindro r = 2: su borde es la circunferencia r = 2 a altura z = 5 − 4 = 1. Con φ desconocida conviene Gauss: cerramos con la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 4$, y trabajamos en $H = \{1 \le z \le 5 - x^2 - y^2\}$.
Orientación elegida (gráfico): en Σ tomo la normal hacia arriba (tercera componente positiva), que es la exterior a H porque el sólido está debajo de la cúpula. En la tapa, la exterior es (0, 0, −1). En el dibujo: flechas saliendo de la cúpula hacia arriba y afuera.

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f} = (x, \varphi(x), z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x x + \partial_y \varphi(x) + \partial_z z = 1 + 0 + 1 = 2$.

Triple integral: en cilíndricas $H = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 1 \le z \le 5 - r^2\}$: $\iiint_H 2\, dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2 \cdot 2\pi[2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^2 = 4\pi \cdot 4 = 16\pi$.

Tapa: en $z = 1$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -z = -1$; $\Phi_T = -1 \cdot 4\pi = -4\pi$.

Gauss: $\Phi_\Sigma - 4\pi = 16\pi \Rightarrow \Phi_\Sigma = 20\pi$.

Resultado: $\Phi = 20\pi$ con las normales hacia arriba (-20π con las normales hacia abajo).

Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y\varphi(x) + 5 - x^2 - y^2$. El término $2y\varphi(x)$ es impar en y sobre el disco: integra 0. Queda $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (5 + r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = 20\pi + \int_0^{2\pi} 4\cos 2\theta\, d\theta = 20\pi$ ✓.

Trampa: cerrar con la tapa en $z = 0$ (no es el borde de Σ: el borde está en $z = 1$) o tomar la tapa con normal $(0, 0, 1)$: entonces $\Sigma \cup T$ no queda orientada hacia afuera y Gauss da cualquier cosa.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + y^2 = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por $(-1, 1)$. Calcule $\int_C x\, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos $(-1, 1)$ y $(0, b)$.

Respuesta: Γ: $y = x^2$; $b = 0$; $\int_C x\, ds = (1 - 5\sqrt{5})/12 \approx -0{,}848$.

Planteo: $\mathscr{F}$ son las curvas de nivel de $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$ (elipses centradas en el origen). La curva ortogonal Γ corta a cada elipse en ángulo recto, o sea su tangente es paralela a ∇F (que es normal a la elipse que pasa por ese punto).

EDO de la familia: derivando implícitamente respecto de x (con $y = y(x)$): $x + 2yy' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2y}$. La constante c desaparece al derivar, que es lo que se busca.

EDO de las ortogonales: se cambia y' por $-1/y'$: $y' = \frac{2y}{x}$. (Lo mismo sale de pedir tangente $(1, y')$ paralela a $\nabla F = (x, 2y)$.)

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + K_1 \Rightarrow |y| = e^{K_1} x^2 \Rightarrow y = Kx^2$. Por $(-1, 1)$: $1 = K(-1)^2$, $K = 1$. Γ: $\mathbf{y = x^2}$. Control: $y' = 2x = 2x^2/x = 2y/x$ ✓. En $(-1, 1)$ la tangente de Γ es $(1, -2)$, paralela a $\nabla F(-1, 1) = (-1, 2)$ ✓.

El punto (0, b): tiene que estar sobre Γ, así que $b = 0^2 = \mathbf{0}$: el otro extremo es el origen. (La EDO es singular en $x = 0$, donde todas las elipses degeneran en el punto $(0, 0)$, pero $y = x^2$ es C^1 ahí y el arco C es el tramo de parábola entre $x = -1$ y $x = 0$.)

Parametrización de C: $\vec{X}(x) = (x, x^2)$, $x \in [-1, 0]$. $\vec{X}' = (1, 2x)$, $\|\vec{X}'\| = \sqrt{(1 + 4x^2)} \neq 0$: regular.

Cuenta: $\int_C x\, ds = \int_{-1}^0 x\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$. Con $u = 1 + 4x^2$, $du = 8x\, dx$, la primitiva es $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$. Entre -1 y 0: $\frac{1}{12}(1 - 5^{3/2}) = \frac{1 - 5\sqrt{5}}{12}$.

Resultado: $\int_C x\, ds = \mathbf{(1 - 5\sqrt{5})/12} \approx -0{,}848$. Da negativa porque $x \le 0$ en todo C. La integral respecto de ds no depende del sentido en que se recorra C.

Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ después de eliminar c; si resolvés $y' = -x/(2y)$ volvés a la familia de elipses. Y en $\int f\, ds$ el parámetro va siempre de menor a mayor ($ds > 0$): integrar al revés "porque el arco se recorre de $(-1, 1)$ a $(0, 0)$" cambia el signo y está mal.

27/6/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint yz\,dxdydz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble de eje z a 45°; Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. "Limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2" es: por encima de la hoja de arriba del cono, $z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$, y por debajo de la esfera. Se cortan en $2z^2 = 8$: $z = 2$, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Es el cucurucho de helado, y el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$; $z \geq 0$ ya vale adentro del cono) se queda con un cuarto.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Adentro del cono: $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/4]$. Esfera: $\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. Rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $yz \cdot |J| = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \cdot \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}\theta$.
> **Cuenta:** $\iiint_H yz\,dV = (\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4\,d\rho)$. En ρ: primitiva $\dfrac{\rho^5}{5}$, da $\dfrac{(2\sqrt{2})^5}{5} = \dfrac{128\sqrt{2}}{5}$. En φ: primitiva $\dfrac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}$ (sustitución $u = \operatorname{sen}\varphi$), entre 0 y $\pi/4$ da $\dfrac{(\sqrt{2}/2)^3}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$. En θ: primitiva $-\cos\theta$, da $-\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\,dV = \dfrac{128\sqrt{2}}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} \cdot 1 = \dfrac{256}{60} = \dfrac{64}{15} \approx 4{,}27$. Tiene que dar lo mismo que $\iiint xz$ del tema 1: la región es simétrica respecto del plano $y = x$, que cambia x por y.
> **Control en cilíndricas:** $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, 2]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$, integrando $r \operatorname{sen}\theta \cdot z \cdot r$. En z: primitiva $\dfrac{z^2}{2}$, da $\dfrac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 r^2(4 - r^2)\,dr = \dfrac{4r^3}{3} - \dfrac{r^5}{5}$ entre 0 y 2 $= \dfrac{32}{3} - \dfrac{32}{5} = \dfrac{64}{15}$. En θ: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 1$. Total $\dfrac{64}{15}$ ✓.
> **Trampa:** en esféricas el integrando lleva ρ^4 (dos ρ del yz y ρ^2 del jacobiano) y $\operatorname{sen}^2\varphi$ (uno del y, otro del jacobiano). Y el primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$: el sen θ no se anula al integrar, a diferencia de la vuelta entera, donde daría 0.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - 2y, e^{\cos(y)} + x)$ a lo largo de la unión de los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con A = (0, 0), B = (3, 6) y C = (6, 0), recorrida en el sentido A → B → C.

> **Respuesta:** $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 270$.
>
> **La curva:** la poligonal va de A = (0, 0) a B = (3, 6) y de ahí a C = (6, 0). No es cerrada: la cierro con C_1, el segmento de C a A sobre el eje x.
> **Orientación:** A → B → C → A sube, baja y vuelve hacia la izquierda por abajo: el triángulo T = ABC queda a la derecha, sentido **horario** (orientación negativa).
> **Hipótesis del teorema:** $P = x^3 - 2y$ y $Q = e^{\cos(y)} + x$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; T es una región regular y su borde es una poligonal cerrada y simple (suave a trozos). Por la orientación, $\oint = -\iint_T (Q'_x - P'_y)\,dA$.
> **Rotor:** $Q'_x - P'_y = 1 - (-2) = 3$ (la exponencial depende sólo de y).

Doble integral: el rotor es constante, así que $\iint_T$ = constante · área(T); área(T) = ½ · 6 · 6 = 18. $\iint$ = 3 · 18 = 54, y por el sentido horario $\oint_{AB \cup BC \cup CA} = -54$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 6 a 0; dy = 0 y P(t, 0) = t^3: $\int_6^0 t^3\,dt = [t^4/4]_6^0 = -324$.
Resultado: $\int_{AB \cup BC} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -54 + 324 =$ **270**.
Trampa: $e^{\cos(y)}$ no tiene primitiva elemental, pero $e^{\cos(y)}$ dy es exacta: lo que aporta en AB (y de 0 a 6) se cancela con lo de BC (y de 6 a 0). No hace falta integrarla ni por Green (no entra en el rotor) ni directo. En el segmento del eje x, dy = 0 y sólo queda $\int x^3\,dx$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
Σ: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$, $1 \le z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Respuesta: A(Σ) = $2\sqrt{2}\,\pi \approx 8{,}89$.

Planteo: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$ es la hoja de arriba del cono con vértice en el origen. Σ es la parte entre las alturas z = 1 y z = 3 con x ≥ 0, y ≥ 0: un cuarto de tronco de cono. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\,dr\,d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r)$.
Dominio D: sobre el cono z = r, así que $1 \le z \le 3$ es $1 \le r \le 3$. x ≥ 0 e y ≥ 0 dan $0 \le \theta \le \pi/2$. D = [1, 3] × [0, π/2].
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\text{sen}\,\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\,r$, que no se anula en D (r ≥ 1, el vértice queda afuera): Σ es regular.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\,r^2}{2}$, entre 1 y 3 da $\frac{\sqrt{2}\,(9-1)}{2} = 4\sqrt{2}$.
Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{2}$.
Resultado: A(Σ) = $\mathbf{2\sqrt{2}\,\pi} \approx 8{,}89$.
Control: como gráfica, $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$, y la proyección es un cuarto de corona $1 \le r \le 3$, de área $\frac{\pi(9-1)}{4}$; por √2 da lo mismo ✓. Y con la fórmula del tronco: π (1 + 3) g con $g = \sqrt{((3-1)^2 + (3-1)^2)} = 2\sqrt{2}$ da $8\sqrt{2}\,\pi$, y la cuarta parte es $2\sqrt{2}\,\pi$ ✓.
Trampa: olvidarse del √2 y dar el área de la proyección, o integrar r desde 0 (eso agrega el pedacito de cono entre el vértice y z = 1, que no es parte de Σ).

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(y), y, z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
Σ: $z = 10 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 9$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con normal hacia arriba (saliente del sólido limitado por Σ y z = 1): Φ = 90π. Con la normal opuesta, −90π.

Planteo: Σ es el paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$, o sea entre z = 1 y z = 10. Es una superficie **abierta** (le falta el piso) y $\vec{f}$ tiene una φ desconocida, así que conviene cerrarla y usar Gauss.
Orientación elegida: normal de Σ hacia arriba (tercera componente positiva). En el gráfico: el paraboloide con flechas que salen hacia arriba y afuera, y la tapa z = 1 con flechas hacia abajo; las dos son salientes del sólido encerrado.
Cierre: $V = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 9,\ 1 \le z \le 10 - x^2 - y^2\}$ y la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 9$, con normal saliente (0, 0, −1).
Hipótesis de Gauss: V es acotado y su frontera Σ ∪ T es una superficie cerrada suave a trozos, orientada con la normal exterior; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ porque $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial\varphi(y)/\partial x + \partial y/\partial y + \partial z/\partial z = 0 + 1 + 1 = 2$.
Triple integral (cilíndricas): $\iiint_V 2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_1^{10 - r^2} 2r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^3 2r(9 - r^2)\, dr = 2\pi\, [9r^2 - r^4/2]_0^3 = 2\pi\,(81 - 81/2) = 81\pi$.
Flujo de la tapa: en T es $z = 1$ y $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -z = -1$, así que $\iint_T = -1 \cdot \text{área}(T) = -9\pi$.
Resultado: $\Phi_\Sigma = 81\pi - (-9\pi) =$ **90π** (con la normal hacia abajo sería -90π).
Control directo: con $\vec{r}(x, y) = (x, y, 10 - x^2 - y^2)$, $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ (hacia arriba) y $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x\varphi(y) + 2y^2 + 10 - x^2 - y^2$. El término $2x\varphi(y)$ es impar en x y el disco es simétrico respecto de $x = 0$: integra 0. También $\iint (y^2 - x^2)\, dA = 0$ por simetría. Queda $\iint 10\, dA = 10 \cdot 9\pi = 90\pi$ ✓.
Trampa: la tapa se resta con la normal saliente del sólido, que en $z = 1$ apunta hacia abajo. Si la tomás hacia arriba te queda $81\pi - 9\pi = 72\pi$, que está mal.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por (1, 1). Calcule $\int_C x\, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos (1, 1) y (0, b).

Respuesta: Γ: $y = x^2$; $b = 0$; $\int_C x\, ds = (5\sqrt{5} - 1)/12 \approx 0{,}848$.

Planteo: $\mathscr{F}$ son las curvas de nivel de $F(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ (elipses centradas en el origen). La curva ortogonal Γ corta a cada elipse en ángulo recto, o sea su tangente es paralela a ∇F (que es normal a la elipse que pasa por ese punto).

EDO de la familia: derivando implícitamente respecto de x (con $y = y(x)$): $\frac{x}{2} + yy' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2y}$. La constante c desaparece al derivar, que es lo que se busca.

EDO de las ortogonales: se cambia y' por $-1/y'$: $y' = \frac{2y}{x}$. (Lo mismo sale de pedir tangente $(1, y')$ paralela a $\nabla F = (x/2, y)$.)

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$, $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + K_1 \Rightarrow |y| = e^{K_1} x^2 \Rightarrow y = Kx^2$. Por (1, 1): $1 = K \cdot 1^2$, $K = 1$. Γ: **$y = x^2$**. Control: $y' = 2x = 2x^2/x = 2y/x$ ✓. En (1, 1) la tangente de Γ es (1, 2), paralela a $\nabla F(1, 1) = (1/2, 1)$ ✓.
El punto (0, b): tiene que estar sobre Γ, así que $b = 0^2 =$ **0**: el otro extremo es el origen. (La EDO es singular en $x = 0$, donde todas las elipses degeneran en el punto (0, 0), pero $y = x^2$ es C^1 ahí y el arco C es el tramo de parábola entre $x = 0$ y $x = 1$.)
Parametrización de C: $\vec{X}(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 1]$. $\vec{X}' = (1, 2x)$, $\|\vec{X}'\| = \sqrt{(1 + 4x^2)} \neq 0$: regular.
Cuenta: $\int_C x\, ds = \int_0^1 x\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$. Con $u = 1 + 4x^2$, $du = 8x\, dx$, la primitiva es $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$. Entre 0 y 1: $\frac{1}{12}(5^{3/2} - 1) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}$.
Resultado: $\int_C x\, ds =$ **$(5\sqrt{5} - 1)/12$** $\approx 0{,}848$. Da positiva porque $x \geq 0$ en todo C. La integral respecto de ds no depende del sentido en que se recorra C.
Trampa: la ortogonal sale de cambiar y' por $-1/y'$ después de eliminar c; si resolvés $y' = -x/(2y)$ volvés a la familia de elipses. Y en $\int f\, ds$ el parámetro va siempre de menor a mayor ($ds > 0$): integrar al revés "porque el arco se recorre de (1, 1) a (0, 0)" cambia el signo y está mal.

11/5/26, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{x + y^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 9,\ x \neq -y^2\}$: el disco abierto de radio 3 sin el arco de la parábola $x = -y^2$ que lo atraviesa. Es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo (dos componentes: $x > -y^2$ y $x < -y^2$). b) Nivel 0: la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ sin los puntos $(-(\sqrt{33} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{33} - 1)/2)}) \approx (-2{,}37; \pm 1{,}54)$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(9 - x^2 - y^2)$ pide $9 - x^2 - y^2 > 0$; el denominador pide $x + y^2 \neq 0$, o sea $x \neq -y^2$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9,\ x \neq -y^2\}$.
> **Gráfico:** el disco de centro (0, 0) y radio 3 con la circunferencia en punteado, y la parábola $x = -y^2$ (vértice en el origen, abre hacia la izquierda, pasa por $(-1, \pm 1)$ y $(-4, \pm 2)$) también en punteado. La parábola corta la circunferencia donde $y^4 + y^2 - 9 = 0$: $y^2 = (\sqrt{37} - 1)/2$, o sea en $(-(\sqrt{37} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}) \approx (-2{,}54; \pm 1{,}59)$. El arco de parábola entre esos dos puntos parte el disco en dos: una "lente" a la izquierda, adentro de la parábola ($x < -y^2$, contiene a $(-1, 0)$), y el resto ($x > -y^2$, contiene a $(1, 0)$).
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{x = -y^2,\ |y| \leq \sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}\}$: la circunferencia entera más el arco de parábola que queda adentro. Nada de eso está en D.
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ y $g_2(x, y) = (x + y^2)^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ (que es justamente $x + y^2 \neq 0$) son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (está sobre la parábola y toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(\varepsilon, 0)$) y no pertenece a D.
> **Acotado:** sí: $\|(x, y)\| < 3$ en todo D.
> **Conexo:** no. $h(x, y) = x + y^2$ es continua en D, no se anula en D y vale 1 en (1, 0) y -1 en $(-1, 0)$. Una curva continua dentro de D que uniera esos puntos haría que h cambie de signo y, por Bolzano, se anule en un punto de D: absurdo. Las dos componentes son las regiones de adentro y de afuera de la parábola dentro del disco.
> **b) Planteo:** en D el denominador no se anula, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(9 - x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$. Esa circunferencia (radio $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$) está dentro del disco abierto de radio 3.
> **Puntos a sacar:** los de la circunferencia que caen sobre la parábola: $x = -y^2$ en $x^2 + y^2 = 8$ da $y^4 + y^2 - 8 = 0$, $y^2 = (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}37$, o sea $(-(\sqrt{33} - 1)/2, \pm\sqrt{((\sqrt{33} - 1)/2)}) \approx (-2{,}37; \pm 1{,}54)$.
> **Resultado:** C_0 = circunferencia de centro (0, 0) y radio $2\sqrt{2}$ sin esos dos puntos (dos puntitos huecos a la izquierda).
> **Trampa:** olvidarse de que la parábola también está excluida del conjunto de nivel: en esos dos puntos f no existe.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$.

Si $h = f \circ \vec{g}$, calcule $h(1.95, -3.02)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $h(2, -3) = 0$, $\nabla h(2, -3) = (-2, 4)$, y $h(1.95, -3.02) \approx 0.02$.

Hipótesis: $\vec{g}$ es C^1, luego diferenciable en $(2, -3)$. $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$ es C^1 en el semiplano abierto $y > 0$, que contiene a $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$; por lo tanto f es diferenciable en $(2, 1)$. Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en $(2, -3)$ y vale la regla de la cadena en forma matricial: $Dh(2, -3) = Df(2, 1) \cdot D\vec{g}(2, -3)$.

f y su gradiente en (2, 1): $f(2, 1) = 2 \ln 1 + \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 0 = 0$. $f_x = \ln y + \frac{2}{3}x(1 - y)$, que en $(2, 1)$ da $0 + 0 = 0$; $f_y = x/y - \frac{1}{3}x^2$, que en $(2, 1)$ da $2 - 4/3 = 2/3$. **$\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$**.

Cadena: $\nabla h(2, -3) = (0, 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 1 + (2/3)(-3),\ 0\cdot 2 + (2/3)\cdot 6) = \mathbf{(-2, 4)}$. Y $h(2, -3) = f(\vec{g}(2, -3)) = f(2, 1) = 0$.

Aproximación lineal: como h es diferenciable en $(2, -3)$, cerca del punto $h(x, y) \approx h(2, -3) + h_x(2, -3)(x - 2) + h_y(2, -3)(y + 3)$. Con $(x, y) = (1.95, -3.02)$: $\Delta x = -0.05$ y $\Delta y = -0.02$.

Cuenta: $h(1.95, -3.02) \approx 0 + (-2)(-0.05) + 4(-0.02) = 0.1 - 0.08 = \mathbf{0.02}$.

Trampa: $\Delta y = -3.02 - (-3) = -0.02$, no $+0.02$: el signo del incremento en la coordenada negativa es lo que más se equivoca. Y f se evalúa en $(2, 1)$, no en $(2, -3)$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea Γ la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en los versores $\check{v}$ tangentes a Γ en ese punto.

Respuesta: $\check{v}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$: $f'(P, \check{v}_1) = 3\sqrt{2}$; $\check{v}_2 = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$: $f'(P, \check{v}_2) = -3\sqrt{2}$.

Planteo: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $F_2 = x^2 + z^2 - y$. $P = (1, 2, -1)$ está en Γ: $1 + 4 + 1 = 6$ y $1 + 1 = 2$ ✓.

Gradientes en P: $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) \to (2, 4, -2) \parallel (1, 2, -1)$; $\nabla F_2 = (2x, -1, 2z) \to (2, -1, -2)$. Son C^1 y no paralelos, así que Γ es regular en P y su tangente es perpendicular a ambos.

Tangente: $(1, 2, -1) \times (2, -1, -2) = (2\cdot(-2) - (-1)(-1),\ (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (-5, 0, -5) \parallel (1, 0, 1)$.

Versores tangentes: hay dos, uno por cada sentido: $\check{v}_1 = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ y $\check{v}_2 = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$.

Diferenciabilidad: $f = xy^2 + yz$ es polinómica, por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.

Gradiente de f: $\nabla f = (y^2, 2xy + z, y) \to \nabla f(P) = (4, 4 - 1, 2) = (4, 3, 2)$.

Cuentas: $f'(P, \check{v}_1) = (4 + 0 + 2)/\sqrt{2} = 6/\sqrt{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$; $f'(P, \check{v}_2) = -3\sqrt{2}$ (al cambiar el sentido, la derivada direccional cambia de signo).

Trampa: dar un solo versor (el enunciado pide “los versores”) o no normalizar $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto $(0, 2, 2)$ es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u\cos(v), u, u\,\mathrm{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Respuesta: L: $(x, y, z) = (0, 2, 2) + s(0, -1, 1)$. No tiene puntos en común con la curva (el sistema es incompatible).

Parámetros del punto: $\vec{\varphi}(u, v) = (0, 2, 2)$ pide $u = 2$ (segunda coordenada), $\cos v = 0$ y $\mathrm{sen}\, v = 1$, o sea $v = \pi/2$, que está en $[0, \pi]$ (y $u = 2$ en $[1, 3]$).

Normal: $\vec{\varphi}_u = (\cos v, 1, \mathrm{sen}\, v) = (0, 1, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v, 0, u\cos v) = (-2, 0, 0)$ en $(2, \pi/2)$. Producto vectorial: $(1\cdot 0 - 1\cdot 0,\ 1\cdot(-2) - 0\cdot 0,\ 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)) = (0, -2, 2) \neq \vec{0}$: el punto es regular. Director de L: $(0, -1, 1)$.

Control geométrico: Σ está sobre el cono $x^2 + z^2 = y^2$, cuyo gradiente $(2x, -2y, 2z)$ en $(0, 2, 2)$ es $(0, -4,$

4) $\parallel (0, -1, 1)$ ✓.
Recta normal: L: $(x, y, z) = (0, 2 - s, 2 + s)$, $s \in \mathbb{R}$.
Intersección con la curva: igualamos $(0, 2 - s, 2 + s) = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$. Primera coordenada: $t = 3$. Tercera: $2 + s = 2$, $s = 0$. Segunda: $2 - 0 = 2$ contra $t^2 + 1 = 10$. Contradicción: el sistema no tiene solución.
Resultado: L y la curva no tienen ningún punto en común. (El único punto de la curva con $x = 0$ es $(0, 10, 2)$, que no está en L.)
Trampa: usar el mismo parámetro para la recta y la curva. Tienen que ser parámetros distintos (s y t); con uno solo, el sistema cambia y podés sacar una conclusión falsa.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en $(1/2, 0)$ un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

Respuesta: $b = 2$ y $a > 0$ (cualquier a positivo). En $(1/2, 0)$ hay un mínimo local, de valor $f(1/2, 0) = -3/8$. Si $a < 0$ (con $b = 2$) el punto es silla.

Condición necesaria: f es polinómica, diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y $(1/2, 0)$ es interior; si allí hay extremo local, $\nabla f(1/2, 0) = (0, 0)$.
Derivadas: $f_x = ay^2 + 4bx^3 - 1$, $f_y = 2axy$.
En el punto: $f_x(1/2, 0) = 4b \cdot (1/8) - 1 = b/2 - 1 = 0$, así que **$b = 2$**. $f_y(1/2, 0) = 2a \cdot (1/2) \cdot 0 = 0$ vale para todo a: la primera condición no dice nada de a.
Hessiano: $f_{xx} = 12bx^2 = 12 \cdot 2 \cdot (1/4) = 6$; $f_{xy} = 2ay = 0$; $f_{yy} = 2ax = a$. $H(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\det H = 6a$.
Casos ($a \neq 0$): si **$a > 0$**, $\det H = 6a > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**. Si $a < 0$, $\det H < 0$: punto silla, no hay extremo.
Valor: $f(1/2, 0) = 0 + 2 \cdot (1/16) - 1/2 = 1/8 - 1/2 = \mathbf{-3/8}$ (no depende de a).
Resultado: $b = 2$, $a > 0$, mínimo local de valor $-3/8$.
Trampa: quedarse con $\nabla f = 0$ y contestar "$b = 2$, a cualquiera". Anular el gradiente es necesario pero no suficiente: con $a < 0$ el punto es crítico y es silla. (El caso $a = 0$, que daría $\det H = 0$, lo excluye el enunciado al pedir valores no nulos.)

9/5/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 + y)\,\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > -x^2,\ x^2 + y^2 \le 4\}$: el disco cerrado de radio 2 sin la parte que queda sobre o debajo de la parábola $y = -x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo. b) Nivel 0: el arco de la parábola $y = 1 - x^2$ con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)} \approx 1{,}52$ (extremos incluidos) unido con la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ salvo el arco inferior cerrado con $y \le (1 - \sqrt{17})/2 \approx -1{,}56$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(x^2 + y)$ pide $x^2 + y > 0$, o sea $y > -x^2$. La raíz (que multiplica, no divide) pide $4 - x^2 - y^2 \ge 0$, o sea $x^2 + y^2 \le 4$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x^2,\ x^2 + y^2 \le 4\}$.
> **Cortes:** $y = -x^2$ en la circunferencia: $x^2 + x^4 = 4 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{17} - 1)/2 \approx 1{,}56$. Puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{17} - 1)/2)}, -((\sqrt{17} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}25; -1{,}56)$.
> **Gráfico:** la circunferencia de radio 2 y la parábola $y = -x^2$ (vértice en el origen, abre hacia abajo). De la bola cerrada se saca la región de abajo de la parábola, que contiene al origen y al punto $(0, -2)$. Queda el disco con un "mordisco" abajo con forma de campana invertida: el borde circular que queda (todo salvo el arco inferior entre los puntos de corte) en trazo lleno y el arco de parábola en punteado.
> **Abierto:** no. $(0, 2) \in D$ ($2 > 0$ y $0 + 4 \le 4$), pero toda bola centrada en él tiene puntos con $x^2 + y^2 > 4$: no es interior.
> **Cerrado:** no. $(0, 0)$ es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, \varepsilon)$) y no pertenece a D ($0 > 0$ es falso).
> **Conexo:** sí. Desde cualquier $(x, y) \in D$, el segmento vertical hasta $(x, \sqrt{(4 - x^2)})$ queda en el disco (sus cortes verticales son intervalos) y arriba de la parábola (al subir, y sigue siendo $> -x^2$). Llegás así al arco superior de la circunferencia, que está todo en D (ahí $y \ge 0 > -x^2$, salvo en $(0, 2)$ donde $2 > 0$) y es una curva continua. D es arcoconexo.
> **b) Planteo:** f es un producto, así que en D: $f = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + y) = 0$ o $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)} = 0$. Las dos partes, siempre dentro de D.
> **Primer factor:** $\ln(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x^2$ (parábola de vértice $(0, 1)$ que abre hacia abajo). Cumple $y > -x^2$ siempre; falta estar en el disco: $x^2 + (1 - x^2)^2 \le 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le (1 + \sqrt{13})/2$. Es el arco con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)} \approx 1{,}52$, **con** sus extremos $(\pm 1{,}52;\ (1 - \sqrt{13})/2 \approx -1{,}30)$, que están sobre la circunferencia y en D.
> **Segundo factor:** $x^2 + y^2 = 4$ dentro de D, o sea los puntos de la circunferencia con $y > -x^2 = y^2 - 4 \Leftrightarrow y^2 - y - 4 < 0 \Leftrightarrow y > (1 - \sqrt{17})/2 \approx -1{,}56$. Es la circunferencia sin el arco inferior cerrado entre $(\pm 1{,}25; -1{,}56)$, que pasa por $(0, -2)$.
> **Resultado:** $C_0 = \{y = 1 - x^2,\ |x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{13})/2)}\} \cup \{x^2 + y^2 = 4,\ y > (1 - \sqrt{17})/2\}$. En el dibujo: la circunferencia con un hueco abajo y, adentro, la parábola $y = 1 - x^2$ que toca la circunferencia en sus dos extremos.
> **Trampa:** olvidarse del factor raíz (la circunferencia también da $f = 0$) o dibujarla entera: el arco de abajo no está en D porque ahí el ln no existe.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,x^2y - 2xy + b\,y^3$ tal que $(1, 1)$ es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f que tienen ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

> **Respuesta:** a) $a = 1$, $b = 1/3$. b) Con coordenadas no nulas: $(1, 1)$ es mínimo relativo, $f(1, 1) = -2/3$; $(1, -1)$ es máximo relativo, $f(1, -1) = 2/3$. (Los otros críticos, $(0, 0)$ y $(2, 0)$, tienen $y = 0$ y no se piden.)
>
> **a) Planteo:** f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que $(1, 1)$ es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = \vec{0}$. $f'_x = 2axy - 2y$, $f'_y = ax^2 - 2x + 3by^2$. En $(1, 1)$: $f'_x = 2a - 2 = 0$ da **$a = 1$**; $f'_y = a - 2 + 3b = 0$ da **$b = 1/3$**.
> **b) Puntos críticos:** ahora $f = x^2y - 2xy + y^3/3$, con $f'_x = 2xy - 2y = 2y(x - 1)$ y $f'_y = x^2 - 2x + y^2$. $f'_x = 0$ obliga a $y = 0$ o $x = 1$.
> **Caso $y = 0$:** $f'_y = x^2 - 2x = 0$ da $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Tienen una coordenada nula: no entran.
> **Caso $x = 1$:** $f'_y = 1 - 2 + y^2 = 0$ da $y = \pm 1$: **$(1, 1)$** y **$(1, -1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 2y$, $f''_{xy} = 2x - 2$, $f''_{yy} = 2y$, o sea $H = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2 \\ 2x - 2 & 2y \end{pmatrix}$.
> **En $(1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, $f(1, 1) = 1 - 2 + 1/3 = \mathbf{-2/3}$.
> **En $(1, -1)$:** $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**, $f(1, -1) = -1 + 2 - 1/3 = \mathbf{2/3}$.
> **Trampa:** en $2y(x - 1) = 0$ no dividas por y: separá los dos casos. Para descartar $(0, 0)$ y $(2, 0)$ primero hay que encontrarlos (por si te interesa, los dos son sillas: $\det H = -4$).

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de $(1, -1, 1)$, la ecuación
$\ln(x + y^2 - z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(-1, 1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((-1, 1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

> **Respuesta:** $\nabla g(-1, 1) = (3/2, 1/2)$. Máxima en $\check{v} = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$, con $g'((-1, 1), \check{v}) = \sqrt{10}/2$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = \ln(x + y^2 - z^2) - xyz - 1$ y queremos $x = g(y, z)$ cerca de $P = (1, -1, 1)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \ln(1 + 1 - 1) - (1)(-1)(1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $D = \{x + y^2 - z^2 > 0\}$, y $P \in D$ (ahí vale 1) ✓. (3) $F_x = \dfrac{1}{x + y^2 - z^2} - yz$, $F_x(P) = 1 - (-1)(1) = 2 \neq 0$ ✓. Luego existe un entorno de $(-1, 1)$ donde $x = g(y, z)$ es C^1, con $g(-1, 1) = 1$.
> **Derivadas de F en P:** $F_y = \dfrac{2y}{x + y^2 - z^2} - xz$, $F_y(P) = -2 - 1 = -3$. $F_z = \dfrac{-2z}{x + y^2 - z^2} - xy$, $F_z(P) = -2 - (1)(-1) = -1$.
> **Gradiente de g:** $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = 3/2$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = 1/2$. **$\nabla g(-1, 1) = (3/2, 1/2)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en $(-1, 1)$, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $g'((-1, 1), \check{v}) = \nabla g((-1, 1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. Es máxima con $\theta = 0$: $\check{v} = \nabla g/\|\nabla g\| = (3, 1)/\sqrt{10} = \mathbf{(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})}$, y vale **$\|\nabla g(-1, 1)\| = \sqrt{10}/2$**.
> **Trampa:** el gradiente se evalúa en $(y_0, z_0) = (-1, 1)$, no en el punto de $\mathbb{R}^3$. Y el signo menos de $-F_y/F_x$ es el error más caro: sin él te queda el versor opuesto, que es el del mínimo.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(x + y - z, xyz)$, con $f(u, v)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $L(u, v) = 1 + 2u - v$ es la aproximación lineal de f en el punto $(u_0, v_0) = (3, -1)$. Sea Σ la superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** $h(1, 1, -1) = f(3, -1) = 8$, así que $(1, 1, -1) \in \Sigma$. $\nabla h(1, 1, -1) = (3, 3, -3)$. Plano tangente: $x + y - z = 3$.
>
> **Punto interior:** en $(1, 1, -1)$ es $(u, v) = (x + y - z, xyz) = (3, -1)$, justo el punto donde está centrada L.
> **Qué dice L:** $L(u, v) = f(3, -1) + f_u(u - u_0) + f_v(v - v_0)$. Comparando con $1 + 2u - v$: **$\nabla f(3, -1) = (2, -1)$** y $f(3, -1) = L(3, -1) = 1 + 6 + 1 = 8$.
> **$(1, 1, -1) \in \Sigma$:** $h(1, 1, -1) = f(3, -1) = 8$ ✓.
> **Hipótesis:** f es C^1 y la interior es polinómica, así que h es C^1 (en particular diferenciable) y vale la regla de la cadena. Σ es el conjunto de nivel 8 de h; si $\nabla h(1, 1, -1) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita Σ es una superficie regular cerca del punto y $\nabla h(1, 1, -1)$ es normal a ella.
> **Jacobiana interior en (1, 1, –1):** la fila de $u = x + y - z$ es $(1, 1, -1)$ y la de $v = xyz$ es $(yz, xz, xy) = (-1, -1, 1)$.
> **Cadena:** $\nabla h(1, 1, -1) = f_u \cdot \nabla u + f_v \cdot \nabla v = 2(1, 1, -1) + (-1)(-1, -1, 1) = (2 + 1, 2 + 1, -2 - 1) =$ **$(3, 3, -3) \neq \vec{0}$**.
> **Plano tangente:** $3(x - 1) + 3(y - 1) - 3(z + 1) = 0$, es decir **$x + y - z = 3$**. Control: el punto lo cumple, $1 + 1 + 1 = 3$ ✓.
> **Trampa:** Σ no es el gráfico de h (h tiene tres variables): es una superficie de nivel, así que el plano es $\nabla h \cdot (X - P) = 0$, sin el "$z = \ldots$" del plano tangente a una gráfica. Y no te olvides de decir que $\nabla h \neq \vec{0}$: es lo que garantiza que el plano existe.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r^2 + s^2, r + s, r - s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto $(1, 1, -1)$.

> **Respuesta:** $(r, s) = (0, 1)$; $\vec{N} = (-3, 2, -2)$. Recta normal: $\vec{X} = (1, 1, -1) + t(-3, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **Paso 1, los parámetros del punto:** $\vec{X}(r, s) = (1, 1, -1)$ pide $r^2 + s^2 = 1$, $r + s = 1$, $r - s^2 = -1$. De la segunda, $r = 1 - s$; en la primera, $(1 - s)^2 + s^2 = 1$, o sea $2s^2 - 2s = 0$: $s = 0$ o $s = 1$. Con $s = 0$ queda $r = 1$ y $r - s^2 = 1 \neq -1$ ✗; con $s = 1$ queda $r = 0$ y $r - s^2 = -1$ ✓. Único par: **$(r, s) = (0, 1)$**.
> **Paso 2, derivadas:** $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_r = (2r, 1, 1) = (0, 1, 1)$, $\vec{X}_s = (2s, 1, -2s) = (2, 1, -2)$ en $(0, 1)$.
> **Paso 3, normal:** $\vec{N} = \vec{X}_r \times \vec{X}_s = (1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-2), 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) =$ **$(-3, 2, -2)$** $\neq \vec{0}$, así que el punto es regular y la recta normal existe.
> **Resultado:** $r_{\vec{N}}$: **$\vec{X} = (1, 1, -1) + t(-3, 2, -2)$**, $t \in \mathbb{R}$.
> **Control:** $\vec{N} \cdot \vec{X}_r = 0 + 2 - 2 = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{X}_s = -6 + 2 + 4 = 0$ ✓.
> **Trampa:** la segunda ecuación sola da dos candidatos; hay que chequear los tres componentes, porque $(1, 0)$ da $(1, 1, 1)$, que no es el punto pedido.

9/5/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 - y)\,\sqrt{(9 - x^2 - y^2)}$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y < x^2,\ x^2 + y^2 \le 9\}$: el disco cerrado de radio 3 sin la parte que queda sobre o arriba de la parábola $y = x^2$. No es abierto, no es cerrado, es conexo. b) Nivel 0: el arco de la parábola $y = x^2 - 1$ con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)} \approx 1{,}84$ (extremos incluidos) unido con la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ salvo el arco superior cerrado con $y \ge (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(x^2 - y)$ pide $x^2 - y > 0$, o sea $y < x^2$. La raíz (que multiplica, no divide) pide $9 - x^2 - y^2 \ge 0$, o sea $x^2 + y^2 \le 9$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2,\ x^2 + y^2 \le 9\}$.
> **Cortes:** $y = x^2$ en la circunferencia: $y + y^2 = 9 \Leftrightarrow y = (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$ (la otra raíz es negativa y no puede ser x^2). Puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$.
> **Gráfico:** la circunferencia de radio 3 y la parábola $y = x^2$ (vértice en el origen, abre hacia arriba). De la bola cerrada se saca la copa de adentro de la parábola, que contiene al origen y al punto (0, 3). Queda el disco con un "mordisco" arriba en forma de copa: el borde circular que queda (todo salvo el arco superior entre los puntos de corte) en trazo lleno y el arco de parábola en punteado.
> **Abierto:** no. $(0, -3) \in D$ ($-3 < 0$ y $0 + 9 \le 9$), pero toda bola centrada en él tiene puntos con $x^2 + y^2 > 9$: no es interior.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, -\varepsilon)$) y no pertenece a D ($0 < 0$ es falso).
> **Conexo:** sí. Desde cualquier $(x, y) \in D$, el segmento vertical hasta $(x, -\sqrt{(9 - x^2)})$ queda en el disco y debajo de la parábola (al bajar, y sigue siendo $< x^2$). Llegás así al arco inferior de la circunferencia, que está todo en D (ahí $y \le 0 < x^2$, salvo en $(0, -3)$ donde $-3 < 0$) y es una curva continua. D es arcoconexo.
> **b) Planteo:** f es un producto, así que en D: $f = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - y) = 0$ o $\sqrt{(9 - x^2 - y^2)} = 0$. Las dos partes, siempre dentro de D.
> **Primer factor:** $\ln(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$ (parábola de vértice $(0, -1)$). Cumple $y < x^2$ siempre; falta estar en el disco: $x^2 + (x^2 - 1)^2 \le 9 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le (1 + \sqrt{33})/2$. Es el arco con $|x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)} \approx 1{,}84$, **con** sus extremos $(\pm 1{,}84;\ (\sqrt{33} - 1)/2 \approx 2{,}37)$, que están sobre la circunferencia y en D.
> **Segundo factor:** $x^2 + y^2 = 9$ dentro de D, o sea los puntos de la circunferencia con $y < x^2 = 9 - y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 9 < 0 \Leftrightarrow y < (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$ (la otra raíz, $\approx -3{,}54$, queda fuera de la circunferencia). Es la circunferencia sin el arco superior cerrado entre $(\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$, que pasa por (0, 3).
> **Resultado:** $C_0 = \{y = x^2 - 1,\ |x| \le \sqrt{((1 + \sqrt{33})/2)}\} \cup \{x^2 + y^2 = 9,\ y < (\sqrt{37} - 1)/2\}$. En el dibujo: la circunferencia con un hueco arriba y, adentro, la parábola $y = x^2 - 1$ que toca la circunferencia en sus dos extremos.
> **Trampa:** olvidarse del factor raíz (la circunferencia también da $f = 0$) o dibujarla entera: el arco de arriba no está en D porque ahí el ln no existe.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,xy^2 - 2xy + b\,x^3$ tal que $(1, 1)$ es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f q[ilegible] ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

> **Respuesta:** a) $a = 1$, $b = 1/3$. b) Con coordenadas no nulas: $(1, 1)$ es mínimo relativo, $f(1, 1) = -2/3$; $(-1, 1)$ es máximo relativo, $f(-1, 1) = 2/3$. (Los otros críticos, $(0, 0)$ y $(0, 2)$, tienen $x = 0$ y no se piden.)
>
> **Lectura del enunciado:** la foto corta el renglón del ítem b) después de "f q". Se asume "que tienen ambas coordenadas no nulas", que es lo que dice el Tema 1 del mismo parcial y lo que pide el renglón siguiente.
> **a) Planteo:** f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que $(1, 1)$ es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = \vec{0}$. $f'_x = ay^2 - 2y + 3bx^2$, $f'_y = 2axy - 2x$. En $(1, 1)$: $f'_y = 2a - 2 = 0$ da **$a = 1$**; $f'_x = a - 2 + 3b = 0$ da **$b = 1/3$**.
> **b) Puntos críticos:** ahora $f = xy^2 - 2xy + x^3/3$, con $f'_x = y^2 - 2y + x^2$ y $f'_y = 2xy - 2x = 2x(y - 1)$. $f'_y = 0$ obliga a $x = 0$ o $y = 1$.
> **Caso $x = 0$:** $f'_x = y^2 - 2y = 0$ da $(0, 0)$ y $(0, 2)$. Tienen una coordenada nula: no entran.
> **Caso $y = 1$:** $f'_x = 1 - 2 + x^2 = 0$ da $x = \pm 1$: **$(1, 1)$** y **$(-1, 1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 2x$, $f''_{xy} = 2y - 2$, $f''_{yy} = 2x$, o sea $H = \begin{pmatrix} 2x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix}$.
> **En $(1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, $f(1, 1) = 1 - 2 + 1/3 = \mathbf{-2/3}$.
> **En $(-1, 1)$:** $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**, $f(-1, 1) = -1 + 2 - 1/3 = \mathbf{2/3}$.
> **Trampa:** en $2x(y - 1) = 0$ no dividas por x: separá los dos casos. Para descartar $(0, 0)$ y $(0, 2)$ primero hay que encontrarlos (por si te interesa, los dos son sillas: $\det H = -4$).

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de $(1, 1, -1)$, la ecuación
$\ln(x - y^2 + z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(1, -1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((1, -1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

> **Respuesta:** $\nabla g(1, -1) = (1/2, 3/2)$. Máxima en $\check{v} = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, con $g'((1, -1), \check{v}) = \sqrt{10}/2$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = \ln(x - y^2 + z^2) - xyz - 1$ y queremos despejar $x = g(y, z)$ cerca de $P = (1, 1, -1)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \ln(1 - 1 + 1) - (1)(1)(-1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $D = \{x - y^2 + z^2 > 0\}$ (ln de un polinomio positivo, más un polinomio), y $P \in D$ porque ahí $x - y^2 + z^2 = 1 > 0$ ✓. (3) La derivada respecto de la variable que se despeja, x: $F_x = \dfrac{1}{x - y^2 + z^2} - yz$, $F_x(P) = 1 - (1)(-1) = 2 \neq 0$ ✓. Entonces existe un entorno de $(1, -1)$ donde $x = g(y, z)$ es C^1, con $g(1, -1) = 1$ y $F(g(y, z), y, z) = 0$.
> **Derivadas de F en P:** $F_y = \dfrac{-2y}{x - y^2 + z^2} - xz$, $F_y(P) = -2 - (1)(-1) = -1$. $F_z = \dfrac{2z}{x - y^2 + z^2} - xy$, $F_z(P) = -2 - 1 = -3$.
> **Gradiente de g:** $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = -(-1)/2 = 1/2$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = -(-3)/2 = 3/2$. **$\nabla g(1, -1) = (1/2, 3/2)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en $(1, -1)$, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $g'((1, -1), \check{v}) = \nabla g((1, -1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. Es máxima cuando $\theta = 0$, o sea $\check{v}$ en la dirección y sentido del gradiente: $\check{v} = \nabla g/\|\nabla g\| = (1, 3)/\sqrt{10} = \mathbf{(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})}$, y el máximo vale **$\|\nabla g(1, -1)\| = \sqrt{(1/4 + 9/4)} = \sqrt{10}/2$**.

> **Trampa:** la derivada que tiene que ser no nula es la de la variable que se despeja (acá F_x, no F_z), y ∇g tiene dos componentes (en y y en z), no tres.

Ejercicio 4. Sea h(x, y, z) = f(xyz, x + y − z), con f(u, v) una función de clase C^1(ℝ[ilegible] L(u, v) = 1 − u + 2v es la aproximación lineal de f en el punto (u_0, v_0) = (−1, 3[ilegible] superficie definida por
Σ: h(x, y, z) = 8.
Pruebe que (1, 1, −1) ∈ Σ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

> **Respuesta:** h(1, 1, −1) = f(−1, 3) = 8, así que (1, 1, −1) ∈ Σ. $\nabla h(1, 1, -1) = (3, 3, -3)$. Plano tangente: x + y − z = 3.
>
> En la foto un dedo tapa el final de dos renglones; se lee como en el Tema 1: f de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y el punto (u_0, v_0) = (−1, 3), que es justamente (xyz, x + y − z) en (1, 1, −1).
> **Punto interior:** en (1, 1, −1) es (u, v) = (xyz, x + y − z) = (−1, 3), justo el punto donde está centrada L.
> **Qué dice L:** $L(u, v) = f(-1, 3) + f_u(u - u_0) + f_v(v - v_0)$. Comparando con 1 − u + 2v: **$\nabla f(-1, 3) = (-1, 2)$** y f(−1, 3) = L(−1, 3) = 1 + 1 + 6 = 8.
> **(1, 1, −1) ∈ Σ:** h(1, 1, −1) = f(−1, 3) = 8 ✓.
> **Hipótesis:** f es C^1 y la interior es polinómica, así que h es C^1 (en particular diferenciable) y vale la regla de la cadena. Σ es el conjunto de nivel 8 de h; si $\nabla h(1, 1, -1) \neq \vec{0}$, por el teorema de la función implícita Σ es una superficie regular cerca del punto y $\nabla h(1, 1, -1)$ es normal a ella.
> **Jacobiana interior en (1, 1, −1):** la fila de u = xyz es (yz, xz, xy) = (−1, −1, 1) y la de v = x + y − z es (1, 1, −1).
> **Cadena:** $\nabla h(1, 1, -1) = f_u \cdot \nabla u + f_v \cdot \nabla v = (-1)(-1, -1, 1) + 2(1, 1, -1) = (1 + 2, 1 + 2, -1 - 2) =$ **(3, 3, −3)** $\neq \vec{0}$.
> **Plano tangente:** 3(x − 1) + 3(y − 1) − 3(z + 1) = 0, es decir **x + y − z = 3**. Control: el punto lo cumple, 1 + 1 + 1 = 3 ✓.
> **Trampa:** Σ no es el gráfico de h (h tiene tres variables): es una superficie de nivel, así que el plano es $\nabla h \cdot (X - P) = 0$, sin el "z = ..." del plano tangente a una gráfica. Y no te olvides de decir que $\nabla h \neq \vec{0}$: es lo que garantiza que el plano existe.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r - s^2, r + s, r^2 + s^2)$, (r, s) ∈ ℝ².
Halle la recta normal a Σ en el punto (−1, 1, 1).

> **Respuesta:** (r, s) = (0, 1); $\vec{N} = (2, -2, 3)$. Recta normal: $\vec{X} = (-1, 1, 1) + t(2, -2, 3)$, t ∈ ℝ.
>
> **Paso 1, los parámetros del punto:** $\vec{X}(r, s) = (-1, 1, 1)$ pide $r - s^2 = -1$, $r + s = 1$, $r^2 + s^2 = 1$. Con r = 1 − s en la tercera: $2s^2 - 2s = 0$, s = 0 o s = 1. Con s = 0 queda r = 1 y $r - s^2 = 1 \neq -1$ ✗; con s = 1 queda r = 0 y $r - s^2 = -1$ ✓. Único par: **(r, s) = (0, 1)**.
> **Paso 2, derivadas:** $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_r = (1, 1, 2r) = (1, 1, 0)$, $\vec{X}_s = (-2s, 1, 2s) = (-2, 1, 2)$ en (0, 1).
> **Paso 3, normal:** $\vec{N} = \vec{X}_r \times \vec{X}_s = (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1, 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) =$ **(2, −2, 3)** $\neq \vec{0}$: punto regular, la recta normal existe.
> **Resultado:** $r_{\vec{N}}$: **$\vec{X} = (-1, 1, 1) + t(2, -2, 3)$**, t ∈ ℝ.
> **Control:** $\vec{N} \cdot \vec{X}_r = 2 - 2 + 0 = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{X}_s = -4 - 2 + 6 = 0$ ✓.
> **Trampa:** la componente del medio $\vec{X}_s$ se olvida seguido: $(r + s)'_s = 1$, no 0. Y el par (1, 0) cumple dos de las tres ecuaciones pero no es el punto.

3/3/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ tal que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $C^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuaciones
$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \wedge z + y = 2$
sabiendo que $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x, x + z, y - 2)$. Indique claramente en un gráfico la orientación de C que eligió para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con C antihoraria vista desde arriba (normal (0, 1, 1)): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$. En el sentido contrario, -2π.
>
> **Planteo:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{s}$.
>
> **La curva:** $x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$: un cilindro elíptico con centro (1, 0) y semiejes 2 (en x) y 1 (en y). Cortado con el plano $z = 2 - y$ da una elipse cerrada C; una parametrización es $\vec{X}(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
> **Parte de gradiente:** $\phi \in C^2$ y C es cerrada, así que $\oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{s} = \phi(\text{punto final}) - \phi(\text{punto inicial}) = \mathbf{0}$.
> **Superficie elegida:** Σ es el pedazo del plano $z = 2 - y$ que queda dentro del cilindro: $z = 2 - y$ con $(x, y) \in D = \{(x-1)^2 + 4y^2 \le 4\}$. Su borde es exactamente C. Stokes vale para cualquier superficie regular con borde C; el plano es lo más cómodo (normal constante). Área de D: $\pi \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$.
> **Hipótesis de Stokes:** $\vec{g}$ tiene componentes C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es un trozo de plano, regular y orientable; C es una curva cerrada simple y suave.
> **Orientación elegida (el gráfico):** dibujá la elipse sobre el plano inclinado, más alta del lado $y < 0$ (pasa por (1, −1, 3)) y más baja del lado $y > 0$ (pasa por (1, 1, 1)), con flechas que giran en sentido antihorario mirando desde arriba (desde z positivo): de (3, 0, 2) a (1, 1, 1), a (−1, 0, 2), a (1, −1, 3). La parametrización de arriba la recorre así. Con la regla de la mano derecha, los dedos siguiendo ese giro dejan el pulgar hacia arriba: la normal compatible es $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 1, 1)$, que se integra en dx dy.
> **Flujo del rotor:** $(\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{n} = (x, x + z, y - 2) \cdot (0, 1, 1) = x + z + y - 2$, y sobre Σ ($z = 2 - y$) queda $x + 2 - y + y - 2 = \mathbf{x}$. Con $x = 1 + 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ (jacobiano 2r), $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r\cos\theta)\,2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [r^2 + \frac{4}{3}r^3\cos\theta]_0^1\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1 + \frac{4}{3}\cos\theta)\,d\theta = [\theta + \frac{4}{3}\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} =$ **2π**. (Atajo: es $\bar{x} \cdot$ área(D) $= 1 \cdot 2\pi$, porque el centro de la elipse tiene $x = 1$.)
> **Resultado:** con C antihoraria vista desde arriba, $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + 2\pi = \mathbf{2\pi}$. Si la orientás al revés, da -2π.
> **Trampa:** el término z del rotor no es constante: hay que reemplazar $z = 2 - y$ antes de integrar, y recién ahí se simplifica todo a x. Detalle del enunciado: la divergencia de $(x, x + z, y - 2)$ es 1, y el rotor de un campo C^1 tiene divergencia nula, así que estrictamente ningún $\vec{g}$ tiene ese rotor y el resultado dependería de la superficie. Con la superficie natural, el trozo de plano, da 2π, que es lo que se espera.

Ejercicio 2. Calcule el volumen de la porción de la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio 2 que está contenida en el cilindro sólido definido por $x^2 + z^2 \le 1$.

> **Respuesta:** $V = 32\pi/3 - 4\sqrt{3}\,\pi = (4\pi/3)(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74$.
>
> **Planteo:** el sólido es $B \cap C$, con B: $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ (bola de radio 2) y C: $x^2 + z^2 \le 1$, un cilindro circular macizo de radio 1 **cuyo eje es el eje y** (la variable que falta en la ecuación es la del eje). $V = \iiint_{B\cap C} dV$.
> **Cómo es:** el cilindro atraviesa la bola a lo largo del eje y. La superficie cilíndrica corta a la esfera donde

$x^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o sea $y^2 = 3$: dos circunferencias de radio 1 en los planos $y = \pm\sqrt{3}$. Para $|y| \le \sqrt{3}$ el sólido es un tramo de cilindro; para $\sqrt{3} \le |y| \le 2$ son dos casquetes esféricos (ahí las tapas las pone la esfera). Es simétrico respecto del plano $y = 0$.

Coordenadas: cilíndricas con eje y: $x = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, $y = y$. Es el cambio cilíndrico de siempre con los papeles de las variables cambiados, así que $|\text{jacobiano}| = r$. Rangos: $x^2 + z^2 = r^2 \le 1$ da $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$; la bola da $r^2 + y^2 \le 4$, o sea $-\sqrt{(4 - r^2)} \le y \le \sqrt{(4 - r^2)}$ (con $r \le 1$ esa raíz vale al menos $\sqrt{3}$, siempre hay segmento).

Cuenta: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{(4-r^2)}}^{\sqrt{(4-r^2)}} r \, dy \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{(4 - r^2)} \, dr$. Primitiva de $2r\sqrt{(4 - r^2)}$: $-\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2}$, entre 0 y 1: $-\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 8) = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$. Entonces $V = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$.

Resultado: $\mathbf{V = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 11{,}74}$. Control de tamaño: el cilindro de radio 1 y largo 4 tiene $4\pi \approx 12{,}57$, y la bola le recorta las puntas: da un poco menos, razonable.

Control por rebanadas: cortando con planos $y = c$, la sección es el disco $x^2 + z^2 \le \text{mín}(1, 4 - c^2)$: área π si $|c| \le \sqrt{3}$, y $\pi(4 - c^2)$ si $\sqrt{3} \le |c| \le 2$. $V = 2[\int_0^{\sqrt{3}} \pi \, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \pi(4 - y^2) \, dy] = 2\pi[\sqrt{3} + (8 - \frac{8}{3}) - (4\sqrt{3} - \sqrt{3})] = 2\pi(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}) = \frac{32\pi}{3} - 4\sqrt{3}\,\pi$ ✓.

Trampa: usar cilíndricas de eje z ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$) cuando el cilindro tiene eje y; o poner y entre -2 y 2 para todo r, sin ver que la esfera recorta los extremos.

Ejercicio 3.

Sea Σ la superficie definida por

$z = x^2 \wedge x \ge 0 \wedge z \le 9 \wedge -1 \le y \le 1$.

Calcule la integral del campo escalar $h(x, y, z) = xy^2$ sobre Σ.

Respuesta: $\iint_\Sigma h \, dS = \frac{37\sqrt{37} - 1}{18} \approx 12{,}45$.

Planteo: $z = x^2$ es un cilindro parabólico (la parábola del plano xz trasladada paralela al eje y). $\iint_\Sigma h \, dS = \iint_D h(\vec{X}(x, y)) \, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| \, dx \, dy$.

Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, x^2)$.

Dominio D: $z \le 9$ es $x^2 \le 9$ y con $x \ge 0$ queda $0 \le x \le 3$; además $-1 \le y \le 1$. $D = [0, 3] \times [-1, 1]$.

Vector normal: $\vec{X}_x = (1, 0, 2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, 0)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (-2x, 0, 1)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_y\| = \sqrt{(1 + 4x^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Integrando: $h(\vec{X}(x, y)) = xy^2$, así que la integral es $\int_0^3 \int_{-1}^1 xy^2 \sqrt{(1 + 4x^2)} \, dy \, dx$, y como D es un rectángulo y el integrando es producto de una función de x por una de y, se separa.

Cuenta: integral en y: primitiva $\frac{y^3}{3}$, entre -1 y 1 da $\frac{2}{3}$. Integral en x: $\int_0^3 x\sqrt{(1 + 4x^2)} \, dx$, con $w = 1 + 4x^2$, $dw = 8x \, dx$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Producto: $\frac{2}{3} \cdot \frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$.

Resultado: $\iint_\Sigma h \, dS = \mathbf{\frac{37\sqrt{37} - 1}{18}} \approx 12{,}45$.

Control (otra parametrización): con (z, y): $\vec{X}(z, y) = (\sqrt{z}, y, z)$, $0 \le z \le 9$, $-1 \le y \le 1$, norma $\sqrt{(1 + \frac{1}{4z})}$ y $h = \sqrt{z}\, y^2$; integrado numéricamente da 12,4479 ✓.

Trampa: y^2 es par, así que la integral en y no se anula por simetría (da 2/3). Y el cilindro no se proyecta sobre el plano xz: los parámetros son x e y.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(x)y^2, yx + \varphi(x)y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, un campo conservativo tal que $\vec{f}(0, 1) = (1, 1)$. Halle φ y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva Γ suave a trozos con punto inicial $(0, 1)$ y punto final $(0, 0)$.

> **Respuesta:** $\varphi(x) = (1 + e^{2x})/2$; $U = (y^2/4)(2x + e^{2x} + 1)$; circulación $= -1/2$.
>
> **Planteo:** "conservativo" quiere decir campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$. $\vec{f} = (P, Q)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $\varphi \in C^1$. Si $\vec{f}$ es de gradientes, $\vec{f} = \nabla U$ con U de clase C^2, y por Schwarz $P'_y = U''_{xy} = U''_{yx} = Q'_x$: esa es la condición necesaria que da la ecuación para φ.
> **La EDO:** $P = \varphi(x)y^2$, $Q = yx + \varphi(x)y$. $P'_y = 2\varphi(x)y$; $Q'_x = y + \varphi'(x)y$. Igualando: $y(\varphi' + 1 - 2\varphi) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, $\boldsymbol{\varphi' = 2\varphi - 1}$.
> **Dato:** $\vec{f}(0, 1) = (\varphi(0)\cdot 1, 0 + \varphi(0)\cdot 1) = (\varphi(0), \varphi(0)) = (1, 1) \Rightarrow \varphi(0) = 1$.
> **EDO lineal:** $\varphi' - 2\varphi = -1$. Con factor integrante e^{-2x}: $(\varphi\, e^{-2x})' = -e^{-2x} \Rightarrow \varphi\, e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{2} + K \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{1}{2} + K\, e^{2x}$. Con $\varphi(0) = 1$: $K = \dfrac{1}{2}$. Queda $\boldsymbol{\varphi(x) = \dfrac{1 + e^{2x}}{2}}$.
> **Suficiencia:** con esa φ, $P'_y = Q'_x = y(1 + e^{2x})$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes (además lo confirma el potencial que sigue).
> **Potencial:** $U'_x = \dfrac{1 + e^{2x}}{2}y^2 \Rightarrow U = y^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{e^{2x}}{4}\right) + h(y)$. Derivando en y: $y\left(x + \dfrac{e^{2x}}{2}\right) + h'(y)$, que tiene que ser $Q = xy + \dfrac{y}{2} + \dfrac{y\, e^{2x}}{2} \Rightarrow h'(y) = \dfrac{y}{2}$, $h = \dfrac{y^2}{4} + K$. Así $U(x, y) = \dfrac{y^2}{4}(2x + e^{2x} + 1) + K$.
> **Circulación:** como $\vec{f} = \nabla U$ en $\mathbb{R}^2$, la circulación sobre cualquier Γ suave a trozos de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ depende sólo de los extremos: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = U(0, 0) - U(0, 1) = 0 - \dfrac{1}{4}(0 + 1 + 1) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$.
>
> **Trampa:** no se conoce Γ y no hace falta: ese es el punto de que el campo sea de gradientes. El orden es U(final) − U(inicial); al revés da $+1/2$. Y ojo con P'_y: $\varphi(x)$ no depende de y, pero y^2 sí (sale $2\varphi y$).

Ejercicio 5. Sea Σ la frontera del cuerpo

$$x^2 + y^2 \le z \le 4$$

y sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1 del cual se sabe que $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z & 0 & x \\ -y^2 & -2x & 0 \\ 0 & 2 & 2z \end{pmatrix}$.

Calcule $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma$. Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con normal exterior (hacia afuera y abajo en el paraboloide, $(0, 0, 1)$ en la tapa $z = 4$): $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma = 64\pi$. Con la interior sería -64π.
>
> **Planteo:** el cuerpo es M: $x^2 + y^2 \le z \le 4$ (dentro del paraboloide, debajo del plano). $\Sigma = \partial M$ es cerrada y suave a trozos: el trozo de paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 4$ y la tapa $z = 4$, $x^2 + y^2 \le 4$.
> **Orientación (el gráfico):** elijo la normal **exterior**: en la tapa $\check{n} = (0, 0, 1)$, hacia arriba; en el paraboloide apunta hacia afuera del cuenco y hacia abajo, con la dirección de $(2x, 2y, -1)$.
> **Hipótesis de Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (dato), Σ es cerrada y orientada hacia afuera: $\oiint_\Sigma \vec{f}\cdot \check{n}\, d\sigma = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.
> **Divergencia:** $\nabla\cdot\vec{f} = \partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y + \partial f_3/\partial z$, que son los elementos de la diagonal de $D\vec{f}$: $(2x + z) + (-2x) + 2z = \mathbf{3z}$.
> **Región:** en cilíndricas, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$ (el paraboloide llega a $z = 4$ en $r = 2$), $r^2 \le z \le 4$, jacobiano r.

Cuenta: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} 3z \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$. En z, primitiva $\frac{3}{2}z^2$: $\frac{3}{2}(16 - r^4)\, r$. En r: $\int_0^{2} (24r - \frac{3}{2}r^5)\, dr = [12r^2 - \frac{r^6}{4}]_0^{2} = 48 - 16 = 32$. En θ: $2\pi \cdot 32 = 64\pi$.

Resultado: con normal exterior, $\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \check{n} \, d\sigma = 64\pi$ (con la interior, -64π).

Detalle: de $\vec{Df}$ sólo se usa la diagonal. (Si mirás las derivadas cruzadas de f_2, $\partial/\partial y(-y^2) = -2y$ no coincide con $\partial/\partial x(-2x) = -2$, así que la matriz no es exactamente la jacobiana de ningún campo; para este cálculo no importa.)

Trampa: la divergencia es la traza ($\partial f_i/\partial x_i$), no la suma de una fila ni de una columna. Y el gráfico con la orientación es parte de la respuesta: el signo depende de él.

24/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $g(x, y) = xf(y) + yf(x) + 4x^2 + 2xy + y^2$; con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Demuestre que el punto (0, 0) es un punto crítico de g y clasifíquelo.

> **Respuesta:** $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, así que (0, 0) es punto crítico. $Hg(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = -20 < 0$: es punto silla (no hay extremo; $g(0, 0) = 0$).
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}$, así que x f(y), y f(x) y el polinomio son C^2 en $\mathbb{R}^2$: g es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto) y sirve el criterio del hessiano.
> **Gradiente:** $g'_x = f(y) + y\,f'(x) + 8x + 2y$, $g'_y = x\,f'(y) + f(x) + 2x + 2y$.
> **En el origen:** $g'_x(0, 0) = f(0) + 0 \cdot f'(0) + 0 = 0$ y $g'_y(0, 0) = 0 \cdot f'(0) + f(0) + 0 = 0$. Entonces $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$: **(0, 0) es punto crítico**.
> **Derivadas segundas:** $g''_{xx} = y\,f''(x) + 8$, $g''_{xy} = f'(y) + f'(x) + 2$, $g''_{yy} = x\,f''(y) + 2$. En (0, 0): $g''_{xx} = 0 \cdot f''(0) + 8 = 8$, $g''_{xy} = 2 + 2 + 2 = 6$, $g''_{yy} = 0 \cdot f''(0) + 2 = 2$. ($f''(0)$ no es dato, pero no hace falta: siempre aparece multiplicada por 0.)
> **Hessiano:** $Hg(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 16 - 36 = -20 < 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $g''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
> **Clasificación:** como $\det < 0$, (0, 0) es un **punto silla**: g no tiene extremo relativo ahí ($g(0, 0) = 0$).
> **Trampa:** en g''_{xy} hay dos aportes de f': $f'(y)$ viene de derivar x f(y) (primero en x, después en y) y $f'(x)$ viene de y f(x). Si te olvidás uno queda $g''_{xy} = 4$, $\det = 16 - 16 = 0$ y el criterio no decide: ese error te deja sin respuesta.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (π, 1, 0) la ecuación

$$\frac{x}{y} + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 = \pi,$$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto (π, 1, 0).

> **Respuesta:** $\nabla f(\pi, 1) = (-1/\pi, 1)$. Plano tangente: $x - \pi y + \pi z = 0$ (o sea $z = y - x/\pi$).
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = x/y + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 - \pi$, $P = (\pi, 1, 0)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = \pi/1 + \operatorname{sen} 0 + 0 - \pi = 0$ ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{y \neq 0\}$, que contiene a P ($y = 1$) ✓. (3) $F_z = x\cos(xz) + 4yz$, $F_z(P) = \pi \cos 0 + 0 = \pi \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (π, 1), con $f(\pi, 1) = 0$.
> **Derivadas:** $F_x = 1/y + z\cos(xz)$, $F_x(P) = 1$. $F_y = -\frac{x}{y^2} + 2z^2$, $F_y(P) = -\pi$. $f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -1/\pi$, $f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -(-\pi)/\pi = 1$.
> **Plano tangente:** f es diferenciable en (π, 1), así que el gráfico tiene plano tangente $z = f(\pi, 1) + f_x(x - \pi) + f_y(y - 1) = -(x - \pi)/\pi + (y - 1) = y - x/\pi$. Multiplicando por π: **$x - \pi y + \pi z = 0$**.
> **Control:** el gráfico de f es la superficie $F = 0$ cerca de P, así que la normal también es $\nabla F(P) = (1, -\pi, \pi)$: coincide. Y P lo cumple: $\pi - \pi + 0 = 0$ ✓.

> **Trampa:** el término x/y depende de y: su derivada es $-x/y^2$, no 0. Si te la olvidás te queda $f_y = 0$ y el plano sale mal.

Ejercicio 3. Sea $h = f \circ \vec{g}$, con $f(x, y) = x + xy^2$, y $\vec{g}(u, v) = (au + v, v)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halle el valor de a para que el versor en el cual se produce la máxima derivada direccional de h en el punto (0, 1) sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Indique el valor de esa derivada direccional máxima.

> **Respuesta:** $\nabla h(0, 1) = (2a, 4)$; $a = -2$, y entonces $\nabla h(0, 1) = (-4, 4)$. La derivada direccional máxima vale $4\sqrt{2}$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(0, 1) = (a \cdot 0 + 1, 1) = (1, 1)$, para cualquier a.
> **Hipótesis:** f y $\vec{g}$ son polinómicas, C^∞; h es diferenciable y vale la regla de la cadena, y también $h'((0, 1), \check{v}) = \nabla h(0, 1) \cdot \check{v}$.
> **Gradientes:** $\nabla f(x, y) = (1 + y^2, 2xy)$, en (1, 1) da (2, 2). $D\vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
> **Cadena:** $\nabla h(0, 1) = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2a, 2 + 2) =$ **$(2a, 4)$**. (Se puede controlar derivando $h(u, v) = (au + v)(1 + v^2)$ directo.)
> **Condición:** la derivada direccional máxima se produce en $\check{v} = \nabla h / \|\nabla h\|$ (por Cauchy Schwarz, $\nabla h \cdot \check{v} \leq \|\nabla h\|$). Pedir que eso sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ equivale a $\nabla h(0, 1) = \lambda(-1, 1)$ con **$\lambda > 0$**. La segunda componente da $\lambda = 4 > 0$ ✓, y la primera, $2a = -4$, o sea **$a = -2$**.
> **Valor máximo:** con $a = -2$, $\nabla h(0, 1) = (-4, 4)$ y $\|\nabla h\| = \sqrt{32} =$ **$4\sqrt{2}$**.
> **Trampa:** no alcanza con que ∇h sea paralelo a $(-1, 1)$: si saliera $\lambda < 0$, ese versor sería el de la derivada *mínima*. Acá $\lambda = 4$ es positivo, por eso $a = -2$ sirve.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0$. $\}$

a) Grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Calcule, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, (Sugerencia: Utilice el resultado del ítem anterior).

> **Respuesta:** a) C_0 = eje y ($x = 0$). C_1 = circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ sin el origen. b) El límite no existe: por el eje y da 0 y por la circunferencia C_1 da 1.
>
> **a) Nivel 0:** $C_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Si $x = 0$, f vale 0 por definición: todo el eje y está en C_0. Si $x \neq 0$, $\dfrac{x^2 + y^2}{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, que contradice $x \neq 0$. Entonces **C_0 es el eje y** (la recta $x = 0$, con el origen incluido).
>
> **Nivel 1:** si $x = 0$ la función vale $0 \neq 1$, así que necesariamente $x \neq 0$ y $\dfrac{x^2 + y^2}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$. Es la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1, que pasa por el origen; como el origen tiene $x = 0$ hay que sacarlo. **$C_1 = \{(x - 1)^2 + y^2 = 1\}$ sin el punto (0, 0)**.
> **Gráfico:** el eje y entero (nivel 0) y la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1, tangente al eje y en el origen, con el origen como punto vacío (nivel 1).
> **b) Planteo:** si el límite existiera, tendría que dar lo mismo por cualquier camino que llegue al origen. Usamos los dos conjuntos de nivel.
> **Camino 1, el eje y** ($x = 0$, $y \to 0$): f vale 0 en todos sus puntos, el límite por ahí es 0.
> **Camino 2, la circunferencia C_1:** parametrizada como $(1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \to 0^+$, tiende a (0, 0) y para

$t \neq 0$ chico es $x = 1 - \cos t > 0$, así que f vale 1 en todos sus puntos: el límite por ahí es 1.
Conclusión: $0 \neq 1$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ **f(x, y) no existe**.
Trampa: por todas las rectas el límite da 0 (por $y = mx$, $f = (1 + m^2)x/2 \to 0$; por $x = 0$ vale 0), y eso tienta a decir que el límite es 0. Pero que dé lo mismo por todas las rectas no prueba que exista. Acá el problema aparece por curvas tangentes al eje y: en general el nivel $k \neq 0$ es la circunferencia $(x - k)^2 + y^2 = k^2$ sin el origen, y todas pasan por (0, 0), así que cerca del origen f toma cualquier valor.

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies de ecuaciones $z = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}$.
Calcule el o los puntos de C donde la recta tangente resulta paralela al eje y.

Respuesta: (1, 0, 1) y (–1, 0, 1).

Las superficies: $F = x^2 + y^2 - z$ y $G = x^2 + y^2/4 + z - 2$, ambas C^1, con $\nabla F = (2x, 2y, -1)$ y $\nabla G = (2x, y/2, 1)$.
Dirección tangente en un punto de C: $\vec{T} = \nabla F \times \nabla G = (2y\cdot 1 - (-1)\cdot(y/2), (-1)\cdot 2x - 2x\cdot 1, 2x\cdot(y/2) - 2y\cdot 2x) = (5y/2, -4x, -3xy)$. $\vec{T}$ no se anula sobre C: haría falta $x = y = 0$, y (0, 0, z) no puede cumplir a la vez $z = 0$ y $z = 2$. Así que C es regular en todo punto.
Condición: paralela al eje y quiere decir $\vec{T} \parallel (0, 1, 0)$: primera y tercera componentes nulas. $5y/2 = 0$ da $y = 0$, y entonces $-3xy = 0$ se cumple sola.
Puntos de C con y = 0: igualando las z, $x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2/4$, o sea $2x^2 + (5/4)y^2 = 2$ (la proyección de C es una elipse). Con $y = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, y $z = x^2 + y^2 = 1$.
Resultado: (1, 0, 1) y **(–1, 0, 1)**, con $\vec{T} = (0, -4, 0)$ y (0, 4, 0) respectivamente: no nulos y paralelos al eje y ✓.
Control con parametrización: $x = \cos t$, $y = \sqrt{(8/5)}\,\operatorname{sen} t$, $z = x^2 + y^2 = 1 + (3/5)\operatorname{sen}^2 t$; $x' = -\operatorname{sen} t$ y $z' = (3/5)\operatorname{sen} 2t$ se anulan juntas sólo en $t = 0$ y $t = \pi$, que son los mismos dos puntos ✓.
Trampa: “paralela al eje y” pide *dos* componentes nulas (la x y la z), no una sola; con una sola condición te quedarías con la respuesta de “paralela a un plano coordenado”, que es otra pregunta.

24/2/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y \le z \le 9 + 2y - x^2 - y^2\}$.

> **Respuesta:** $V = 81\pi/2$ ($\approx 127{,}23$).
>
> **Planteo:** H está entre el plano $z = 2y$ (piso) y la superficie $z = 9 + 2y - x^2 - y^2$ (techo). $V = \iint_D$ (techo − piso) dxdy, con D la proyección en el plano xy.
> **Cómo es:** el techo es $z = 10 - x^2 - (y - 1)^2$, un paraboloide que abre hacia abajo con vértice en (0, 1, 10). Techo − piso $= 9 - x^2 - y^2$, que es ≥ 0 si y sólo si $x^2 + y^2 \le 9$. Así que se cortan sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (la curva intersección es una elipse en el plano $z = 2y$) y **D es el disco de centro el origen y radio 3**, aunque el vértice del paraboloide no esté sobre el eje z. Afuera del disco el plano queda por encima y no hay sólido.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$, $2r\,\text{sen}\,\theta \le z \le 9 + 2r\,\text{sen}\,\theta - r^2$; la integral en z da la altura $9 - r^2$ (los $2r\,\text{sen}\,\theta$ se cancelan).
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva: $\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 3: $\frac{81}{4}$. Por 2π.
>
> **Resultado:** $\mathbf{V = \frac{81\pi}{2}} \approx 127{,}23$.
>
> **Control (cartesianas):** $V = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{(9 - x^2)}}^{\sqrt{(9 - x^2)}} (9 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$. Primero en y: $2(9 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2} = \frac{4}{3}(9 - x^2)^{3/2}$; con $x = 3\,\text{sen}\,t$: $108 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = 108 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Trampa:** centrar el disco en (0, 1) porque ahí está el vértice del paraboloide: la proyección sale de techo − piso, no del techo solo.

Ejercicio 2. Sea Γ la porción de la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (0, 2) y está contenida en el semiplano $y \ge 0$; sea D la región limitada por Γ y el eje x.
Calcule $\iint_D y\, dxdy$.

> **Respuesta:** Γ: mitad superior de $4x^2 + y^2 = 4$. $D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\sqrt{(1 - x^2)}\}$. $\iint_D y\, dxdy = 8/3$.
>
> **Línea de campo (EDO):** $x' = y$, $y' = -4x$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{y}$. Separando: $y\, dy = -4x\, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -2x^2 + c \Rightarrow 4x^2 + y^2 = k$. Por (0, 2): $k = 4$. La línea es la elipse $\mathbf{4x^2 + y^2 = 4}$, o sea $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Control: $\frac{d}{dt}(4x^2 + y^2) = 8x \cdot y + 2y \cdot (-4x) = 0$ ✓.
> **La región:** Γ es la mitad de arriba de esa elipse parada (semieje 1 en x, 2 en y): un arco que sale de (−1, 0), sube hasta (0, 2) y baja a (1, 0). Con el segmento del eje x entre −1 y 1 encierra la media elipse **$D = \{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\sqrt{(1 - x^2)}\}$** (el techo sale de despejar $y \ge 0$ en $4x^2 + y^2 = 4$).
> **Cuenta (dy dx):** $\iint_D y\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{(1 - x^2)}} dx = \int_{-1}^{1} 2(1 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$.
> **Resultado:** $\iint_D y\, dxdy = \mathbf{8/3}$.
> **Control con polares elípticas:** $x = r\cos\theta$, $y = 2r\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$ ($y \ge 0$); jacobiano det

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$. $\int_0^{\pi}\int_0^{1} 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot [\frac{4r^3}{3}]_0^{1} = 2 \cdot \frac{4}{3} = 8/3$ ✓.

Trampa: el semieje de 2 está sobre el eje y (por eso pasa por (0, 2)), no sobre el x; cruzarlos da $4x^2 + y^2$ con los papeles cambiados y otro resultado. En polares, θ llega sólo hasta π.

Ejercicio 3. Considere la curva C: { $x + y + z^2 = 2$; $x - y + z^2 = 0$; $x \geq 0$ }.

1. Halle una parametrización de C.
2. Calcule la masa de un alambre con la forma de C sabiendo que la densidad de masa lineal es $\delta(x, y, z) = \sqrt{(4z^2 + 1)}$.

Respuesta: 1) $\vec{X}(t) = (1 - t^2, 1, t)$, $t \in [-1, 1]$. 2) M = 14/3.

1) Parametrización: sumando las dos ecuaciones, $2x + 2z^2 = 2$, o sea $x = 1 - z^2$. Restándolas, $2y = 2$, o sea $y = 1$. Al revés, si $x = 1 - z^2$ e $y = 1$, las dos ecuaciones se cumplen ($1 - z^2 + 1 + z^2 = 2$ y $1 - z^2 - 1 + z^2 = 0$): el sistema equivale a $\{x = 1 - z^2, y = 1\}$. Tomando $z = t$: $\vec{\mathbf{X}}\mathbf{(t) = (1 - t^2, 1, t)}$. La condición $x \geq 0$ es $1 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{t \in [-1, 1]}$. C es un arco de parábola en el plano $y = 1$, de (0, 1, −1) a (0, 1, 1) pasando por (1, 1, 0).

Regularidad: $\vec{X}$ es C^1, inyectiva ($z = t$) y $\vec{X}'(t) = (-2t, 0, 1)$ nunca se anula (tercera componente 1). $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4t^2 + 1)}$.

2) Planteo: $M = \int_C \delta\,ds = \int_{-1}^{1} \delta(\vec{X}(t))\,\|\vec{X}'(t)\|\,dt$. Sobre C es $z = t$, así que $\delta(\vec{X}(t)) = \sqrt{(4t^2 + 1)}$.

Cuenta: $\delta(\vec{X}(t))\,\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4t^2 + 1)} \cdot \sqrt{(4t^2 + 1)} = 4t^2 + 1$. Primitiva $\frac{4t^3}{3} + t$: $M = [\frac{4t^3}{3} + t]_{-1}^{1} = (4/3 + 1) - (-4/3 - 1) = 14/3$.

Resultado: M = **14/3**.

Trampa: el parámetro natural es z, porque x e y quedan funciones de z. Si parametrizás con $x = t$ tenés que partir la curva en dos ($z = \pm\sqrt{(1 - t)}$) y la rapidez explota en $x = 1$. Y la densidad se evalúa en la curva: $\delta = \sqrt{(4z^2 + 1)}$ con $z = t$, que es exactamente $\|\vec{X}'\|$.

Ejercicio 4. Sea Γ el borde del triángulo de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 1). Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + y, xz - x, e^{z^2} + xy)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con Γ recorrida A → B → C → A (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1$. En el otro sentido, 1.

Rotor: $\vec{f} = (P, Q, R) = (yz + y, xz - x, e^{z^2} + xy)$, C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y e^{z^2}). $\mathrm{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, (z - 1) - (z + 1)) = \mathbf{(0, 0, -2)}$.

Superficie elegida: el propio triángulo T de vértices A, B, C, que está en el plano $x + y + z = 1$: $z = 1 - x - y$ con $(x, y) \in D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, área 1/2. Su borde es Γ; es la superficie más simple con ese borde.

Hipótesis de Stokes: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, T es un triángulo plano (regular, orientable) y Γ es una poligonal cerrada simple, suave a trozos.

Orientación elegida (el gráfico): A → B → C → A. Proyectado: (1, 0) → (0, 1) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Regla de la mano derecha: los dedos siguen ese giro y el pulgar apunta a z positivo, normal $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.

Flujo: $(\mathrm{rot}\,\vec{f}) \cdot \vec{n} = 0 + 0 - 2 = -2$. $\iint_D (-2)\,dx\,dy = \int_0^{1}\int_0^{1-x} (-2)\,dy\,dx = \int_0^{1} -2(1 - x)\,dx = [-2x + x^2]_0^{1} = \mathbf{-1}$.

Resultado: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-1}$ recorriendo A → B → C → A; 1 en el sentido contrario.

> **Trampa:** e^{z^2} no tiene primitiva elemental, y eso asusta en la cuenta directa; con Stokes no molesta porque sólo depende de z y no entra en el rotor. Cuidado con el signo en $Q'_x - P'_y = (z - 1) - (z + 1)$.

Ejercicio 5. Calcule el flujo del campo $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a través de la porción de cilindro
Σ: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $0 \le z \le 4$,
sabiendo que $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = z$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (x, y, 2)$ y $\vec{f}(x, y, 4) = (2x + y, 3x - y, 0)$. Indique en un gráfico la orientación de Σ considerada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con normal saliente (alejándose del eje $x = 0$, $y = 2$): $\Phi = 40\pi$. Con la entrante, -40π.
>
> **Planteo:** $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$: cilindro circular de radio 2 con eje la recta $x = 0$, $y = 2$, entre $z = 0$ y $z = 4$. Es abierto y de $\vec{f}$ sólo conocemos la divergencia y sus valores en los planos $z = 0$ y $z = 4$, justo donde van las tapas: cerramos y usamos Gauss.
> **Orientación elegida:** normal saliente del cilindro, $\hat{n} = (x, y - 2, 0)/2$. En el gráfico: flechas horizontales que se alejan del eje.
> **Cierre:** $V = \{x^2 + (y - 2)^2 \le 4,\ 0 \le z \le 4\}$, $\partial V = \Sigma \cup T_0 \cup T_4$, con T_0 el disco D en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$ y T_4 el disco en $z = 4$ con normal $(0, 0, 1)$ (las dos salientes).
> **Hipótesis:** $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ (dato); V acotado con frontera cerrada suave a trozos, normal exterior.
> **Triple integral:** $\iiint_V z\, dV = \iint_D \int_0^4 z\, dz\, dA = \text{área}(D) \cdot [z^2/2]_0^4 = 4\pi \cdot 8 = 32\pi$.
> **Tapas:** en T_4, $\vec{f} \cdot (0, 0, 1)$ es la tercera componente de $\vec{f}(x, y, 4) = (2x + y, 3x - y, 0)$, o sea 0: flujo 0. En T_0, $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -2$ (tercera componente de $(x, y, 2)$), flujo $-2 \cdot 4\pi = -8\pi$.
> **Resultado:** $\Phi_\Sigma = 32\pi - 0 - (-8\pi) =$ **40π** con normal saliente.
> **Trampa:** como las normales de las tapas son $\pm k$, de $\vec{f}$ ahí sólo importa la tercera componente: $(2x + y, 3x - y)$ y (x, y) no entran en la cuenta. Y la tapa de abajo va con normal $-k$, por eso su -2 termina sumando 8π.

10/2/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$\vec{f}(x, y) = (\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)}, \dfrac{1}{x^2 - y^2})$

Determine y grafique el dominio natural D. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

> **Respuesta:** D = {(x, y) : $x^2 + y^2 \geq 9$, $y \neq x$, $y \neq -x$}: el exterior del círculo de radio 3 con la circunferencia, sin las dos diagonales. No es abierto (contiene puntos de la circunferencia, que son frontera), no es cerrado (no contiene los puntos de las diagonales con $x^2 + y^2 \geq 9$, que son frontera) y no es conexo (queda en cuatro regiones).
>
> **Condiciones:** primera componente: $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$. Segunda: $x^2 - y^2 \neq 0$.
> **La raíz:** $x^2 + y^2 \geq 9$: los puntos a distancia ≥ 3 del origen, con la circunferencia de radio 3 incluida.
> **El denominador:** $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ o $y = -x$: se sacan las dos diagonales.
> **D: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9, y \neq x, y \neq -x\}$**. Gráfico: todo el plano por fuera del disco de radio 3 pintado, la circunferencia en trazo lleno, las dos diagonales punteadas desde la circunferencia hacia afuera, y los cuatro puntos $(\pm 3/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2})$ donde se cortan con la circunferencia en círculo vacío. Quedan cuatro sectores no acotados: derecha ($|y| < x$), arriba ($|x| < y$), izquierda y abajo.
> **Frontera (para justificar):** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) : y = \pm x, x^2 + y^2 \geq 9\}$.
> **¿Abierto?** No: $(3, 0) \in D$, pero todo entorno suyo tiene puntos $(3 - \varepsilon, 0)$ a distancia menor que 3 del origen, que no están en D.
> **¿Cerrado?** No: $(3, 3) \notin D$ (está sobre $y = x$), pero $(3, 3 + 1/n) \in D$ y tiende a $(3, 3)$. D no contiene ese punto de su frontera.
> **¿Conexo?** No. $g(x, y) = x^2 - y^2$ es continua y no se anula en D. Los abiertos $\{g > 0\}$ y $\{g < 0\}$ son disjuntos, cubren D y los dos tienen puntos de D: $(4, 0)$ y $(0, 4)$. (Con caminos: una curva en D de $(4, 0)$ a $(0, 4)$ haría pasar g de 16 a -16 sin anularse, absurdo por Bolzano.) En realidad son cuatro componentes, una por sector.
> **Trampa:** "exterior del círculo" suena a abierto, pero acá la circunferencia pertenece a D, y eso solo ya impide que sea abierto. Lo de las diagonales es lo que impide que sea cerrado.

Ejercicio 2. Sea la superficie Σ parametrizada por

$\vec{X}(u, v) = (u^2 + v, u - v, u + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

y P = (1, 1, 1). Determine, si existe, el punto donde la recta normal a Σ en P interseca al plano xy.

> **Respuesta:** El punto existe: (4/3, 4/3, 0). Recta normal: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 1, −3), con t = 1/3.
>
> **Parámetros de P:** $\vec{X}(u, v) = (1, 1, 1)$ pide $u^2 + v = 1$, $u - v = 1$, $u + v^2 = 1$. De la segunda $u = v + 1$; en la primera $(v + 1)^2 + v = 1$, o sea $v^2 + 3v = 0$: $v = 0$ o $v = -3$. Con $v = 0$, $u = 1$ y $u + v^2 = 1$ ✓. Con $v = -3$, $u = -2$ y $u + v^2 = 7 \neq 1$ ✗. Único parámetro: $(u, v) = (1, 0)$.
> **Normal:** $\vec{X}_u = (2u, 1, 1) = (2, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (1, -1, 2v) = (1, -1, 0)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (1, 1, -3) \neq \vec{0}$, así que P es punto regular y la recta normal está bien definida.
> **Recta normal:** $(x, y, z) = (1 + t, 1 + t, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.
> **Intersección con el plano xy (z = 0):** $1 - 3t = 0$, $t = 1/3$, y el punto es **(4/3, 4/3, 0)**. Existe porque la recta no es paralela al plano xy (su director tiene componente z igual a $-3 \neq 0$).

> **Trampa:** antes de derivar hay que encontrar (u, v) de P y descartar la solución falsa v = −3, que cumple dos ecuaciones pero no la tercera.

Ejercicio 3. Sea
$g(x, y) = f(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$,
donde $w = f(u, v)$ es una función definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (2, 0)$ por
$u\, e^{vw} - 3uv - 2w = 0$.
Estime $g(1.03, 0.98)$ mediante una aproximación lineal.

> **Respuesta:** $w_0 = f(2, 0) = 1$, $\nabla f(2, 0) = (1/2, -2)$; $g(1, 1) = 1$, $\nabla g(1, 1) = (-3, 7/2)$. $g(1.03, 0.98) \approx 1 - 0.09 - 0.07 = 0.84$.
>
> Lectura: el exponente de e está borroso en la foto; se lee vw, que es consistente con que haya w_0 en (2, 0) (con uw, por ejemplo, quedaría $2e^{2w} = 2w$, que no tiene solución).
> **El valor w_0:** $F(u, v, w) = u\, e^{vw} - 3uv - 2w$. En (2, 0): $2 \cdot e^0 - 0 - 2w = 0$, así que $w_0 = 1$.
> **Hipótesis del TFI:** F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (exponencial y polinomios), $F(2, 0, 1) = 0$ y $F'_w = uv\, e^{vw} - 2$ vale $-2 \neq 0$ en (2, 0, 1). Entonces existe f de clase C^1 en un entorno de (2, 0) con $f(2, 0) = 1$ y $F(u, v, f(u, v)) = 0$.
> **Derivadas de F en (2, 0, 1):** $F'_u = e^{vw} - 3v = 1$; $F'_v = uw\, e^{vw} - 3u = 2 - 6 = -4$; $F'_w = -2$. Luego $f'_u = -F'_u/F'_w = 1/2$ y $f'_v = -F'_v/F'_w = -(-4)/(-2) = -2$. **$\nabla f(2, 0) = (1/2, -2)$**.
> **Elección del punto:** $(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$ en (1, 1) da (2, 0) ✓, y (1, 1) está cerca de (1.03, 0.98). Entonces $g(1, 1) = f(2, 0) = 1$.
> **Regla de la cadena:** la interior es polinómica y f es C^1 cerca de (2, 0), así que g es C^1 (diferenciable) cerca de (1, 1). Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 - y + 2$ da $(2x, -1) = (2, -1)$; $v = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (2, -2)$. $g'_x = (1/2) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = -3$; $g'_y = (1/2)(-1) + (-2)(-2) = 7/2$. **$\nabla g(1, 1) = (-3, 7/2)$**.
> **Resultado:** con $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$: $g(1.03, 0.98) \approx 1 + (-3)(0.03) + (7/2)(-0.02) = 1 - 0.09 - 0.07 =$ **0.84**.
> **Trampa:** el signo de f'_v: $-F'_v/F'_w = -(-4)/(-2) = -2$, no +2. Y la derivada de $u\, e^{vw}$ respecto de v lleva el factor w (regla de la cadena en el exponente): $uw\, e^{vw}$.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = x^2 y + y\, f(xy)$, con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que
$f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 8$.
Determine si P = (1, 1) es punto crítico de h y, en caso afirmativo, clasifíquelo.

> **Respuesta:** $\nabla h(1, 1) = (0, 0)$: P = (1, 1) es punto crítico. $Hh(1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 4 > 0$ y $h''_{xx} = 10 > 0$: mínimo relativo, de valor $h(1, 1) = 2$.
>
> **Planteo:** f es C^2 en $\mathbb{R}$ y $(x, y) \mapsto xy$ es polinómica, así que $f(xy)$ es C^2 y h es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto): vale el criterio del hessiano. Escribo $u = xy$, que en (1, 1) vale 1.
> **Gradiente:** $h'_x = 2xy + y \cdot f'(xy) \cdot y = 2xy + y^2 f'(xy)$, $h'_y = x^2 + f(xy) + y \cdot f'(xy) \cdot x = x^2 + f(xy) + xy\, f'(xy)$.
> **En (1, 1):** $h'_x = 2 + f'(1) = 2 - 2 = 0$ y $h'_y = 1 + f(1) + f'(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. **P = (1, 1) es punto crítico**.
> **Derivadas segundas:** $h''_{xx} = 2y + y^3 f''(xy)$; $h''_{xy} = 2x + 2y\, f'(xy) + xy^2\, f''(xy)$; $h''_{yy} = x\, f'(xy) + x\, f'(xy) + x^2 y\, f''(xy) = 2x\, f'(xy) + x^2 y\, f''(xy)$. En (1, 1): $h''_{xx} = 2 + 8 = 10$, $h''_{xy} = 2 - 4 + 8 = 6$, $h''_{yy} = -4 + 8 = 4$. (Control: derivando h'_y respecto de x sale $2x + 2y\, f'(xy) + xy^2\, f''(xy)$, igual que h''_{xy}.)
> **Hessiano:** $Hh(1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 40 - 36 = 4 > 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $h''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$

y $h''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no decide.
Clasificación: det > 0 y $h''_{xx} = 10 > 0$: **mínimo relativo** en (1, 1), de valor h(1, 1) = 1 + f(1) = **2**.
Trampa: y f(xy) es un producto en la variable y: al derivar respecto de y aparecen f(xy) (por la y de adelante) y xy f′(xy) (cadena). Y en h'_y hay que volver a derivar con producto el término xy f′(xy): de ahí sale el 2x f′(xy) de h''_{yy}, que es donde más se equivoca la gente.

Ejercicio 5. Sea $f \in C^1$, con f(1, 2) = –1. Se sabe que la derivada de f en (1, 2) en la dirección del versor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ es $2\sqrt{2}$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en (1, 2, –1).

Respuesta: $\nabla f(1, 2) = (1, 3)$. Plano tangente: z = x + 3y – 8 (x + 3y – z = 8).

Hipótesis: $f \in C^1$, así que es diferenciable en (1, 2) y la derivada direccional se calcula como $f'((1, 2), \check{v}) = \nabla f(1, 2) \cdot \check{v}$.
Planteo: con $\check{v} = (1/\sqrt{2})(1, 1)$ y $\nabla f(1, 2) = (1, b)$, donde $b = f_y(1, 2)$: $(1 + b)/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Multiplicando por $\sqrt{2}$, 1 + b = 4, así que $\mathbf{f_y(1, 2) = 3}$.
Plano tangente: $z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x – 1) + f_y(1, 2)(y – 2) = –1 + (x – 1) + 3(y – 2)$, es decir **z = x + 3y – 8**. Control: en (1, 2) da 1 + 6 – 8 = –1 ✓.
Trampa: el $\sqrt{2}$ del versor se cancela con el de $2\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$); si te olvidás de normalizar (usar (1, 1) en vez del versor) sale f_y mal. Y sin la hipótesis C^1 (diferenciable) la fórmula $\nabla f \cdot \check{v}$ no se puede usar.

10/2/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el valor de

$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, donde D: $1 \le x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge |x|$.

> **Respuesta:** $\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \pi - 2 \approx 1{,}142$.
>
> **La región (dibujo):** $1 \le x^2 + y^2 \le 9$ es la corona entre las circunferencias de radio 1 y 3 centradas en el origen. $y \ge |x|$ es lo que está por encima de las dos bisectrices $y = x$ e $y = -x$: una cuña de 90° abierta hacia arriba, con el eje y positivo en el medio. D es el pedazo de corona dentro de esa cuña (un cuarto de corona, el de arriba).
> **Cambio a polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $|J| = r$. La corona es $1 \le r \le 3$; $y \ge |x|$ es $\text{sen}\,\theta \ge |\cos\theta|$, que pasa para $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$. $D^* = [1, 3] \times [\pi/4, 3\pi/4]$. El integrando queda $\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$; está bien definido y es continuo en D porque ahí $r \ge 1$ (el origen, donde no está definido, queda afuera).
> **Cuenta:** $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^3 \cos^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_1^3 r\,dr\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta\right)$. En r: $\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9-1}{2} = 4$. En θ, con $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$: $\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
> **Resultado:** $4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\pi - 2} \approx 1{,}142$.
>
> **Control:** llamando I_x a esta integral e I_y a la de $\frac{y^2}{x^2+y^2}$, $I_x + I_y$ = área de D = $\frac{1}{4}\pi(9-1) = 2\pi$, e $I_y - I_x = \int\int(-\cos 2\theta)\,r\,dr\,d\theta = 4\left[-\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 4$. Entonces $I_x = \frac{2\pi - 4}{2} = \pi - 2$ ✓. Tiene sentido que sea menos de la mitad del área: en esa cuña la región está cerca del eje y, donde x es chico.
> **Trampa:** el integrando se simplifica a $\cos^2\theta$, pero el jacobiano r sigue estando; sin él darías $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$. Y ojo con sen 2θ en 3π/4: vale sen(3π/2) = −1.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curvas planas de ecuación $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$. Sea Γ la curva de la familia ortogonal a $\mathcal{F}$ que pasa por el punto (0, 2). Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^4 - y, y^3 - 2x)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida.

> **Respuesta:** Γ: $x^2/16 + y^2/4 = 1$. Orientación elegida antihoraria: $\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = -8\pi$ (horaria: 8π).
>
> **EDO de la familia:** $y = Cx^4$; para $x \ne 0$, $C = \frac{y}{x^4}$ y $y' = 4Cx^3 = \boldsymbol{\frac{4y}{x}}$.
>
> **Familia ortogonal:** $y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow 4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \boldsymbol{x^2 + 4y^2 = K}$. Por (0, 2): K = 16, o sea Γ: $\boldsymbol{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1}$, elipse cerrada de semiejes 4 y 2. Control: la normal a la elipse, $(2x, 8y) \parallel (x, 4y)$, es paralela a la tangente de $y = Cx^4$, $(1, 4y/x) \parallel (x, 4y)$: son ortogonales ✓.
> **Orientación elegida (el gráfico): antihoraria**, por ejemplo $r(t) = (4\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$; en (0, 2) la flecha apunta hacia la izquierda.
> **Hipótesis de Green:** $P = x^4 - y$, $Q = y^3 - 2x$, C^1 en $\mathbb{R}^2$; D = $\{x^2/16 + y^2/4 \le 1\}$ es regular y Γ es su borde,

cerrado, simple, C^1, orientado positivamente. $Q'_x = -2$, $P'_y = -1$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -1}$. $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\text{área}(D) = -\pi \cdot 4 \cdot 2 = -8\pi$.
Cara directa: $x^4\,dx$ e $y^3\,dy$ son exactas y no aportan en una curva cerrada. Queda $\oint -y\,dx - 2x\,dy = \int_0^{2\pi} [-2 \operatorname{sen} t\,(-4 \operatorname{sen} t) - 8 \cos t\,(2 \cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi} (8 \operatorname{sen}^2 t - 16 \cos^2 t)\,dt = 8\pi - 16\pi = -8\pi$ ✓.
Resultado: antihoraria, $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-8\pi}$; si en el gráfico elegís horaria, **8π**.
Trampa: el enunciado no fija el sentido: el resultado sólo vale junto con la flecha dibujada.

Ejercicio 3. Calcule el área de la porción de superficie
Σ: $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 \le 2y$, $z \ge 0$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \sqrt{2}\,\pi \approx 4{,}44$.

Planteo: $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ con $z \ge 0$ es la hoja de arriba del cono, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. La condición $x^2 + y^2 \le 2y$ es $x^2 + (y - 1)^2 \le 1$: el disco de centro $(0, 1)$ y radio 1, que pasa por el origen. Σ es la parte del cono que está encima de ese disco. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\,dr\,d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$.
Dominio D: $x^2 + y^2 \le 2y$ en polares es $r^2 \le 2r \operatorname{sen}\theta$, o sea $r \le 2 \operatorname{sen}\theta$. Eso exige $\operatorname{sen}\theta \ge 0$, entonces $\theta \in [0, \pi]$. $D = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2 \operatorname{sen}\theta\}$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\,r$. Se anula sólo en el vértice ($r = 0$), que es un punto del borde: no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{2}$, entre 0 y $2\operatorname{sen}\theta$ da $2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\theta$.
Integral en θ: $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$, primitiva $\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}$, entre 0 y π da $\dfrac{\pi}{2}$. $A = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\sqrt{2}\,\pi} \approx 4{,}44$.
Control (como gráfica): $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ tiene $z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$, así que $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$ en todo punto (salvo el vértice). $A = \sqrt{2} \cdot$ área del disco $= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2$ ✓.
Trampa: el disco no está centrado en el origen. θ va de 0 a π (no de 0 a 2π) y r hasta $2\operatorname{sen}\theta$; con $\theta \in [0, 2\pi]$ la cuenta da $2\sqrt{2}\,\pi$, el doble.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva $\vec{X} = (4 - t^2, t^3 + 1, 1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, contenida en el primer octante. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y + 4x^3, x, 2z)$ a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [-1, 2]$, de $A = (3, 0, 2)$ a $B = (0, 9, 5)$. Con $U = xy + x^4 + z^2$, la circulación es $U(B) - U(A) = 25 - 85 = -60$.

El arco: primer octante es $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $x = 4 - t^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 2$; $y = t^3 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow t^3 \ge -1 \Leftrightarrow t \ge -1$; $z = 1 + t^2 > 0$ siempre. Las tres juntas: **$-1 \le t \le 2$**. Extremos: $\vec{X}(-1) = (3, 0, 2)$ y $\vec{X}(2) = (0, 9, 5)$. Según la parametrización, Γ va de $A = (3, 0, 2)$ a $B = (0, 9, 5)$.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (y + 4x^3, x, 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 0 - 0 = 0$; $Q'_x - P'_y = 1 - 1 = 0$. $\operatorname{rot}\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
Potencial: $U'_x = y + 4x^3 \Rightarrow U = xy + x^4 + h(y, z)$. $U'_y = x + h'_y = x \Rightarrow h = k(z)$. $U'_z = k'(z) = 2z \Rightarrow k = z^2$. **$U = xy + x^4 + z^2$**.
Circulación: $U(B) = 0 + 0 + 25 = 25$; $U(A) = 0 + 81 + 4 = 85$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 25 - 85 = \mathbf{-60}$.
Trampa: el recorte lo deciden dos condiciones distintas: $x \ge 0$ corta arriba ($t \le 2$) y $y \ge 0$ corta abajo ($t \ge -1$). Quedarse sólo con $|t| \le 2$ mete un pedazo con $y < 0$.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y\varphi(z), x\varphi(z), 1 + z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie

$\Sigma: z + x^2 + y^2 = 9, z \geq 0$

orientada de modo que las normales tengan tercera componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = 99\pi/2$ (normales con tercera componente positiva).
>
> **Planteo:** $\Sigma: z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$, es el paraboloide sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 9$; es abierta. Con φ desconocida conviene cerrarla con la tapa $T: z = 0, x^2 + y^2 \leq 9$, y usar Gauss en $V = \{0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$.
> **Orientación:** las normales de Σ con tercera componente positiva apuntan hacia arriba, o sea son salientes de V. En T la saliente es $(0, 0, -1)$.
> **Hipótesis:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$); V es acotado y $\partial V = \Sigma \cup T$ es cerrada y suave a trozos.
> **Divergencia:** $\partial(y\varphi(z))/\partial x + \partial(x\varphi(z))/\partial y + \partial(1 + z)/\partial z = 0 + 0 + 1 = 1$.
> **Triple:** $\text{vol}(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\, [9r^2/2 - r^4/4]_0^3 = 2\pi \cdot 81/4 = 81\pi/2$.
> **Tapa:** $\vec{f}(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = -(1 + 0) = -1$, flujo $-1 \cdot 9\pi = -9\pi$.
> **Resultado:** $\Phi_\Sigma = 81\pi/2 - (-9\pi) = \mathbf{99\pi/2}$.
> **Control directo:** $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ (hacia arriba), $\vec{f} \cdot \vec{N} = 4xy\,\varphi(9 - x^2 - y^2) + 10 - x^2 - y^2$. El primer término es impar en x y se anula en el disco; $\iint (10 - r^2)\, dA = 90\pi - 81\pi/2 = 99\pi/2$ ✓.
> **Trampa:** en la tapa φ no aparece (la normal es $\pm k$ y sólo cuenta la tercera componente, $1 + z$), así que no hace falta conocerla. Ojo con el signo: la tapa de abajo resta -9π, o sea suma 9π.

16/12/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{y(y + 2x)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \ (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ 0 \ (x, y) = (0, 0) \ \}$

a) Analice la continuidad de f en el origen.

b) Determine si existen las derivadas parciales en (0, 0) y qué puede decir de la diferenciabilidad de f en ese punto.

> **Respuesta:** a) f es continua en (0, 0): $|f(x, y)| \leq 3\sqrt{(x^2 + y^2)} \to 0 = f(0, 0)$. b) $f'_x(0, 0) = 0$; $f'_y(0, 0)$ no existe (los laterales del cociente incremental dan 1 y –1). Por lo tanto f no es diferenciable en (0, 0).
>
> **a) Planteo:** f es continua en el origen si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Para probar que un límite existe no sirven los caminos: hay que acotar.
> **Acotación:** llamá $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Siempre $|x| \leq \rho$ y $|y| \leq \rho$, entonces $|y + 2x| \leq |y| + 2|x| \leq 3\rho$ y $|y(y + 2x)| \leq \rho \cdot 3\rho = 3\rho^2$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$: $0 \leq |f(x, y)| \leq 3\rho^2/\rho = 3\rho$.
> **Conclusión:** $3\rho \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$, así que por intercalación $\lim f = 0 = f(0, 0)$: **f es continua en el origen**. En polares es lo mismo: $f = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta \ (\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta)$, o sea ρ (que tiende a 0) por algo acotado por 3 sin importar θ.
> **b) $f'_x(0, 0)$:** sobre el eje x, $f(h, 0) = 0$ para todo $h \neq 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} (f(h, 0) - f(0, 0))/h = \lim 0/h = \mathbf{0}$.
> **$f'_y(0, 0)$:** $f(0, k) = k^2/\sqrt{(k^2)} = k^2/|k| = |k|$, así que el cociente incremental es $(f(0, k) - f(0, 0))/k = |k|/k$, que vale 1 si $k > 0$ y –1 si $k < 0$. Los límites laterales son 1 y –1, distintos: **$f'_y(0, 0)$ no existe**.
> **Diferenciabilidad:** si f fuera diferenciable en (0, 0), existirían en ese punto todas las derivadas direccionales, en particular las dos parciales. Como $f'_y(0, 0)$ no existe, **f no es diferenciable en el origen**.
> **Trampa:** $\sqrt{(k^2)}$ es $|k|$, no k. Si simplificás $k^2/\sqrt{(k^2)} = k$ te queda $f'_y(0, 0) = 1$ y terminás calculando un resto que no tiene sentido. Además, la continuidad no alcanza para diferenciabilidad: esta f es continua y no es diferenciable.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (1, –1, –1) la ecuación

$x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y = -2$

define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1. Calcule el valor mínimo de la derivada direccional de g en (–1, –1) y la dirección (versor) en la cual se produce.

> **Respuesta:** $\nabla g(-1, -1) = (1, 4)$. Mínimo $-\sqrt{17}$, en $\check{v} = (-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y + 2$, $P = (1, -1, -1)$, queremos $x = g(y, z)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = (1)(-1) - (-1)(1) + 2(-1) + 1 + (-1) + 2 = -1 + 1 - 2 + 1 - 1 + 2 = 0$ ✓. (2) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_x = 2xy + 1$, $F_x(P) = -2 + 1 = -1 \neq 0$ ✓. Entonces $x = g(y, z)$ es C^1 en un entorno de (–1, –1), con $g(-1, -1) = 1$.
>
> **Derivadas:** $F_y = x^2 - z^2 + 1$, $F_y(P) = 1 - 1 + 1 = 1$. $F_z = -2yz + 6z^2$, $F_z(P) = -2(-1)(-1) + 6 = 4$. $g_y = -\dfrac{F_y}{F_x} = -1/(-1) = 1$, $g_z = -\dfrac{F_z}{F_x} = -4/(-1) = 4$. **$\nabla g(-1, -1) = (1, 4)$**.
> **Derivada direccional:** como g es C^1, es diferenciable en (–1, –1), y entonces para todo versor $\check{v}$ vale g'

$((-1, -1), \check{v}) = \nabla g((-1, -1)) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla g \cdot \check{v} = \|\nabla g\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇g y $\check{v}$. El mínimo es con $\theta = \pi$, o sea $\check{v}$ opuesto al gradiente: $\check{v} = -\nabla g/\|\nabla g\|$ = **$(-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$**, y el valor mínimo es **$-\|\nabla g\| = -\sqrt{17}$**.

Trampa: el mínimo de la derivada direccional no es 0 (eso pasa en las direcciones perpendiculares): es $-\|\nabla g\|$. Y ojo con $F_x(P) = -1$: el doble signo menos hace que g_y y g_z salgan positivos.

Ejercicio 3. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y - z = 0$ y sea L la recta de ecuación $\vec{X} = (-1, -2, 1) + \lambda(-2, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Halle él o los puntos P en los cuales S y L se intersecan ortogonalmente.

Respuesta: Un único punto: P = (1, –1, 0) ($\lambda = -1$). El otro corte, (–2, –5/2, 3/2), no es ortogonal.

Planteo: "se intersecan ortogonalmente" en P significa que $P \in S \cap L$ y que L es perpendicular al plano tangente a S en P, o sea que la dirección $\vec{d} = (-2, -1, 1)$ es paralela a la normal de S en P.
Normal de S: S es el nivel 0 de $G(x, y, z) = x^2 + y - z$, C^1, con $\nabla G = (2x, 1, -1)$, que nunca se anula (la segunda componente es 1).
Paso 1, cortes: un punto de L es $(-1 - 2\lambda, -2 - \lambda, 1 + \lambda)$. En S: $(1 + 2\lambda)^2 + (-2 - \lambda) - (1 + \lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 3 - 2\lambda = 4\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$, o sea $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$: $\lambda = -1$ o $\lambda = 1/2$. Los cortes son (1, –1, 0) y (–2, –5/2, 3/2).
Paso 2, ortogonalidad: en (1, –1, 0), $\nabla G = (2, 1, -1) = -(-2, -1, 1)$: paralelo a $\vec{d}$ ✓. En (–2, –5/2, 3/2), $\nabla G = (-4, 1, -1)$, que no es múltiplo de (–2, –1, 1) (la primera componente pediría factor 2 y la segunda factor –1) ✗.
Resultado: P = (1, –1, 0). Control: $z = x^2 + y$ da $0 = 1 - 1$ ✓.
Trampa: no alcanza con cortar: la recta corta a S en dos puntos, y sólo en uno es normal. Tampoco sirve pedir $\nabla G \cdot \vec{d} = 0$: eso diría que la recta es tangente, que es justo lo contrario.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = \alpha e^{\alpha x} - xy + \beta \operatorname{sen}(y) - x + y + y^2$.
Determine, si existen, los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que f alcance un extremo relativo en el origen y clasifique el tipo de extremo.

Respuesta: $\alpha = 1$ y $\beta = -1$: f tiene un mínimo relativo en el origen, de valor $f(0, 0) = 1$. (Con $\alpha = -1$, $\beta = -1$ el origen es crítico pero es punto silla.)

Planteo: f es C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (exponencial, seno y polinomio). Como $\mathbb{R}^2$ es abierto y f es diferenciable, si f tiene un extremo relativo en (0, 0) necesariamente $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.
Gradiente: $f'_x = \alpha \cdot \alpha\, e^{\alpha x} - y - 1 = \alpha^2 e^{\alpha x} - y - 1$, $f'_y = -x + \beta \cos y + 1 + 2y$.
Condición necesaria: $f'_x(0, 0) = \alpha^2 - 1 = 0$ da $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$; $f'_y(0, 0) = \beta + 1 = 0$ da $\beta = -1$. Los candidatos son $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ y $(-1, -1)$.
Hessiano: $f''_{xx} = \alpha^3 e^{\alpha x}$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{yy} = -\beta \operatorname{sen} y + 2$. En el origen: $H = \begin{pmatrix} \alpha^3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y como $\alpha = \pm 1$, $\alpha^3 = \alpha$.
Criterio que se usa: si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
$\alpha = 1$, $\beta = -1$: $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 2 - 1 = 1 > 0$ y $f''_{xx} = 1 > 0$: **mínimo relativo**. Valor: $f(0, 0) = \alpha e^0 + \beta \operatorname{sen} 0 = \mathbf{1}$.

α = –1, β = –1: $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = -2 - 1 = -3 < 0$: **punto silla**, no hay extremo. Este par se descarta.

Resultado: el único par que sirve es **α = 1, β = –1**, con mínimo relativo en el origen de valor 1.

Trampa: α aparece dos veces (como coeficiente y en el exponente): $f'_x = \alpha^2 e^{\alpha x}$ y $f''_{xx} = \alpha^3 e^{\alpha x}$. Si derivás sólo el exponente o sólo el coeficiente te queda una ecuación lineal en α y perdés uno de los dos candidatos, y justamente hay que clasificar los dos para ver que uno no da extremo.

Ejercicio 5. Sean f(u, v, w) un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^3)$ y h(x, y) = f(x + y, x – y, xy). Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden de h en (1, 0) es

$p(x, y) = 9 - 3x + 2y - xy - x^2 + \tfrac{1}{2}y^2$

y que $f'_w(1, 1, 0) = 2$.

Calcule ∇f(1, 1, 0) y halle el plano tangente al conjunto de nivel de f en el punto (1, 1, 0).

Respuesta: ∇f(1, 1, 0) = (–3, –2, 2); f(1, 1, 0) = 5. Plano tangente al nivel 5 de f en (1, 1, 0): 3x + 2y – 2z = 5.

Qué da el Taylor: h es C^2 (composición de $f \in C^2$ con $\vec{g}(x, y) = (x + y, x - y, xy)$, polinómica). el polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. Ojo: p está escrito en potencias de x e y, no de (x – 1); por eso no se leen los coeficientes, se deriva y se evalúa.

Valor y gradiente de h en (1, 0): h(1, 0) = p(1, 0) = 9 – 3 – 1 = 5. $p'_x = -3 - y - 2x$, $p'_y = 2 - x + y$, y en (1, 0): ∇h(1, 0) = (–5, 1).

Regla de la cadena: $\vec{g}(1, 0) = (1, 1, 0)$ y f es C^1, luego diferenciable allí. $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$, en (1, 0): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\nabla h(1, 0) = \nabla f(1, 1, 0) \cdot D\vec{g}(1, 0)$: con ∇f(1, 1, 0) = (a, b, c), $h'_x = a + b + 0 \cdot c = -5$ y $h'_y = a - b + c = 1$.

Usar el dato: $c = f'_w(1, 1, 0) = 2$ (sin este dato el sistema tendría 3 incógnitas y 2 ecuaciones). Queda a + b = –5 y a – b = –1, de donde a = –3, b = –2. **∇f(1, 1, 0) = (–3, –2, 2)**.

Conjunto de nivel: f(1, 1, 0) = h(1, 0) = 5, así que (1, 1, 0) está en el nivel f = 5. Como f es C^1 y $\nabla f(1, 1, 0) \neq \vec{0}$, ese conjunto de nivel es una superficie regular cerca del punto y el gradiente es normal a ella.

Plano: –3(x – 1) – 2(y – 1) + 2(z – 0) = 0, o sea **3x + 2y – 2z = 5**.

Trampa: leer p como si estuviera centrado en (1, 0) y decir ∇h(1, 0) = (–3, 2) (los coeficientes lineales). Eso es ∇p(0, 0), no ∇p(1, 0).

16/12/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa plana que ocupa la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al origen.

> **Respuesta:** $M = \dfrac{7\pi k}{3} \approx 7{,}33k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la densidad es proporcional a la distancia al origen: $\delta(x, y) = k\sqrt{(x^2 + y^2)}$, con $k > 0$. La masa es $M = \iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy$.
> **La región (dibujo):** $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ es la corona entre las circunferencias de radio 1 y radio 2 centradas en el origen. La recta $y = x$ pasa por el origen y parte la corona en dos mitades iguales; $y \ge x$ es el semiplano que queda arriba y a la izquierda de esa recta. D es la media corona de ese lado: arranca en la semirrecta $y = x$ con $x > 0$ (dirección $\theta = \pi/4$), gira en sentido antihorario pasando por el eje y positivo y por el eje x negativo, y termina en la semirrecta $y = x$ con $x < 0$ ($\theta = 5\pi/4$). Control: $(0, 3/2)$ cumple $y \ge x$ y tiene $\theta = \pi/2$, que está en ese intervalo.
> **Cambio a polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, con $|J| = r$. La corona es $1 \le r \le 2$. La condición $y \ge x$ es $r(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \ge 0$, o sea $\operatorname{sen}\theta \ge \cos\theta$, que pasa para $\theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$. La región transformada es el rectángulo $D^* = [1, 2] \times [\pi/4, 5\pi/4]$ y la densidad queda $\delta = kr$.
> **Cuenta:** $M = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^2 kr \cdot r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{kr^3}{3}$, entre 1 y 2 da $\dfrac{k(8 - 1)}{3} = \dfrac{7k}{3}$.
> Integral en θ: primitiva $\dfrac{7k}{3}\theta$, entre $\pi/4$ y $5\pi/4$ da $\dfrac{7k}{3} \cdot \pi$.
> **Resultado:** $M = \boldsymbol{\dfrac{7\pi k}{3}} \approx 7{,}33k$.
> **Control:** la densidad sólo depende de r y D es exactamente media corona, así que M tiene que ser la mitad de la masa de la corona entera: $\dfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 kr^2\, dr\, d\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \dfrac{7k}{3} = \dfrac{7\pi k}{3}$ ✓.
> **Trampa:** el jacobiano r se suma a la densidad r, y el integrando queda kr^2; si te lo olvidás da $\dfrac{3\pi k}{2}$. Y $y \ge x$ no es el primer cuadrante: el ángulo recorre π, de $\pi/4$ a $5\pi/4$.

Ejercicio 2. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xy, -y^2 + z, z)$ a través de la frontera del cuerpo
$H: x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2 - x,\ y \ge 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 4\pi$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** la frontera de H es cerrada; con la normal exterior (la elijo así, ver gráfico) el flujo sale por Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (2xy, -y^2 + z, z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado, su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 0$, techo inclinado $z = 2 - x$, plano $y = 0$ y la pared cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ con $y \ge 0$. Orientación: normal exterior a H.
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(2xy) + \partial_y(-y^2 + z) + \partial_z(z) = 2y - 2y + 1 = 1$. El flujo saliente es el volumen de H.
> **La región:** la sombra es el semidisco $D = \{x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\} = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\}$; sobre él z va de 0 a $2 - x$, que es ≥ 0 porque $x \le 2$ en D (el plano toca el piso sólo en el punto $(2, 0, 0)$).

Cuenta: $\Phi = \iint_D (2 - x)\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^2 (2 - r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$. Interior: $[r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta]_0^2 = 4 - \frac{8}{3}\cos\theta$.

Exterior: $[4\theta - \frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi} = 4\pi$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 4\pi}$ saliente (-4π si se orienta hacia adentro).

Gráfico: medio cilindro (del lado $y \geq 0$) apoyado en $z = 0$ y cortado por el plano inclinado $z = 2 - x$, que es alto ($z = 4$) en $x = -2$ y baja a 0 en $x = 2$; flechas saliendo: hacia $(0, 0, -1)$ en el piso, hacia $(0, -1, 0)$ en la cara $y = 0$, radiales hacia afuera en la pared y hacia $(1, 0, 1)$ en el techo.

Control por caras: piso (normal $(0, 0, -1)$): $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -z = 0$, flujo 0. Techo (normal $(1, 0, 1)$, sale de $x + z = 2$): $\vec{f}\cdot(1, 0, 1) = 2xy + 2 - x$; $2xy$ es impar en x sobre D, queda $\iint(2 - x) = 4\pi$. Cara $y = 0$ (normal $(0, -1, 0)$): $-(-y^2 + z) = -z$, flujo $-\int_{-2}^{2} \frac{(2 - x)^2}{2}\, dx = -\frac{32}{3}$. Pared cilíndrica: $\frac{32}{3}$. Suma: 4π ✓.

Trampa: para la cara $y = 0$ la normal exterior es $(0, -1, 0)$, no $(0, 1, 0)$; si se toma al revés, ese $-32/3$ cambia de signo y no cierra.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}\, ds$, donde C es la curva

C: $x^2 + y^2 = 4$, $2x - z = 0$, $y \geq 0$.

Respuesta: $\int_C ds/\sqrt{(4 + 4y^2)} = \pi$.

Planteo: es una integral de línea de campo escalar: $\int_C f\, ds = \int f(\vec{X}(t))\, \|\vec{X}'(t)\|\, dt$, con $\vec{X}$ una parametrización regular de C y $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}$.

Parametrización: C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $z = 2x$. Sobre el cilindro, $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$; el plano da $z = 2x = 4\cos t$. Queda $\vec{X}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4\cos t)$. La condición $y \geq 0$ es $\operatorname{sen} t \geq 0$, o sea $t \in [0, \pi]$: C es media elipse que va de $(2, 0, 4)$ a $(-2, 0, -4)$.

Rapidez: $\vec{X}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, -4\operatorname{sen} t)$, $\|\vec{X}'(t)\|^2 = 4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 16\operatorname{sen}^2 t = 4 + 16\operatorname{sen}^2 t$. Como sobre la curva $y = 2\operatorname{sen} t$, resulta $4y^2 = 16\operatorname{sen}^2 t$ y entonces $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(4 + 4y^2)}$. Además $\|\vec{X}'(t)\| \geq 2 > 0$: parametrización regular, inyectiva en $[0, \pi]$.

Integrando: f es continua sobre C ($4 + 4y^2 \geq 4 > 0$) y $f(\vec{X}(t)) = \frac{1}{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}}$, así que $f(\vec{X}(t))\, \|\vec{X}'(t)\| = \frac{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}}{\sqrt{(4 + 16\operatorname{sen}^2 t)}} = 1$.

Cuenta: $\int_C f\, ds = \int_0^{\pi} 1\, dt = t\,|_0^{\pi} = \pi$.

Resultado: $\int_C \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}\, ds = \boldsymbol{\pi}$.

Trampa: ds no es dt: hay que multiplicar por $\|\vec{X}'(t)\|$, y ese factor es justamente el que cancela el denominador. Si te olvidás la componente z de $\vec{X}'$ (el $-4\operatorname{sen} t$ que viene de $z = 4\cos t$), no se cancela nada y la integral no sale con primitiva elemental.

Ejercicio 4. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con

Σ_1: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y Σ_2: $2x + z = 4$.

Calcule la circulación de $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ a lo largo de C, siendo ϕ un campo escalar de clase C^2 y $\vec{g}(x, y, z) = (x + y, y^2 - 2x, z + y)$. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo C en sentido antihorario visto desde arriba: circulación -4π. En sentido horario, 4π.

Planteo: $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es la intersección del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (completando cuadrados en $x^2 - 4x + y^2 = 0$) con el plano $z = 4 - 2x$: una elipse cerrada. Como ϕ no se conoce, teorema del rotor.
La parte $\nabla\phi$: $\phi \in C^2 \Rightarrow \text{rot}(\nabla\phi) = \vec{0}$ (Schwarz), así que $\text{rot}\,\vec{f} = \text{rot}\,\vec{g}$. (Equivalente: la circulación de un gradiente en una curva cerrada es 0.)
Superficie elegida: la porción de Σ_2 que encierra C: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 4 - 2x)$, $(x, y) \in D = \{(x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\phi \in C^2 \Rightarrow \nabla\phi \in C^1$; $\vec{g}$ polinómico); Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
Sentido elegido (lo que va en el gráfico): antihorario visto desde arriba: $x = 2 + 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 4 - 2x = -4\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. En el dibujo: el cilindro, el plano inclinado que baja hacia x positivo, la elipse con flechas antihorarias mirada desde arriba y la normal $(2, 0, 1)$ hacia arriba.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (2, 0, 1)$.
Rotor: $\vec{g} = (x + y, y^2 - 2x, z + y)$: $\text{rot}\,\vec{g} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (1 - 0, 0 - 0, -2 - 1) = (1, 0, -3)$.
Flujo del rotor: $\iint_D (1, 0, -3) \cdot (2, 0, 1)\,dxdy = \iint_D (2 - 3)\,dxdy = -\text{Área}(D) = -4\pi$.
Resultado: circulación = **-4π** en sentido antihorario visto desde arriba (4π en el otro).
Control (circulación directa): $x\,dx$, y^2dy, $z\,dz$ son exactas; queda $\oint y\,dx - 2x\,dy + y\,dz$, y sobre C es $dz = -2dx$: $\oint -y\,dx - 2x\,dy = \int_0^{2\pi} [(-2\,\text{sen}\,t)(-2\,\text{sen}\,t) - 2(2 + 2\cos t)(2\cos t)]\,dt = \int_0^{2\pi} (4\,\text{sen}^2 t - 8\cos t - 8\cos^2 t)\,dt = 4\pi - 8\pi = -4\pi$ ✓.
Trampa: olvidarse de la primera componente del rotor: con la normal $(2, 0, 1)$ el 1 de $\text{rot}\,\vec{g}$ aporta 2, y si se mira sólo la tercera componente sale -12π.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \mu(x)(y^2 - 1, xy)$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\vec{f}(1, 1) = (0, 2)$.
a) Halle μ para que $\vec{f}$ sea un campo de gradientes.
b) Encuentre todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: a) $\mu(x) = 2x$. b) $\vec{f} = (2x(y^2 - 1), 2x^2y)$; potenciales $U(x, y) = x^2y^2 - x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$.
a) Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (\mu(x)(y^2 - 1), \mu(x)xy)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $\mu \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.
Condición necesaria: $P'_y = 2y\mu$; $Q'_x = y(\mu + x\mu')$ (regla del producto). Igualando: $y(x\mu' - \mu) = 0$ para todo (x, y); con $y = 1$, **$x\,\mu'(x) = \mu(x)$**.
Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(\mu/x)' = \dfrac{x\mu' - \mu}{x^2} = 0$, así que μ/x es constante en cada semirrecta: $\mu(x) = c_1 x$ para $x > 0$ y $\mu(x) = c_2 x$ para $x < 0$ (y $\mu(0) = 0$ por continuidad). Como μ es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$\mu(x) = cx$** en todo $\mathbb{R}$.
Dato: $\vec{f}(1, 1) = \mu(1)\cdot(1 - 1, 1\cdot 1) = (0, \mu(1)) = (0, 2) \Rightarrow \mu(1) = 2 \Rightarrow c = 2$. **$\mu(x) = 2x$**.
Suficiencia: $\vec{f} = (2x(y^2 - 1), 2x^2y)$ cumple $P'_y = 4xy = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo: $\vec{f}$ es de gradientes.
b) Potenciales: $U'_y = 2x^2y \Rightarrow U = x^2y^2 + k(x)$. Derivando en x: $2xy^2 + k'(x) = 2xy^2 - 2x \Rightarrow k' = -2x$, $k = -x^2 + K$. Resultado: **$U(x, y) = x^2y^2 - x^2 + K$**, $K \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ es conexo, así que todos los potenciales difieren en una constante).
Trampa: el dato en $x = 1$ sólo fija la constante para $x > 0$; que $\mu = 2x$ también para $x < 0$ sale de que μ es derivable en 0. Y en b) falta la K si no la ponés.

6/12/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 8 - x^2 - y^2,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = \mathbf{4\pi k} \approx 12{,}57k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xy es $|z|$, y en H vale $z \geq 0$, así que $\delta = kz$ con $k > 0$ y $M = \iiint_H kz\, dV$.
> **El sólido:** $z^2 \geq x^2 + y^2$ con $z \geq 0$ es $z \geq r$ ($r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$): adentro del cono de 45° con eje z. $z^2 \leq 8 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$: adentro de la esfera de centro en el origen y radio $2\sqrt{2}$. Es un cucurucho de helado, y $y \geq 0$ se queda con la mitad (la que está del lado de y positivo del plano xz).
> **Dónde se cortan:** $r^2 = 8 - r^2 \iff r^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura $z = 2$. La sombra de H en el plano xy es el semidisco $x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0$.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta,\ z = z,\ |J| = r$. $y \geq 0$ es sen $\theta \geq 0$: $\theta \in [0, \pi]$. $r \in [0, 2]$. Para cada r, z va del cono r a la esfera $\sqrt{(8 - r^2)}$.
> **Cuenta:** $M = k \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_r^{\sqrt{(8 - r^2)}} z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{8 - r^2 - r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int_0^2 (4r - r^3)\, dr$, primitiva $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. En θ: por π.
> **Resultado:** $M = \mathbf{4\pi k} \approx 12{,}57k$.
> **Control en esféricas** ($|J| = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$, integrando $kz|J| = k\rho^3\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi$): el cono es $\varphi = \pi/4$, la esfera $\rho \leq 2\sqrt{2}$ y $\theta \in [0, \pi]$. $k \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^4}{4} = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 4\pi k$ ✓.
> **Trampa:** el jacobiano r se suma a la densidad z, y la integral en z es de z (primitiva $z^2/2$), no de 1. Y $y \geq 0$ es medio cuerpo: $\theta \in [0, \pi]$; con θ hasta 2π te da $8\pi k$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + 8y^2 + z = 8,\ x^2 - z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y - 2e^{2x-z},\ x,\ e^{2x-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (2, 0, 4) a (0, 1, 0) (antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -8$ (con la orientación opuesta, 8).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (y - 2e^{2x-z},\ x,\ e^{2x-z} + z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $\text{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (0 - 0,\ 2e^{2x-z} - 2e^{2x-z},\ 1 - 1) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_y = x$, $\phi = xy + h(x, z)$. $\phi'_x = y + h'_x = y - 2e^{2x-z} \Rightarrow h = -e^{2x-z} + k(z)$. $\phi'_z = e^{2x-z} + k'(z) = e^{2x-z} + z \Rightarrow k = z^2/2$. $\phi(x, y, z) = xy - e^{2x-z} + z^2/2$.
> **La curva:** reemplazando $z = x^2$ en la primera: $2x^2 + 8y^2 = 8 \iff x^2/4 + y^2 = 1$. Con $x, y \geq 0$ es un cuarto de elipse: $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t,\ \text{sen}\,t,\ 4\cos^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Extremos $A = \vec{\alpha}(0) = (2, 0, 4)$ y $B = \vec{\alpha}(\pi/2) = (0, 1, 0)$.
> **Orientación elegida:** t creciente, de A a B (antihoraria vista desde arriba).

Cuenta: en los dos extremos $2x - z = 0$, así que $e^{2x-z} = 1$. $\phi(B) = 0 - 1 + 0 = -1$ y $\phi(A) = 0 - 1 + 16/2 = 7$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = -8$ (8 si se recorre de B a A).
Trampa: el signo depende de la orientación que elijas, y por eso el enunciado pide indicarla: -8 y 8 son las dos respuestas correctas, cada una con su sentido. Y $e^0 = 1$, no 0.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva C: $x^2 + 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, recorrida de $(-4, 0)$ a $(0, 0)$.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16/3$.

La curva: completando cuadrados, $x^2 + 4x + y^2 = 0$ es $(x + 2)^2 + y^2 = 4$: circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2. Con $y \geq 0$ es la semicircunferencia de arriba, recorrida de $(-4, 0)$ a $(0, 0)$: pasa por arriba de izquierda a derecha, o sea sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de $(0, 0)$ a $(-4, 0)$ sobre el eje x. $C \cup C_1$ es el borde del semidisco D (la mitad superior del disco) en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = x^2 - y^2$ y $Q = xy + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región regular con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x = y$ ($e^{\cos(y)}$ no depende de x), $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
Doble integral: polares centradas en $(-2, 0)$: $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3y\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta = 3 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} = 3 \cdot (8/3) \cdot 2 = 16$. Con la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1} = -16$.
Segmento: C_1: $(t, 0)$, t de 0 a -4; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t^2$: $\int_0^{-4} t^2\, dt = [t^3/3]_0^{-4} = -64/3$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -16 - (-64/3) =$ **16/3**.
Trampa: al parametrizar aparece $e^{\cos(2\,\mathrm{sen}\,\theta)} \cdot 2\cos\theta$, que no hay que integrar: es la diferencial de $G(y)$ con $G' = e^{\cos y}$, y como el arco empieza y termina en $y = 0$ aporta 0. Green lo hace automático (no entra en el rotor y en el segmento $dy = 0$). Y ojo con el sentido: ir de $(-4, 0)$ a $(0, 0)$ por arriba es horario.

Ejercicio 4. Considere la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z = 4$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 4\pi$ (con $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (abre hacia abajo, vértice $(0, 0, 4)$) que está arriba del plano $z = 0$ y sobre la cuña $0 \leq y \leq x$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: $z \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$; $0 \leq y \leq x$ es la cuña entre el eje x y la recta $y = x$. En polares: **$D = \{0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$**, un octavo de disco.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, **$\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$**.
Orientación: la primera componente es $2x$, y en D vale $x \geq y \geq 0$, así que $2x \geq 0$ en todo Σ (se anula sólo en el vértice $x = y = 0$): es la orientación pedida, no hay que cambiar el signo. (Es la normal "hacia afuera" del paraboloide, con $z > 0$.)
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 2(4 - x^2 - y^2))$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = 2x^2 + 2y^2 + 2(4 - x^2 - y^2) = 8$. Es constante, así que $\Phi = 8 \cdot$área(D).
Cuenta: pasando a polares ($dx\, dy = r\, dr\, d\theta$): $\Phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^2 8r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot [4r^2]_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 16 = 4\pi$.
Resultado: **$\Phi = 4\pi$**.

Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\operatorname{div} \vec{f} = 1 + 1 + 2 = 4$. Cerramos con el piso $z = 0$, la cara $y = 0$ y la cara $y = x$; queda el sólido $V = \{0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4 - r^2\}$ y en Σ su normal saliente es la que usamos. $\iiint_V 4\, dV = 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \pi \cdot [2r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^2 = \pi(8 - 4) = 4\pi$. Las tres tapas no aportan: en $z = 0$, $\vec{f} \cdot (0, 0, -1) = -2z = 0$; en $y = 0$, $\vec{f} \cdot (0, -1, 0) = -y = 0$; en $y = x$, la normal saliente es $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ y $\vec{f} \cdot \hat{n} = (y - x)/\sqrt{2} = 0$. Entonces $\Phi = 4\pi$ ✓.
Trampa: la cuña $0 \le y \le x$ es $\theta \in [0, \pi/4]$, no $[0, \pi/2]$. Y no olvidar el jacobiano r al pasar a polares.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (z + \varphi(x) + x,\ y\varphi(x),\ 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 5e^{-x} - 3$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
a) equivale a div f = 0: todo cubo cerrado Q es un sólido acotado cuya frontera ∂Q es una superficie cerrada suave a trozos (seis caras), y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial Q} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{f}\, dV$. Si $\operatorname{div} \vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en todo cubo. Al revés, si $\operatorname{div} \vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como $\operatorname{div} \vec{f}$ es continua conserva el signo en un cubo chico centrado en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces a) $\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\operatorname{div} \vec{f} = \partial(z + \varphi(x) + x)/\partial x + \partial(y\varphi(x))/\partial y + \partial(2z)/\partial z = (\varphi'(x) + 1) + \varphi(x) + 2 = \varphi'(x) + \varphi(x) + 3$.
EDO: $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ es $\varphi' + \varphi = -3$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^x: $(\varphi e^x)' = \varphi' e^x + \varphi e^x = -3e^x$. Integrando: $\varphi e^x = -3e^x + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^{-x} - 3$.
b) Condición inicial: $\vec{f}(0, 0, 0) = (0 + \varphi(0) + 0,\ 0 \cdot \varphi(0),\ 2 \cdot 0) = (\varphi(0), 0, 0)$. Igualando a $(2, 0, 0)$: $\varphi(0) = 2$ (las otras dos componentes se cumplen solas). Entonces $K - 3 = 2$, $K = 5$.
Resultado: $\varphi(x) = \mathbf{5e^{-x} - 3}$, que es C^1. Control: $\varphi' + \varphi + 3 = -5e^{-x} + 5e^{-x} - 3 + 3 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$ ✓.
Trampa: $\partial(y\varphi(x))/\partial y = \varphi(x)$ (φ depende sólo de x, para y es una constante), no $\varphi'(x)$. Y la condición sobre los cubos se traduce en $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ en todo punto: no alcanza con mirar un cubo en particular.

6/12/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: 2x^2 + 2y^2 \le z^2 \le 12 - x^2 - y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = \mathbf{6\pi k} \approx 18{,}85k$ ($k > 0$ es la constante de proporcionalidad de la densidad).
>
> **Planteo:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano xy es $|z|$, y en H vale $z \ge 0$, así que $\delta = kz$ con $k > 0$ y $M = \iiint_H kz\, dV$.
> **El sólido:** $z^2 \ge 2(x^2 + y^2)$ con $z \ge 0$ es $z \ge \sqrt{2} \cdot r$ ($r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$): adentro de un cono redondo de eje z, más cerrado que el de 45° ($\tan \varphi_0 = \frac{r}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$). $z^2 \le 12 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \le 12$: adentro de la esfera de centro en el origen y radio $2\sqrt{3}$. Es un cucurucho de helado, y $y \ge 0$ se queda con la mitad (la que está del lado de y positivo del plano xz).
> **Dónde se cortan:** $2r^2 = 12 - r^2 \iff r^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura $z = 2\sqrt{2}$. La sombra de H en el plano xy es el semidisco $x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0$.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z,\ |J| = r$. $y \ge 0$ es $\mathrm{sen}\,\theta \ge 0$: $\theta \in [0, \pi]$. $r \in [0, 2]$. Para cada r, z va del cono $\sqrt{2}\, r$ a la esfera $\sqrt{(12 - r^2)}$.
> **Cuenta:** $M = k \int_0^{\pi} \int_0^{2} \int_{\sqrt{2}\, r}^{\sqrt{(12 - r^2)}} z \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{12 - r^2 - 2r^2}{2} = \frac{12 - 3r^2}{2}$. En r: $\frac{1}{2} \int_0^2 (12r - 3r^3)\, dr$, primitiva $\frac{1}{2}(6r^2 - \frac{3r^4}{4})$, entre 0 y 2 da $\frac{1}{2}(24 - 12) = 6$. En θ: por π.
> **Resultado:** $M = \mathbf{6\pi k} \approx 18{,}85k$.
>
> **Control en esféricas** ($|J| = \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi$, integrando $kz|J| = k\rho^3 \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi$): el cono es $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o sea $\cos\varphi_0 = \sqrt{(2/3)}$ y $\mathrm{sen}^2\varphi_0 = \frac{1}{3}$; la esfera es $\rho \le 2\sqrt{3}$; $\theta \in [0, \pi]$. $k \int_0^{\pi} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^3 \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = k \cdot \pi \cdot \frac{\mathrm{sen}^2\varphi_0}{2} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^4}{4} = k \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 36 = 6\pi k$ ✓.
> **Trampa:** el cono es $z = \sqrt{2}\, r$, no $z = r$: el ángulo φ_0 no es π/4 ($\tan\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$), por eso acá conviene más cilíndricas. Y $y \ge 0$ es medio cuerpo: $\theta \in [0, \pi]$; con θ hasta 2π te da $12\pi k$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$8x^2 + y^2 + z = 8,\ y^2 - z = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y,\ x - 2e^{2y-z},\ e^{2y-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (1, 0, 0) a (0, 2, 4) (antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 8$ (con la orientación opuesta, −8).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (y,\ x - 2e^{2y-z},\ e^{2y-z} + z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (2e^{2y-z} - 2e^{2y-z},\ 0 - 0,\ 1 - 1) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_x = y$, $\phi = xy + h(y, z)$. $\phi'_y = x + h'_y = x - 2e^{2y-z} \Rightarrow h = -e^{2y-z} + k(z)$. $\phi'_z = e^{2y-z} + k'(z) = e^{2y-z} + z \Rightarrow k = z^2/2$. $\phi(x, y, z) = xy - e^{2y-z} + z^2/2$.
> **La curva:** reemplazando $z = y^2$ en la primera: $8x^2 + 2y^2 = 8 \iff x^2 + y^2/4 = 1$. Con $x, y \ge 0$ es un cuarto

de elipse: $\alpha(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 4 \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Extremos $A = \alpha(0) = (1, 0, 0)$ y $B = \alpha(\pi/2) = (0, 2, 4)$.
Orientación elegida: t creciente, de A a B (antihoraria vista desde arriba).
Cuenta: en los dos extremos $2y - z = 0$, así que $e^{2y-z} = 1$. $\phi(B) = 0 - 1 + 16/2 = 7$ y $\phi(A) = 0 - 1 + 0 = -1$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = 8$ (-8 si se recorre de B a A).
Trampa: $e^0 = 1$, no 0: el término exponencial vale -1 en los dos extremos y se cancela en la resta, pero si lo ponés en 0 en uno solo, el resultado sale mal.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva C: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$, recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16/3$.

La curva: completando cuadrados, $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x - 2)^2 + y^2 = 4$: circunferencia de centro (2, 0) y radio 2. Con $y \geq 0$ es la semicircunferencia de arriba, recorrida de (0, 0) a (4, 0): pasa por arriba de izquierda a derecha, o sea sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (4, 0) a (0, 0) sobre el eje x. $C \cup C_1$ es el borde del semidisco D (la mitad superior del disco) en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = x^2 - y^2$ y $Q = xy + e^{\cos(y)}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región regular con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\, dA$.
Rotor: $Q'_x = y$ ($e^{\cos(y)}$ no depende de x), $P'_y = -2y$, $Q'_x - P'_y = 3y$.
Doble integral: polares centradas en (2, 0): $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3y\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^2 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 3 \cdot [r^3/3]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} = 3 \cdot (8/3) \cdot 2 = 16$. Con la orientación horaria, $\oint_{C \cup C_1} = -16$.
Segmento: C_1: $\vec{}(t, 0)$, t de 4 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t^2$: $\int_4^0 t^2\, dt = [t^3/3]_4^0 = -64/3$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = -16 - (-64/3) = \mathbf{16/3}$.
Trampa: al parametrizar aparece $e^{\cos(2 \operatorname{sen}\theta)} \cdot 2\cos\theta$, que no hay que integrar: es la diferencial de $G(y)$ con $G' = e^{\cos y}$, y como el arco empieza y termina en $y = 0$ aporta 0. Green lo hace automático (no entra en el rotor y en el segmento $dy = 0$). Y ojo con el sentido: ir de (0, 0) a (4, 0) por arriba es horario.

Ejercicio 4. Considere la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z = 9$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 81\pi/4$ (con $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ (abre hacia abajo, vértice (0, 0, 9)) que está arriba del plano $z = 0$ y sobre la cuña $0 \leq y \leq x$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: $z \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$; $0 \leq y \leq x$ es la cuña entre el eje x y la recta $y = x$. En polares: **$D = \{0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$**, un octavo de disco.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, **$\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$**.
Orientación: la primera componente es $2x$, y en D vale $x \geq y \geq 0$, así que $2x \geq 0$ en todo Σ (se anula sólo en el vértice $x = y = 0$): es la orientación pedida, no hay que cambiar el signo. (Es la normal "hacia afuera" del paraboloide, con $z > 0$.)
$\vec{f} \cdot \vec{N}$: $\vec{f}(X) = (x, y, 2(9 - x^2 - y^2))$, $\vec{f} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y^2 + 2(9 - x^2 - y^2) = 18$. Es constante, así que $\Phi = 18 \cdot$área(D).

Cuenta: pasando a polares ($dx\,dy = r\,dr\,d\theta$): $\Phi = \int_0^{\pi/4}\int_0^3 18r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\cdot[9r^2]_0^3 = \frac{\pi}{4}\cdot 81 = \frac{81\pi}{4}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{81\pi}{4}}$.

Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ y $\operatorname{div}\vec{f} = 1 + 1 + 2 = 4$. Cerramos con el piso $z = 0$, la cara $y = 0$ y la cara $y = x$; queda el sólido $V = \{0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le 9 - r^2\}$ y en Σ su normal saliente es la que usamos. $\iiint_V 4\,dV = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^3 (9 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \pi\cdot[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = \pi(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}) = \frac{81\pi}{4}$. Las tres tapas no aportan: en $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -2z = 0$; en $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -y = 0$; en $y = x$, la normal saliente es $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ y $\vec{f}\cdot\hat{n} = (y - x)/\sqrt{2} = 0$. Entonces $\Phi = \frac{81\pi}{4}$ ✓.

Trampa: la cuña $0 \le y \le x$ es $\theta \in [0, \pi/4]$, no $[0, \pi/2]$. Y no olvidar el jacobiano r al pasar a polares.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x) + x,\ y\varphi(x) + y,\ 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 7e^{-x} - 4$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
a) equivale a div $\vec{f} = 0$: todo cubo cerrado Q es un sólido acotado cuya frontera ∂Q es una superficie cerrada suave a trozos (seis caras), y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial Q}\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{f}\,dV$. Si $\operatorname{div}\vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en todo cubo. Al revés, si $\operatorname{div}\vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como div f es continua conserva el signo en un cubo chico centrado en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces a) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\operatorname{div}\vec{f} = \partial(\varphi(x) + x)/\partial x + \partial(y\varphi(x) + y)/\partial y + \partial(2z)/\partial z = (\varphi'(x) + 1) + (\varphi(x) + 1) + 2 = \varphi'(x) + \varphi(x) + 4$.
EDO: $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ es $\varphi' + \varphi = -4$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^x: $(\varphi e^x)' = \varphi' e^x + \varphi e^x = -4e^x$. Integrando: $\varphi e^x = -4e^x + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^{-x} - 4$.
b) Condición inicial: $\vec{f}(0, 0, 0) = (\varphi(0) + 0,\ 0 \cdot \varphi(0) + 0,\ 2 \cdot 0) = (\varphi(0), 0, 0)$. Igualando a $(3, 0, 0)$: $\varphi(0) = 3$ (las otras dos componentes se cumplen solas). Entonces $K - 4 = 3$, $K = 7$.
Resultado: $\varphi(x) = \boldsymbol{7e^{-x} - 4}$, que es C^1. Control: $\varphi' + \varphi + 4 = -7e^{-x} + 7e^{-x} - 4 + 4 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$ ✓.
Trampa: $\partial(y\varphi(x))/\partial y = \varphi(x)$ (φ depende sólo de x, para y es una constante), no $\varphi'(x)$. Y la condición sobre los cubos se traduce en $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ en todo punto: no alcanza con mirar un cubo en particular.

18/10/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x^2 + y)}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique por separado D y su frontera. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

b) Grafique por separado el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > x^2 - 2,\ y > x\}$, la región arriba de la parábola $y = x^2 - 2$ y de la recta $y = x$. Frontera: la curva $y = \max\{x, x^2 - 2\}$ (parábola para $x \le -1$ y $x \ge 2$, segmento de $y = x$ entre $(-1, -1)$ y $(2, 2)$); nada de ella está en D. D es abierto, no es cerrado y es conexo. b) Nivel 0: la parábola $y = x^2 - 1$ para $x < (1 - \sqrt{5})/2$ o $x > (1 + \sqrt{5})/2$, dos ramas sin los extremos $((1 \pm \sqrt{5})/2, (1 \pm \sqrt{5})/2)$.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(2 - x^2 + y)$ pide $2 - x^2 + y > 0$, o sea $y > x^2 - 2$. La raíz del denominador pide $y - x \ge 0$ y además $\neq 0$: $y > x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 2,\ y > x\}$.
> **Cortes:** $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ o $x = 2$: puntos $(-1, -1)$ y $(2, 2)$. Entre -1 y 2 la recta está arriba de la parábola ($x^2 - x - 2 \le 0$ ahí), así que manda $y > x$; afuera de ese intervalo manda $y > x^2 - 2$.
> **Gráfico de D:** la parábola $y = x^2 - 2$ (vértice $(0, -2)$, abre hacia arriba) y la recta $y = x$, ambas en punteado. D es la región de arriba de las dos a la vez: por encima de la parábola en los costados y por encima del segmento diagonal de $(-1, -1)$ a $(2, 2)$ en el medio. Contiene, por ejemplo, a $(0, 1)$.
> **Frontera (otro gráfico):** $\partial D = \{y = \max\{x, x^2 - 2\}\}$: la rama izquierda de la parábola hasta $(-1, -1)$, el segmento de $y = x$ de $(-1, -1)$ a $(2, 2)$ y la rama derecha de la parábola desde $(2, 2)$. Es una sola curva, en trazo lleno; ningún punto suyo está en D (sobre la parábola el ln no existe, sobre la recta se anula el denominador).
> **Abierto:** sí. $g_1(x, y) = 2 - x^2 + y$ y $g_2(x, y) = y - x$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. $(0, 0)$ está sobre el segmento de frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, \varepsilon)$, y puntos con $y < x$) y no pertenece a D.
> **Conexo:** sí. $D = \{y > h(x)\}$ con $h(x) = \max\{x, x^2 - 2\}$ continua. Dados dos puntos de D, subí en vertical desde cada uno hasta una altura M mayor que el máximo de h en el intervalo entre sus abscisas y uní por la horizontal $y = M$: todo el camino queda en D.
> **Además** (no lo piden): no es acotado; contiene a $(0, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
> **b) Planteo:** en D el denominador no se anula, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(2 - x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 + y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$. Esos puntos ya cumplen $y > x^2 - 2$; falta pedir $y > x$.
> **Condición:** $x^2 - 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0{,}62$ o $x > (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}62$.
> **Resultado:** C_0 son dos ramas de la parábola $y = x^2 - 1$ (vértice $(0, -1)$): la izquierda para $x < (1 - \sqrt{5})/2$ y la derecha para $x > (1 + \sqrt{5})/2$. Los extremos $((1 - \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2)$ y $((1 + \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2)$ caen sobre la recta $y = x$ y quedan huecos. El vértice $(0, -1)$ no está (no cumple $y > x$).
> **Trampa:** dibujar la parábola $y = x^2 - 1$ entera: el tramo central queda debajo de la recta $y = x$, fuera del dominio.

Ejercicio 2. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ y $f: D \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y^2x + 2x^2 + y^2 + 1$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

> **Respuesta:** En D hay dos puntos críticos: (0, 0), mínimo relativo de valor $f(0, 0) = 1$, y (–1, 2), punto silla ($f(-1, 2) = 3$). (–1, –2) anula el gradiente pero no está en D.
>
> **Planteo:** $D = \{y > -1\}$ es un semiplano abierto y f es polinómica, C^∞ en D. Todos los puntos de D son interiores, así que los extremos relativos sólo pueden estar donde $\nabla f = 0$.
> **Gradiente:** $f'_x = y^2 + 4x$, $f'_y = 2xy + 2y = 2y(x + 1)$.
> **Puntos críticos:** $f'_y = 0$ pide $y = 0$ o $x = -1$. Caso $y = 0$: $f'_x = 4x = 0$, $x = 0$, y sale (0, 0). Caso $x = -1$: $f'_x = y^2 - 4 = 0$, $y = \pm 2$, y salen (–1, 2) y (–1, –2).
> **Dominio:** (–1, –2) tiene $y = -2 < -1$, **no pertenece a D** y se descarta. Quedan **(0, 0)** y **(–1, 2)**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = 2y$, $f''_{yy} = 2x + 2$, $H = \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
> **(0, 0):** $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = 8 > 0$ y $f''_{xx} = 4 > 0$: **mínimo relativo**, de valor **f(0, 0) = 1**.
> **(–1, 2):** $H = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 0 - 16 = -16 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(-1, 2) = -4 + 2 + 4 + 1 = 3$).
> **Trampa:** el dominio está para algo: (–1, –2) anula la expresión del gradiente pero no es punto crítico de f porque f no está definida ahí. Y en $2y(x + 1) = 0$ no dividas por y: el caso $y = 0$ es el que da el mínimo.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (2, 1, 2), la ecuación
$xz + yz + e^{y+z-3} = 7$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((2, 1), \check{v}) = 0$.

> **Respuesta:** $\nabla f(2, 1) = (-1/2, -3/4)$. $f'((2, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = \pm(3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$.
>
> **Planteo:** $F(x, y, z) = xz + yz + e^{y+z-3} - 7$, $P = (2, 1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
> **Hipótesis del TFI:** (1) $F(P) = 4 + 2 + e^0 - 7 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomio más exponencial de un polinomio) ✓. (3) $F_z = x + y + e^{y+z-3}$, $F_z(P) = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (2, 1), con $f(2, 1) = 2$.
> **Derivadas:** $F_x = z$, $F_x(P) = 2$. $F_y = z + e^{y+z-3}$, $F_y(P) = 2 + 1 = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -1/2$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -3/4$. **$\nabla f(2, 1) = (-1/2, -3/4)$**, paralelo a (2, 3).
> **Derivada direccional:** f es C^1, luego diferenciable en (2, 1), y $f'((2, 1), \check{v}) = \nabla f(2, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-a/2 - 3b/4 = 0$, o sea $2a + 3b = 0$: $\check{v}$ tiene que ser perpendicular al gradiente.
> **Resultado:** $b = -2a/3$ y $a^2 + b^2 = 1$ dan $a^2 (13/9) = 1$, $a = \pm 3/\sqrt{13}$. Los versores son **$\check{v} = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$ y $\check{v} = (-3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$**.
> **Trampa:** son dos versores, no uno; y tiene que ser versor (norma 1), así que (3, –2) solo no alcanza como respuesta.

Ejercicio 4. Sea f(u, v) una función de clase C^1 tal que L(u, v) = 1 + 2v − u es su aproximación lineal en (−1, 1). Sea g(x, y) = f($e^y x$, cos(xy) + y). Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (−1, 0, g(−1, 0)).

> **Respuesta:** g(−1, 0) = 4, ∇g(−1, 0) = (−1, 3). Plano tangente: z = 4 − (x + 1) + 3y, o sea x − 3y + z = 3.
>
> **Datos de f:** la aproximación lineal en (−1, 1) es L(u, v) = f(−1, 1) + f'_u(−1, 1)(u + 1) + f'_v(−1, 1)(v − 1). Como L(u, v) = 1 + 2v − u, evaluando y derivando: f(−1, 1) = L(−1, 1) = 1 + 2 + 1 = 4 y **∇f(−1, 1) = (−1, 2)**.
> **El punto interior:** con u = $e^y x$ y v = cos(xy) + y, en (−1, 0) queda u = −1, v = cos 0 + 0 = 1: justo (−1, 1) ✓. Entonces g(−1, 0) = f(−1, 1) = 4.
> **Hipótesis:** f es C^1 (diferenciable) y (u, v) es C^1 (exponencial, coseno, polinomios), así que g es C^1 y vale la regla de la cadena; además g es diferenciable en (−1, 0), así que tiene plano tangente.
> **Derivadas interiores en (−1, 0):** $u'_x = e^y = 1$; $u'_y = e^y x = -1$; $v'_x = -y \operatorname{sen}(xy) = 0$; $v'_y = -x \operatorname{sen}(xy) + 1 = 1$.
> **Cuenta:** $g'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 = -1$; $g'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = (-1)(-1) + 2\cdot 1 = 3$.
> **Resultado:** z = 4 + (−1)(x + 1) + 3(y − 0), es decir **x − 3y + z = 3**. Control: (−1, 0, 4) cumple −1 − 0 + 4 = 3 ✓.
> **Trampa:** ∇f no son los coeficientes "sueltos" leídos en otro orden: L está escrita como 1 + 2v − u, así que $f'_u = -1$ y $f'_v = 2$. Y no te olvides del +1 en $v'_y = -x \operatorname{sen}(xy) + 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (uv, u + v, 2v - u),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
y C la curva definida por las ecuaciones $xy + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z = 0$. Halle el o los puntos P ∈ Σ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano normal a C en (1, 0, −1).

> **Respuesta:** Un único punto: P = $\vec{X}$(8, 2) = (16, 10, −4). Plano tangente a Σ en P: x − 4y − 2z = −16 (paralelo al plano normal a C, x − 4y − 2z = 3).
>
> **Paso 1, la curva en el punto:** C = {F_1 = 0} ∩ {F_2 = 0} con $F_1 = xy + z^2 - 1$, $F_2 = x^2 + y^2 + z$. (1, 0, −1) está: 0 + 1 − 1 = 0 y 1 + 0 − 1 = 0 ✓. Ambas son C^1; $\nabla F_1 = (y, x, 2z) = (0, 1, -2)$ y $\nabla F_2 = (2x, 2y, 1) = (2, 0, 1)$ en el punto.
> **Paso 2, tangente a C:** $\vec{T} = \nabla F_1 \times \nabla F_2 = (1\cdot 1 - (-2)\cdot 0, (-2)\cdot 2 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 2) = (1, -4, -2) \neq \vec{0}$ (los gradientes no son paralelos, así que C es regular ahí). El plano normal a C tiene normal $\vec{T}$: (x − 1) − 4y − 2(z + 1) = 0, o sea x − 4y − 2z = 3.
> **Paso 3, normal de Σ:** $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (v, 1, -1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, 2)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot 2 - (-1)\cdot 1, (-1)\cdot u - v\cdot 2, v\cdot 1 - 1\cdot u) = (3, -u - 2v, v - u)$. La primera componente es 3 ≠ 0: Σ es regular en todos sus puntos.
> **Paso 4, paralelismo:** (3, −u − 2v, v − u) = λ(1, −4, −2). La primera da λ = 3; quedan −u − 2v = −12 y v − u = −6. De la segunda u = v + 6, y en la primera −3v − 6 = −12, v = 2, u = 8. Solución única.
> **Punto:** P = $\vec{X}$(8, 2) = (16, 10, −4).
> **Plano tangente:** $\vec{N}$(8, 2) = (3, −12, −6) ∥ (1, −4, −2): (x − 16) − 4(y − 10) − 2(z + 4) = 0, o sea **x − 4y − 2z = −16**, paralelo y distinto del plano normal.
> **Trampa:** el plano normal a una curva tiene como normal al **tangente** de la curva ($\nabla F_1 \times \nabla F_2$), no a uno de los gradientes. Usar ∇F_1 o ∇F_2 como normal es el error que más se cobra.

5/8/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 - 2x}$.
Identifique y grafique el dominio natural de f e indique si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 \neq 1\}$: el disco abierto de radio 2 sin la circunferencia de centro (1, 0) y radio 1 (tangente por dentro en (2, 0)). D es abierto, no es cerrado y no es conexo.
>
> **Condiciones:** $\ln(4 - x^2 - y^2)$ pide $x^2 + y^2 < 4$. El denominador pide $x^2 + y^2 - 2x \neq 0$; completando cuadrados $x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 - 1$, así que la condición es $(x - 1)^2 + y^2 \neq 1$.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 \neq 1\}$. **Gráfico:** el disco de centro el origen y radio 2 con el borde punteado, al que se le saca la circunferencia C de centro (1, 0) y radio 1 (también punteada). C pasa por el origen y por (2, 0), donde toca por dentro a la circunferencia grande: restando $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$ sale $2x = 4$, así que el único punto común es (2, 0), que igual no es de D. Quedan dos regiones: el disco chico abierto $(x - 1)^2 + y^2 < 1$ y la medialuna $\{x^2 + y^2 < 4, (x - 1)^2 + y^2 > 1\}$.
> **¿Abierto?** Sí: con $g_1 = 4 - x^2 - y^2$ y $g_2 = x^2 + y^2 - 2x$ continuas, $D = g_1^{-1}((0, +\infty)) \cap g_2^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, intersección de dos preimágenes de abiertos, que es un abierto.
> **¿Cerrado?** No: (0, 0) es punto frontera (los $(\varepsilon, 0)$ y los $(-\varepsilon, 0)$ con ε chico están en D) y no es de D porque anula el denominador. Lo mismo pasa con cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
> **¿Conexo?** No: (1, 0) ∈ D (centro del disco chico) y (−1, 0) ∈ D (en la medialuna). Si una curva continua dentro de D los uniera, $h(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ sobre la curva sería continua y pasaría de 0 a 4; por Bolzano valdría 1 en algún punto, que no es de D. Absurdo.
> **Trampa:** creer que el denominador se anula en un punto. Se anula sobre toda una circunferencia, y eso es lo que corta a D en dos. Y abierto no excluye "no cerrado": acá pasan las dos cosas.

Ejercicio 2. Sean $g(x, y, z) = f(\vec{h}(x, y, z))$, con $\vec{h}(x, y, z) = (y - x^2 + z, e^{y+z} - x)$, y $p(u, v) = 1 - uv$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f en (−1, 0). Encuentre la dirección de la máxima derivada direccional de g en el punto (1, 0, 0). Justifique sus cálculos.

> **Respuesta:** $\nabla f(-1, 0) = (0, 1)$; $\nabla g(1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$. Dirección de máxima derivada direccional: $\check{r} = (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$ (valor máximo $\sqrt{3}$).
>
> **Punto imagen:** $\vec{h}(1, 0, 0) = (0 - 1 + 0, e^0 - 1) = (-1, 0)$, justo el punto donde está centrado el Taylor de f.
> **Qué da el Taylor:** que f tenga polinomio de Taylor de orden 2 en (−1, 0) supone f dos veces diferenciable allí (en particular diferenciable). el polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $p(u, v) = 1 - uv$ está escrito en u, v (no en u + 1), así que se deriva: $\nabla p = (-v, -u)$, y en (−1, 0): **$\nabla f(-1, 0) = (0, 1)$.**
> **Jacobiana de $\vec{h}$:** $\vec{h}$ es C^1 (polinomios y exponencial). $D\vec{h}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x & 1 & 1 \\ -1 & e^{y+z} & e^{y+z} \end{pmatrix}$, y en (1, 0, 0): $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Regla de la cadena: h diferenciable en (1, 0, 0) y f diferenciable en h(1, 0, 0), así que g = f ∘ h es diferenciable en (1, 0, 0) y $\nabla g(1,0,0) = (0,1)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ = **(–1, 1, 1)** (es la segunda fila de la jacobiana).

Dirección: por ser g diferenciable, $g'(A, \check{r}) = \nabla g(A)\cdot\check{r} \le \|\nabla g(A)\|$, con igualdad cuando ř tiene la dirección y el sentido del gradiente: **$\check{r} = (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$**, y la derivada máxima vale $\sqrt{3}$.

Trampa: leer el gradiente de f en los coeficientes lineales de p (no hay: daría (0, 0) y una dirección indefinida). p no está centrado en (–1, 0): hay que derivarlo y evaluar.

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones

{ u + vx + y = 3 ; $u^2 - x^2 - yv = -1$ }

a) verifique que en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$, el mismo define implícitamente funciones u(x, y) y v(x, y) de clase C^1;

b) calcule $u'_x(1, 1)$ y $v'_x(1, 1)$.

Respuesta: a) F, G son C^1, se anulan en (1, 1, 1, 1) y $\partial(F, G)/\partial(u, v) = -3 \neq 0$: existen u(x, y), v(x, y) de clase C^1. B) $u'_x(1, 1) = 1/3$, $v'_x(1, 1) = -4/3$.

a) Planteo: F(x, y, u, v) = u + vx + y – 3 y $G(x, y, u, v) = u^2 - x^2 - yv + 1$. Las incógnitas a despejar son u y v, así que el determinante que importa es el de las derivadas respecto de u y v.

Hipótesis del TFI (sistemas): (1) F(1, 1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 – 3 = 0 ✓ y G(1, 1, 1, 1) = 1 – 1 – 1 + 1 = 0 ✓. (2) F y G son polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^4$. (3) Jacobiano: $\partial(F, G)/\partial(u, v) = \det\begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2u & -y \end{pmatrix} = -y - 2ux$, que en el punto vale –1 – 2 = –3 ≠ 0 ✓. Entonces existen u = u(x, y), v = v(x, y) de clase C^1 en un entorno de (1, 1), con u(1, 1) = v(1, 1) = 1.

b) Derivamos respecto de x las identidades F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 y G(...) = 0 (regla de la cadena, válida porque todo es C^1): $u'_x + v'_x\cdot x + v = 0$ y $2u\cdot u'_x - 2x - y\cdot v'_x = 0$.

En el punto (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1): $u'_x + v'_x = -1$ y $2u'_x - v'_x = 2$. Sumando: $3u'_x = 1$, **$u'_x(1, 1) = 1/3$**; y **$v'_x(1, 1) = -1 - 1/3 = -4/3$**.

Trampa: en la primera ecuación el término vx es un producto: su derivada es $v'_x\cdot x + v$, y ese v (que vale 1) es el que más se pierde. El sistema que resolvés es justamente el de la matriz jacobiana del punto 3, por eso hace falta que su determinante no sea 0.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = y - x - x^2 - \dfrac{y^3}{3}$.

Halle los extremos relativos de f y en qué puntos se alcanzan.

Respuesta: Único extremo relativo: máximo relativo en (–1/2, 1), de valor 11/12. En (–1/2, –1) hay punto silla (f = –5/12), no extremo.

Planteo: f es polinómica, C^∞ en $\mathbb{R}^2$ (abierto), así que todo extremo relativo es punto crítico.

Gradiente: $f'_x = -1 - 2x$, $f'_y = 1 - y^2$.

Puntos críticos: –1 – 2x = 0 da x = –1/2; $1 - y^2 = 0$ da y = ±1. Quedan **(–1/2, 1)** y **(–1/2, –1)**.

Hessiano: $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -2y$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$, det H = 4y. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: det H > 0 y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; det H > 0 y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no

decide.

(–1/2, 1): $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det H = 4 > 0$ y $f''_{xx} = -2 < 0$: **máximo relativo**. Valor: $f(-1/2, 1) = 1 + 1/2 - 1/4 - 1/3 = \dfrac{12 + 6 - 3 - 4}{12} =$ **11/12**.

(–1/2, –1): $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det H = -4 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(-1/2, -1) = -5/12$).

Ojo, no es absoluto: $f(0, y) = y - y^3/3$ tiende a $+\infty$ cuando $y \to -\infty$, así que el máximo es sólo local.

Trampa: el término $-y^3/3$ hace que $f''_{yy} = -2y$ cambie de signo según el punto: no clasifiques los dos puntos con el mismo hessiano. Y la consigna pide los *extremos*: la silla se menciona para descartarla, no es respuesta.

Ejercicio 5. Halle una ecuación para el plano normal, en $P = (2, -1, 0)$, a la curva que se obtiene de la intersección de la gráfica de $f(x, y) = 1 - x - y$ con el conjunto de nivel de $g(x, y, z) = xe^z + y^3$ que contiene a P. Justifique sus cálculos.

Respuesta: Plano normal: $x + y - 2z = 1$.

Las dos superficies: la gráfica de f es $z = 1 - x - y$, es decir $G(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$; P está en ella: $2 - 1 + 0 - 1 = 0$ ✓. El conjunto de nivel de g que contiene a P es $g = g(P) = 2e^0 + (-1)^3 = 1$, o sea $xe^z + y^3 = 1$.

Normales: G y g son C^1. $\nabla G = (1, 1, 1)$ y $\nabla g = (e^z, 3y^2, xe^z)$, que en P vale $(1, 3, 2)$. Las dos son no nulas y no paralelas.

Dirección de la curva: $\vec{T} = \nabla G \times \nabla g = (1, 1, 1) \times (1, 3, 2) = (1\cdot 2 - 1\cdot 3, 1\cdot 1 - 1\cdot 2, 1\cdot 3 - 1\cdot 1) = (-1, -1, 2) \neq \vec{0}$, así que la intersección es una curva regular cerca de P y tiene tangente ahí. Control: $\vec{T}\cdot\nabla G = 0$ y $\vec{T}\cdot\nabla g = -1 - 3 + 4 = 0$ ✓.

Plano normal: pasa por P y su normal es $\vec{T}$: $-(x - 2) - (y + 1) + 2(z - 0) = 0$, es decir **$x + y - 2z = 1$**. Control: $2 - 1 - 0 = 1$ ✓.

Trampa: el plano *normal* a una curva usa como vector normal la *tangente* de la curva (no un gradiente, que daría un plano tangente a una de las superficies). Y la normal a la gráfica de f es $(-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1)$, con la tercera componente incluida.

5/8/25 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule
$\iiint_D z\,dxdydz$,
donde
D: $x^2 + y^2 \le z^2 \le 2 - x^2 - y^2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

> **Respuesta:** $\iiint_D z\,dxdydz = \pi/4$.
>
> **Planteo:** hay que leer las dos desigualdades encadenadas como dos superficies.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 \le z^2$ con $z \ge 0$ equivale a $z \ge \sqrt{(x^2 + y^2)}$: la parte de arriba del cono circular de eje z y vértice en el origen (abre 45°). $z^2 \le 2 - x^2 - y^2$ es $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$: el interior de la esfera de radio $\sqrt{2}$. Se cortan donde $2z^2 = 2$, o sea $z = 1$, en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano $z = 1$. D es el "cono de helado" (cono abajo, tapa esférica arriba) y la condición $y \ge 0$ se queda con la mitad.
> **Coordenadas:** esféricas $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, con jacobiano $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ ($dV = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$). La esfera es $\rho \le \sqrt{2}$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho\cos\varphi = \rho\operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$; adentro del cono ($z \ge \sqrt{(x^2 + y^2)}$) es $0 \le \varphi \le \pi/4$. Como $\operatorname{sen}\varphi \ge 0$, $y \ge 0$ equivale a $\operatorname{sen}\theta \ge 0$: $0 \le \theta \le \pi$.
> **Cuenta:** $\iiint_D z\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$, y como los límites son constantes se separa en tres factores. En ρ: primitiva $\frac{\rho^4}{4}$, entre 0 y $\sqrt{2}$ da $\frac{4}{4} = 1$. En φ: primitiva $\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En θ: π.
> **Resultado:** $\iiint_D z\,dV = \frac{\pi}{4}$.
>
> **Control en cilíndricas:** $r \le z \le \sqrt{(2 - r^2)}$, con $0 \le r \le 1$ (donde se cortan) y $0 \le \theta \le \pi$. $\int_0^{\pi}\int_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_r^{\sqrt{(2 - r^2)}} dr\,d\theta = \pi\int_0^1 r\cdot\frac{2 - 2r^2}{2}\,dr = \pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ ✓.
> **Trampa:** sin el $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le z^2$ incluye también el cono de abajo. φ llega a $\pi/4$ (el ángulo del cono), no a $\pi/2$, y θ sólo hasta π por el $y \ge 0$. Olvidarse del $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ es el error más caro.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y), h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 2 - x^2\}$
recorrida en sentido horario.

> **Respuesta:** $\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{ds} = 76/15$ (horario).
>
> **Planteo:** $P = y^2 + h(2x + 2y)$, $Q = h(2x + 2y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
> **La región:** $D = \{|x| \le y \le 2 - x^2\}$ es la región entre la "V" $y = |x|$ y la parábola $y = 2 - x^2$, que se cortan donde $|x| = 2 - x^2$, o sea $(|x| + 2)(|x| - 1) = 0$, $|x| = 1$: en $(\pm 1, 1)$. $D = \{-1 \le x \le 1, |x| \le y \le 2 - x^2\}$.
> **Hipótesis del teorema:** P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y un arco de parábola) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.
> **Rotor:** por la regla de la cadena, $Q'_x = 2h'(2x + 2y)$ y $P'_y = 2y + 2h'(2x + 2y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{-2y}$ (la h se cancela: $(h(2x + 2y), h(2x + 2y)) = \nabla(H(2x + 2y)/2)$ con $H' = h$).

Doble integral: $\iint_D (-2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{2-x^2} (-2y)\,dy\,dx = -\int_{-1}^{1} [y^2]_{|x|}^{2-x^2}\,dx = -\int_{-1}^{1} (4 - 5x^2 + x^4)\,dx = -2(4 - 5/3 + 1/5) = -76/15$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -(-76/15) =$ **76/15**.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2\,dx$. En sentido antihorario: por $y = -x$ de $(-1, 1)$ a $(0, 0)$: $\int_{-1}^{0} x^2\,dx = 1/3$; por $y = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$: $1/3$; por la parábola de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$: $\int_{1}^{-1} (2 - x^2)^2\,dx = -86/15$. Total $2/3 - 86/15 = -76/15$, y en horario $76/15$ ✓.
Trampa: el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + x, x^2 + y, x^2 + y^2 + z)$ a través de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente no negativa.
Puede utilizar que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Respuesta: $\Phi = 189\pi/2$ (normales con tercera componente no negativa, o sea exteriores).

Planteo: Σ es la semiesfera superior de radio 3, abierta abajo. La cerramos con el disco B: $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$, y usamos Gauss en la media bola H.
Orientación: en Σ, la normal con tercera componente ≥ 0 es la que apunta hacia afuera de la esfera (en el polo es $(0, 0, 1)$): es la exterior de H. En B, la exterior es $(0, 0, -1)$.
Hipótesis del teorema: $\vec{f} = (y^2 + x, x^2 + y, x^2 + y^2 + z)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\Sigma \cup B$ es cerrada, suave a trozos, y acota H.
Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = 1 + 1 + 1 = 3$.
Triple integral: $\iiint_H 3\,dV = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 3\cdot 18\pi = 54\pi$.
Base: en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(x^2 + y^2 + 0) = -r^2$. $\Phi_B = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = -\frac{81\pi}{2}$.
Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = 54\pi \Rightarrow \Phi_\Sigma = 54\pi + \frac{81\pi}{2} = \frac{189\pi}{2}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{189\pi}{2}}$.
Control directo: en esféricas (radio 3) con la normal exterior, el flujo sobre Σ da $\frac{189\pi}{2}$ ✓.
Trampa: en la base el campo no es constante: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(x^2 + y^2)$, hay que integrarlo (no es "valor por área"). Y es negativo, así que se suma al despejar.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por las ecuaciones
$x^2 + y^2 - 4y = 0$, $2y + z = 8$.
recorrida de modo que en el punto $(0, 0, 8)$ el versor tangente tenga primera componente positiva.

Respuesta: $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = 4\pi$ (C antihoraria vista desde arriba, como pide el enunciado).

Planteo: C es la intersección del cilindro $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ (completando cuadrados en $x^2 + y^2 - 4y = 0$) con el plano $z = 8 - 2y$: una elipse cerrada. Teorema del rotor con la porción de plano que encierra.
Superficie elegida: $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 8 - 2y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$. Su borde es C porque C está en

ese plano y se proyecta en el borde de D. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -2) = (0, 2, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\vec{f}$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es un trozo de plano regular y orientable; C es cerrada, simple y suave.
Sentido de C: (0, 0, 8) se proyecta en (0, 0), el punto más bajo de la circunferencia de centro (0, 2). Ahí el tangente es horizontal en la proyección (en 3D es paralelo a (1, 0, 0), porque $z = 8 - 2y$ no cambia al moverse en x), y con primera componente positiva se avanza hacia x creciente: C se recorre **antihoraria vista desde arriba**.
Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (0, 2, 1)$, la de la parametrización.
Rotor: $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, y, 0)$, y el gradiente de una función C^2 no tiene rotor, así que $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot}(-y, y, 0) = (0, 0, 0 - (-1)) = (0, 0, 1)$. (Con la fórmula $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P)$ directo sobre $\vec{f}$ da lo mismo: los términos con z^2 y y^3 se cancelan de a pares.)
Flujo del rotor: $\iint_{\vec{D}} (0, 0, 1) \cdot (0, 2, 1)\, dxdy = \text{Área}(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{4\pi}$.
Control (circulación directa): el gradiente no circula y y dy es exacta; queda $\oint -y\, dx$ con $x = 2 \cos t$, $y = 2 + 2 \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$ (antihoraria; en $t = 3\pi/2$ está en (0, 0, 8) con tangente (2, 0, 0)): $\int_0^{2\pi} -(2 + 2 \operatorname{sen} t)(-2 \operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{2\pi} (4 \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen}^2 t)\, dt = 0 + 4\pi$ ✓.
Trampa: calcular a mano la derivada de $2x^2y^3z$ respecto de y y la de $3x^2y^2z^2$ respecto de z tienta errores de factor; conviene ver primero que $\vec{f}$ es un gradiente más algo simple.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva, perteneciente a la familia de curvas ortogonales a la familia $\mathscr{F}$: $x^2 + 2y^2 = c$, que tiene por extremos los puntos (1, 1) y $(2, y_0)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y, x + y^3)$ a lo largo de Γ recorrida de $(2, y_0)$ a (1, 1).

Respuesta: La curva ortogonal por (1, 1) es $y = x^2$, así que $y_0 = 4$. Con $\varphi = xy + y^4/4$, la circulación de (2, 4) a (1, 1) es $\varphi(1, 1) - \varphi(2, 4) = 5/4 - 72 = -283/4$.

Pendiente de $\mathscr{F}$: derivando $x^2 + 2y^2 = c$ respecto de x (con c constante): $2x + 4yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/(2y)$.
EDO de la familia ortogonal: en cada punto la pendiente ortogonal es la recíproca cambiada de signo: $\mathbf{y' = 2y/x}$ (para $x \neq 0$, $y \neq 0$). Control: $(-x/(2y)) \cdot (2y/x) = -1$.
Resolución (variables separables): $dy/y = 2\, dx/x \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + k \Rightarrow |y| = e^k x^2 \Rightarrow y = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$ ($K = 0$ da $y = 0$, que también es solución). Control: $y' = 2Kx = 2(Kx^2)/x = 2y/x$.
La curva de Γ: pasa por (1, 1) $\Rightarrow K = 1$: $\mathbf{y = x^2}$. El otro extremo $(2, y_0)$ está en la misma curva: $\mathbf{y_0 = 4}$. Γ es el arco de parábola $y = x^2$, $1 \le x \le 2$, recorrido de (2, 4) a (1, 1).
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (y, x + y^3)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 1 = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = y \Rightarrow \varphi = xy + h(y)$; $\varphi'_y = x + h'(y) = x + y^3 \Rightarrow h = y^4/4$. $\boldsymbol{\varphi = xy + y^4/4}$.
Circulación: $\varphi(1, 1) - \varphi(2, 4) = (1 + 1/4) - (8 + 256/4) = 5/4 - 72 = \mathbf{-283/4}$.
Control directo: con x como parámetro, $y = x^2$, $dy = 2x\, dx$, x de 2 a 1: $\int_2^1 [x^2 + (x + x^6)2x]\, dx = \int_2^1 (3x^2 + 2x^7)\, dx = [x^3 + x^8/4]_2^1 = 5/4 - 72 = -283/4$. ✓
Trampa: la ortogonal usa $-1/m$, no $1/m$ (con $1/m$ sale $y' = -2y/x$, otra curva). Y el sentido es de $(2, y_0)$ a (1, 1): al revés da +283/4.

15/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$.

a) Grafique en gráficos separados su dominio, la frontera del mismo y el conjunto de nivel 0.

b) Indique si el dominio natural es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y > x, x^2 + y^2 < 4\}$: el semidisco abierto de radio 2 que queda arriba de la recta $y = x$. Frontera: el arco de $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq x$ (de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ pasando por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$) más el segmento de $y = x$ entre esos dos puntos; nada de la frontera está en D. Nivel 0: el segmento de la recta $y = x + 1$ con $(-1 - \sqrt{7})/2 < x < (-1 + \sqrt{7})/2$, sin los extremos. b) D es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **a) Condiciones:** $\ln(y - x)$ pide $y - x > 0$. La raíz pide $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, pero como está dividiendo tampoco puede valer 0: $4 - x^2 - y^2 > 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x, x^2 + y^2 < 4\}$.
> **Gráfico de D:** dibujá la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2 y la recta $y = x$. Se cortan donde $2x^2 = 4$, o sea en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Como la recta pasa por el centro, D es exactamente el semidisco que queda arriba y a la izquierda de la diagonal (contiene a $(0, 1)$ y a $(-1, 0)$). Circunferencia y diagonal van en punteado: no pertenecen.
> **Frontera (gráfico aparte):** $\partial D = \{x^2 + y^2 = 4, y \geq x\} \cup \{y = x, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$: el arco superior izquierdo de la circunferencia (pasa por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$) cerrado por la cuerda diagonal de $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Es una curva cerrada, en trazo lleno. Ningún punto de ∂D está en D: en el arco se anula el denominador y en la cuerda el ln no está definido.
> **Nivel 0 (tercer gráfico):** en D el denominador nunca es 0, así que $f = 0 \Leftrightarrow \ln(y - x) = 0 \Leftrightarrow y - x = 1$. De la recta $y = x + 1$ sólo sirve la parte que está en D ($y - x = 1 > 0$ ya se cumple): $x^2 + (x + 1)^2 < 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow (-1 - \sqrt{7})/2 < x < (-1 + \sqrt{7})/2$. Es el segmento de $y = x + 1$ dentro del disco, **sin sus extremos** ($(-1 \pm \sqrt{7})/2$, $(1 \pm \sqrt{7})/2$), que caen sobre la circunferencia ($\approx (0{,}82; 1{,}82)$ y $(-1{,}82; -0{,}82)$). →
> **b) Abierto:** sí. $g_1(x, y) = y - x$ y $g_2(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ son continuas, así que $\{g_1 > 0\}$ y $\{g_2 > 0\}$ son abiertos (preimágenes del abierto $(0, +\infty)$ por funciones continuas) y D es su intersección. Dicho de otro modo: ningún punto de la frontera pertenece a D.
> **Cerrado:** no. $(0, 2)$ es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(0, 2 - \varepsilon)$, y puntos fuera de D) y no pertenece a D.
> **Acotado:** sí: todo punto de D cumple $\|(x, y)\| < 2$.
> **Conexo:** sí. Es intersección de dos convexos (un semiplano y un disco), así que es convexo: el segmento que une dos puntos de D queda entero en D. Convexo implica arcoconexo.
> **Trampa:** la raíz está en el denominador. Si ponés $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ metés la circunferencia en D y el conjunto deja de ser abierto; y en el nivel 0 los extremos del segmento no van.

Ejercicio 2. Sea el campo escalar

$f(x, y) = \{ \frac{y}{x^2}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0. \}$

a) ¿Es f continuo en (0, 0)?

b) ¿Existen las derivadas parciales de f en (0, 0)?

c) ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen?

Justifique todas sus respuestas.

> **Respuesta:** a) No: por $y = x^2$ el límite es 1 y por $y = 0$ es 0, el límite no existe. b) Sí: $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$. c) No es diferenciable en (0, 0), porque no es continua ahí.
>
> **a) Planteo:** $f(0, 0) = 0$ (el origen está en la recta $x = 0$). f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
> **Un camino que no da 0:** por la parábola $y = x^2$ (con $x \neq 0$, así que vale la primera fórmula): $f(x, x^2) = x^2/x^2 = 1 \to 1$. Por el eje x ($y = 0$, $x \neq 0$), en cambio, $f(x, 0) = 0 \to 0$.
> **Conclusión:** dos caminos con límites diferentes: el límite doble no existe y f **no es continua** en (0, 0).
> **b) Por definición:** $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$. Para $h \neq 0$, $f(h, 0) = 0/h^2 = 0$, así que el cociente es 0 y $\mathbf{f'_x(0, 0) = 0}$. $\to f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}$. Los puntos (0, k) tienen $x = 0$, donde f vale 0 por definición: el cociente es $0/k = 0$ y $\mathbf{f'_y(0, 0) = 0}$.
> **Resultado b):** sí, existen las dos y valen 0.
> **c) Teorema:** si f es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto. Por el contrarrecíproco, como f no es continua en (0, 0), **f no es diferenciable** en el origen.
> **Lo mismo por el resto:** el candidato a aproximación lineal es $f(0, 0) + 0\cdot x + 0\cdot y = 0$ y habría que tener $\lim f(x, y)/\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$. Por $y = x^2$ el cociente es $1/(|x|\sqrt{(1 + x^2)}) \to +\infty$, así que no se cumple.
> **Trampa:** la existencia de las derivadas parciales no implica diferenciabilidad (ni continuidad). Con rectas también se prueba que f no es continua: por $y = 0$ vale 0 y por $y = mx$ con $m \neq 0$ vale $f(x, mx) = m/x$, que no tiene límite; pero la forma más limpia de mostrarlo es la parábola $y = x^2$, que da un valor fijo diferente de f(0, 0).

Ejercicio 3. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (0,1) de cierto campo escalar f(u, v) de clase C^2 es $P(u, v) = 1 - u^2 + uv$. Si $\vec{g}(x, y) = (xy, y - x)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = (f \circ \vec{g})(x, y)$ en $(-1, 0, h(-1, 0))$. Justifique todos sus cálculos.

> **Respuesta:** $f(0, 1) = 1$, $\nabla f(0, 1) = (1, 0)$; $h(-1, 0) = 1$, $\nabla h(-1, 0) = (0, -1)$. Plano tangente: $y + z = 1$ ($z = 1 - y$).
>
> **Punto imagen:** $\vec{g}(-1, 0) = ((-1)\cdot 0, 0 - (-1)) = (0, 1)$, donde está centrado el Taylor de f.
> **Qué da el Taylor:** $f \in C^2$. El polinomio de Taylor de orden 2 de un campo C^2 en un punto A coincide con el campo en A y tiene sus mismas derivadas primeras (y segundas) en A; entonces el valor y el gradiente en A se obtienen **evaluando el polinomio y su gradiente en A**. $h(-1, 0) = f(0, 1) = P(0, 1) = 1 - 0 + 0 = \mathbf{1}$. $\nabla P(u, v) = (-2u + v, u)$, y en (0, 1): $\mathbf{\nabla f(0, 1) = (1, 0)}$.
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es polinómica y f es C^2, luego diferenciable en (0, 1). Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en $(-1, 0)$ y vale la regla de la cadena.
> **Cadena:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, en $(-1, 0)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(-1, 0) = (1, 0)\cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{(0, -1)}$.
> **Plano tangente:** $z = h(-1, 0) + h'_x(-1, 0)(x + 1) + h'_y(-1, 0)(y - 0) = 1 - y$, o sea $\mathbf{y + z = 1}$. Es un plano

paralelo al eje x (porque $h'_x(-1, 0) = 0$).
Trampa: P no está centrado en (0, 1): no tiene término lineal en u ni en v, pero $\nabla f(0, 1)$ no es (0, 0). Se deriva P y se evalúa en (0, 1).

Ejercicio 4. Considere la curva C definida por la intersección de la superficie parametrizada por $\vec{\sigma}(u, v) = (u + v^2, u^2, u + v)$, con $(u, v) \in [0, 2] \times [-1, 1]$, y la superficie de nivel de $f(x, y, z) = y^3 + xz$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Halle una ecuación para la recta tangente a la curva C en el punto (1, 1, 1).

Respuesta: Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La superficie de nivel: $f(1, 1, 1) = 1 + 1 = 2$, así que S: $y^3 + xz = 2$.
¿Qué (u, v) da el punto? $\vec{\sigma}(u, v) = (1, 1, 1)$ pide $u^2 = 1$, y como $u \in [0, 2]$, $u = 1$. Entonces $1 + v^2 = 1$ da $v = 0$, y la tercera coordenada cierra: $u + v = 1$ ✓. El punto es $\vec{\sigma}(1, 0)$, interior al dominio.
Normal a la paramétrica: $\vec{\sigma}_u = (1, 2u, 1) = (1, 2, 1)$ y $\vec{\sigma}_v = (2v, 0, 1) = (0, 0, 1)$. $\vec{N} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = (2, -1, 0) \neq \vec{0}$: $\vec{\sigma}$ es C^1 y regular en (1, 0).
Normal a la de nivel: f es C^1 y $\nabla f = (z, 3y^2, x) = (1, 3, 1) \neq \vec{0}$.
Dirección de C: $\vec{T} = \nabla f \times \vec{N} = (1, 3, 1) \times (2, -1, 0) = (3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = (1, 2, -7) \neq \vec{0}$. Las normales no son paralelas, así que las superficies se cortan transversalmente y C es regular en el punto. Control: $\vec{T} \cdot \nabla f = 1 + 6 - 7 = 0$ y $\vec{T} \cdot \vec{N} = 2 - 2 + 0 = 0$ ✓.
Resultado: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control por otro camino: la curva en el plano uv es $u^6 + (u + v^2)(u + v) = 2$; su tangente en (1, 0), llevada al espacio con $\vec{\sigma}_u$ y $\vec{\sigma}_v$, da (−1, −2, 7), paralela ✓.
Trampa: $u = -1$ también cumple $u^2 = 1$, pero está fuera de $[0, 2]$ (y pediría $v^2 = 2$). Y verificá siempre $\vec{T}$ ·(cada normal) = 0: un signo mal en una componente del producto vectorial es el error que más puntos cuesta.

Ejercicio 5. Halle valores reales de a y b para los cuales $f(x, y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y^2} + xy$ tiene un extremo en (1, 1). ¿De qué extremo se trata y cuál es su valor? Analice si para esos valores de a y b existen otros puntos críticos de f.

Respuesta: $a = 1$, $b = 1/2$. En (1, 1) hay un mínimo local de valor $f(1, 1) = 5/2$. No hay otros puntos críticos: (1, 1) es el único.

Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{x \neq 0, y \neq 0\}$, que contiene a (1, 1).
Condición necesaria: si hay extremo local en (1, 1), como f es diferenciable ahí, $\nabla f(1, 1) = 0$. $f_x = -a/x^2 + y$, $f_y = -2b/y^3 + x$. En (1, 1): $-a + 1 = 0$ y $-2b + 1 = 0$, así que **$a = 1$, $b = 1/2$**.
Hessiano: $f_{xx} = 2a/x^3$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 6b/y^4$. En (1, 1) con $a = 1$, $b = 1/2$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det H = 6 - 1 = 5 > 0$ y $f_{xx} = 2 > 0$: **mínimo local** (criterio del hessiano, f es C^2 en un entorno).
Valor: $f(1, 1) = 1 + 1/2 + 1 =$ **5/2**.
Otros puntos críticos: con $a = 1$, $b = 1/2$ el sistema es $y = 1/x^2$ y $x = 1/y^3$. Reemplazando: $x = 1/(1/x^2)^3 = x^6$, o sea $x(x^5 - 1) = 0$. Como $x \neq 0$, $x^5 = 1$, y la única raíz real es $x = 1$ ($t \mapsto t^5$ es estrictamente creciente). Entonces $y = 1$. **No hay otros puntos críticos**.
Trampa: olvidarse de que $x = 0$ no está en el dominio (la solución $x = 0$ de $x^6 = x$ se descarta) y no justificar que $x^5 = 1$ tiene una sola raíz real.

15/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la parte del primer octante limitada superiormente por el plano $x + y + z = 2$, suponiendo que la densidad de masa en el punto P es proporcional a su distancia al plano yz.

> **Respuesta:** $M = 2k/3$ ($k > 0$ la constante de proporcionalidad de la densidad $\delta = kx$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta(x, y, z)\, dxdydz$, así que hay que describir bien H y escribir la densidad.
> **El cuerpo:** primer octante es $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. El techo es el plano $x + y + z = 2$, que corta a los ejes en (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2). Los otros tres lados son los planos coordenados. H es el tetraedro con vértices en el origen y esos tres puntos. Su sombra sobre el plano xy (donde el techo toca el piso $z = 0$) es el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$.
> **Densidad:** la distancia de $P = (x, y, z)$ al plano yz (de ecuación $x = 0$) es $|x|$, y en el primer octante $|x| = x$. Entonces $\delta(x, y, z) = kx$, con $k > 0$.
> **Límites:** para cada (x, y) de T, z va del piso al techo: $0 \leq z \leq 2 - x - y$. El triángulo T se recorre con $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} x\, dz\, dy\, dx$. En z: primitiva xz, entre 0 y $2 - x - y$ da $x(2 - x - y)$. En y: primitiva $x(2 - x)y - \frac{xy^2}{2}$, entre 0 y $2 - x$ da $x(2 - x)^2 - \frac{x(2-x)^2}{2} = \frac{x(2-x)^2}{2}$. En x: $\frac{1}{2}\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{2k}{3}}$.
> **Control:** integrando en el orden dx dy dz (x de 0 a $2 - y - z$, y de 0 a $2 - z$, z de 0 a 2) sale lo mismo por la simetría del tetraedro. Otra forma: $\iiint_H x\, dV = V\cdot\bar{x}$, con $V = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = \frac{4}{3}$ y el centroide de un tetraedro en el promedio de sus vértices, $\bar{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} : \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al plano yz es $|x|$. Usar z (que es la distancia al plano xy) acá da lo mismo sólo por la simetría del tetraedro; en otro cuerpo no. Y $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ es la distancia al eje x, otro problema.

Ejercicio 2. Calcule el área de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 1 \leq z \leq 2,$
mediante una integral de superficie.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = 3\sqrt{2}\,\pi \approx 13{,}33$.
>
> **Planteo:** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ es un cono de dos hojas con vértice en el origen. Como $1 \leq z \leq 2$, sólo interesa la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, entre las alturas 1 y 2: un tronco de cono. Se pide $A(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
> **Parametrización:** $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r)$.
> **Dominio D:** sobre el cono $z = r$, así que $1 \leq z \leq 2$ es $1 \leq r \leq 2$; no hay restricción angular: $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $D = [1, 2] \times [0, 2\pi]$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$, $\vec{X}_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\text{sen}\,\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{2}\, r$, que no se anula en D porque $r \geq 1$: el vértice queda afuera y Σ es regular.

Cuenta: $A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 1 y 2 da $\frac{\sqrt{2}\,(4-1)}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Integral en θ: primitiva $\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\theta$, entre 0 y 2π da $3\sqrt{2}\,\pi$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{3\sqrt{2}\,\pi} \approx 13{,}33$.

Control geométrico: el área lateral de un tronco de cono es $\pi\,(R_1 + R_2)\,g$, con radios 1 y 2 y generatriz $g = \sqrt{((2-1)^2 + (2-1)^2)} = \sqrt{2}$: $\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$ ✓.

Trampa: responder 3π, que es el área de la corona $1 \le r \le 2$ (la proyección sobre el plano xy), sin el factor √2. Y no te preocupes por la hoja de abajo: $z \ge 1$ ya la descarta.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ con $\vec{f}(x, y) = (x^3 e^x + xy,\ x^2 + y^2)$ y
C: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x \ge 2$
recorrida de (2, 2) a (2, −2).

Respuesta: La curva va de (2, 2) a (2, −2) pasando por (4, 0) (sentido horario). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-4\pi - 80/3} \approx -39{,}23$.

La curva: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x-2)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro (2, 0) y radio 2; con $x \ge 2$ queda la mitad derecha. Va de (2, 2) a (2, −2) pasando por (4, 0): baja por la derecha, sentido **horario**. No es cerrada, así que Green no se aplica directo.

Cerrar la curva: agrego el segmento S de (2, −2) a (2, 2) sobre $x = 2$. $C \cup S$ es el borde del semidisco $D = \{(x-2)^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 2\}$, recorrido en sentido horario (arco hacia abajo por la derecha, segmento hacia arriba por la izquierda).

Hipótesis de Green: D es compacto con borde cerrado, simple y C^1 a trozos; $P = x^3 e^x + xy$ y $Q = x^2 + y^2$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Rotor: $Q'_x = 2x$, $P'_y = x$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = x}$.

Doble integral: polares centradas en (2, 0): $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 2$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, jacobiano r. $\iint_D x\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 (2 + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[r^2 + \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^2 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4 + \frac{8}{3}\cos\theta\right) d\theta = 4\pi + \frac{16}{3}$. Como el recorrido es horario: $\oint_{C \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi - \frac{16}{3}$.

El segmento: $\sigma(t) = (2, t)$, $-2 \le t \le 2$, $\sigma' = (0, 1)$. Sólo trabaja Q: $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^{2} (4 + t^2)\, dt = \left[4t + \frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 16 + \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$.

Resultado: $\int_C = \oint_{C \cup S} - \int_S = -4\pi - \frac{16}{3} - \frac{64}{3} = \mathbf{-4\pi - 80/3} \approx -39{,}23$.

Trampa: el segmento tiene que recorrerse en el sentido que cierra la curva (de (2, −2) a (2, 2)), y después se **resta**. Si lo tomás al revés, o lo sumás, el resultado cambia en 128/3.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (3x, y)$ de extremos (1, 1) y $(8, y_1)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy)$ a lo largo de C. Indique el sentido de recorrido considerado.

Respuesta: C: $y = \sqrt[3]{x}$, de (1, 1) a (8, 2) ($y_1 = 2$). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 158$ (−158 de (8, 2) a (1, 1)).

Línea de campo: en la zona $x > 0$ la primera componente de $\vec{g} = (3x, y)$ no se anula, así que la línea de campo es un gráfico $y = y(x)$ con $y' = \frac{g_2}{g_1} = \frac{y}{3x}$.

Resolución de la EDO: es de variables separables. Cerca de (1, 1) es $y > 0$: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{3x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3} \ln$

$x + c \Rightarrow y = K\,x^{1/3}$. Por (1, 1): K = 1, o sea $\mathbf{y = \sqrt[3]{x}}$. Control: $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{x^{1/3}}{3x} = \frac{y}{3x}$ ✓. En x = 8: $y_1 = \sqrt[3]{8} = 2$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? P = 2xy + y² y Q = x² + 2xy son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = 2x + 2y = Q'_x$. Potencial: $\phi = x^2y + xy^2 + h(y)$, $\phi'_y = x^2 + 2xy + h' \Rightarrow$ h constante. $\phi(x, y) = x^2y + xy^2$.

Sentido considerado: de (1, 1) a (8, 2), con x creciente (es el sentido del propio $\vec{g}$, que en esa zona tiene primera componente 3x > 0).

Cuenta: $\phi(8, 2) = 64 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 160$ y $\phi(1, 1) = 2$.

Resultado: $\mathbf{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 160 - 2 = 158}$ (–158 en el sentido contrario).

Trampa: y_1 no es dato: sale de evaluar la línea de campo en x = 8. Si integrás mal la EDO (por ejemplo y = x/3) el extremo cambia y todo el resultado también.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ que se encuentra arriba del plano z = 1.

Calcule el flujo del campo $\vec{f} = (y + z, xz, z^2)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Respuesta: Con la normal exterior a la esfera (hacia afuera y arriba): flujo = 99π/2. Con la otra orientación, –99π/2.

Planteo: Σ es el casquete $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, z ≥ 1: **no es cerrada** (su borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en z = 1). La cierro con la tapa T: z = 1, $x^2 + y^2 \le 9$. Σ ∪ T es la frontera del sólido M: $x^2 + y^2 + z^2 \le 10$, z ≥ 1.

Orientación (el gráfico): elijo en Σ la normal exterior a la esfera, $\check{n} = (x, y, z)/\sqrt{10}$ (hacia afuera y arriba). Es la exterior de M, y en la tapa la exterior de M es $\check{n} = (0, 0, -1)$.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (y + z, xz, z^2)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$; ∂M = Σ ∪ T es cerrada, suave a trozos, con normal exterior. $\iint_\Sigma + \iint_T = \iiint_M \nabla\cdot\vec{f}\, dV$.

Divergencia: 0 + 0 + 2z = **2z**.

Triple: en cilíndricas, $0 \le r \le 3$, $1 \le z \le \sqrt{(10 - r^2)}$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3 [z^2]_1^{\sqrt{(10 - r^2)}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr = 2\pi[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^3 = 2\pi(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}) = \frac{81\pi}{2}$.

Tapa: en T, $\vec{f} \cdot \check{n} = -f_3 = -z^2 = -1$, así que $\iint_T$ = –área = –9π.

Resultado: $\mathbf{\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = \frac{81\pi}{2} - (-9\pi) = \frac{99\pi}{2}}$ (con la orientación opuesta, –99π/2).

Control por definición: Σ es el gráfico $z = \sqrt{(10 - x^2 - y^2)}$ sobre el disco de radio 3, y la normal hacia arriba es (x/z, y/z, 1) dA. $\vec{f} \cdot (x/z, y/z, 1) = (xy + xz)/z + xy + z^2$. Los términos xy/z, x y xy son impares en x sobre un disco simétrico y se anulan; queda $\iint z^2\, dA = \iint (10 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[5r^2 - \frac{r^4}{4}]_0^3 = 2\pi(45 - \frac{81}{4}) = \frac{99\pi}{2}$ ✓.

Trampa: el signo de la tapa: la normal exterior de M en z = 1 apunta para abajo, así que su flujo es –9π y se **suma** 9π al despejar.

8/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 4)}}{\sqrt{(xy - x)}}$.
Exprese y grafique el dominio natural de f, indicando si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : x \geq 2, y > 1\} \cup \{(x, y) : x \leq -2, y < 1\}$. No es conexo (dos piezas separadas por la franja $-2 < x < 2$), no es abierto (contiene puntos de las rectas $x = \pm 2$, que son frontera) y no es cerrado (no contiene los puntos de $y = 1$ con $|x| \geq 2$, que son frontera).
>
> **Condiciones:** numerador: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2$, o sea $x \leq -2$ o $x \geq 2$. Denominador: $\sqrt{(xy - x)}$ tiene que existir y no ser cero, así que $xy - x > 0$, es decir $x(y - 1) > 0$.
> **Signos:** $x(y - 1) > 0 \Leftrightarrow (x > 0$ y $y > 1)$ o $(x < 0$ y $y < 1)$. Cruzando con $|x| \geq 2$: si $x \geq 2$ (positivo) hace falta $y > 1$; si $x \leq -2$ (negativo) hace falta $y < 1$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -2, y < 1\}$.
> **Gráfico:** dos "cuadrantes" corridos. Uno a la derecha de $x = 2$ y arriba de $y = 1$: la semirrecta $x = 2$, $y > 1$ en trazo lleno (pertenece), la semirrecta $y = 1$, $x > 2$ punteada (no pertenece) y el vértice $(2, 1)$ con círculo vacío. El otro a la izquierda de $x = -2$ y abajo de $y = 1$: la semirrecta $x = -2$, $y < 1$ llena, la semirrecta $y = 1$, $x < -2$ punteada y el vértice $(-2, 1)$ vacío.
> **Frontera (la usamos para justificar):** $\partial D = \{x = 2, y \geq 1\} \cup \{y = 1, x \geq 2\} \cup \{x = -2, y \leq 1\} \cup \{y = 1, x \leq -2\}$.
> **¿Abierto?** No: $(2, 2) \in D$ y todo entorno suyo tiene puntos con $x < 2$, que no están en D. Es un punto de D que no es interior.
> **¿Cerrado?** No: $(3, 1) \notin D$ (ahí $x(y - 1) = 0$), pero $(3, 1 + 1/n) \in D$ y tiende a $(3, 1)$. D no contiene ese punto de su frontera.
> **¿Conexo?** No: $D \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos semiplanos abiertos disjuntos, y D tiene puntos en los dos, $(2, 2)$ y $(-2, 0)$. Dicho con caminos: una curva continua dentro de D de $(2, 2)$ a $(-2, 0)$ tendría una abscisa que va de 2 a -2 y, por Bolzano, pasaría por $x = 0$, pero D no tiene puntos con $|x| < 2$. Cada pieza por separado sí es conexa (es convexa).
> **Trampa:** "no es abierto" y "no es cerrado" se justifican con un punto concreto cada uno. Y ojo con los vértices $(\pm 2, 1)$: están en $x = \pm 2$ pero tienen $y = 1$, así que no pertenecen.

Ejercicio 2. Sean $f(x, y) = ax^2 + xy$ y C la curva de ecuación vectorial $\vec{X} = (2t, t^2 + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que en el punto $(1, \dfrac{5}{4})$ la curva C y el conjunto de nivel de f tengan la misma recta tangente.

> **Respuesta:** $a = -7/8$; recta tangente común: $(x, y) = (1, 5/4) + \lambda(2, 1)$, o sea $x - 2y = -3/2$.
>
> **Planteo:** las dos rectas tangentes pasan por $P = (1, 5/4)$, así que coinciden si y sólo si tienen la misma dirección.
> **P está en C:** $2t = 1$ y $t^2 + 1 = 5/4$ se cumplen con $t_0 = 1/2$.
> **Tangente a C:** $\vec{X}'(t) = (2, 2t) \rightarrow \vec{X}'(1/2) = (2, 1) \neq \vec{0}$.
> **Conjunto de nivel de f por P:** es $\{(x, y): ax^2 + xy = a + 5/4\}$. f es polinómica ($C^1$) y $\nabla f = (2ax + y, x) \rightarrow$

$\nabla f(P) = (2a + 5/4, 1)$, que nunca es $\vec{0}$ (segunda componente 1). Por el teorema de la función implícita, cerca de P el nivel es una curva regular y su recta tangente es perpendicular a $\nabla f(P)$.
Condición: $(2, 1) \perp \nabla f(P)$: $2(2a + 5/4) + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 7/2 = 0 \Rightarrow$ **$a = -7/8$**.
Control: con $a = -7/8$, $\nabla f(P) = (-1/2, 1)$ y $(-1/2, 1)\cdot(2, 1) = 0$ ✓. La recta común es $(x, y) = (1, 5/4) + \lambda(2, 1)$, o sea $-(1/2)(x - 1) + (y - 5/4) = 0$, que es $x - 2y = -3/2$.
Trampa: pedir $\nabla f(P) \parallel \vec{X}'(t_0)$: el gradiente es normal al conjunto de nivel, no tangente.

Ejercicio 3. Sean $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$, con $\vec{g}(x, y) = (x^2y, y - x^2)$, y, $x + 2y + z = 3$ la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$. Calcule $h(1.02, 1.97)$ utilizando una aproximación lineal.

Respuesta: $f(2, 1) = -1$, $\nabla f(2, 1) = (-1, -2)$; $h(1, 2) = -1$, $\nabla h(1, 2) = (0, -3)$. $h(1.02, 1.97) \approx -0.91$.

Datos de f: el plano tangente al gráfico en $(2, 1, f(2, 1))$ es $z = 3 - x - 2y$, que tiene que ser $z = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x - 2) + f'_y(2, 1)(y - 1)$. Evaluando en $(2, 1)$: $f(2, 1) = 3 - 2 - 2 = -1$, y comparando coeficientes: **$\nabla f(2, 1) = (-1, -2)$**.
Punto base: la aproximación se hace alrededor de un punto (x_0, y_0) cercano a $(1.02, 1.97)$ donde sepamos todo, o sea con $\vec{g}(x_0, y_0) = (2, 1)$: $x^2y = 2$ y $y - x^2 = 1$. De la segunda $y = 1 + x^2$; en la primera $x^2(1 + x^2) = 2$, $x^4 + x^2 - 2 = 0$, $(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$, $x = \pm 1$, $y = 2$. Los candidatos son $(1, 2)$ y $(-1, 2)$; el que está cerca de $(1.02, 1.97)$ es **$(1, 2)$**. Ahí $h(1, 2) = f(\vec{g}(1, 2)) = -1$.
Hipótesis: $f \in C^1$ es diferenciable en $(2, 1)$ y $\vec{g}$ es polinómica, así que h es diferenciable en $(1, 2)$ y vale la regla de la cadena (y la linealización aproxima a h cerca de $(1, 2)$).
Cadena: $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$, en $(1, 2)$: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. $\nabla h(1, 2) = (-1, -2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-4 + 4, -1 - 2) =$ **$(0, -3)$**.
Aproximación lineal: $h(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) \approx h(1, 2) + h'_x\Delta x + h'_y\Delta y$ con $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.03$: $h(1.02, 1.97) \approx -1 + 0\cdot 0.02 + (-3)(-0.03) = -1 + 0.09 =$ **-0.91**.
Trampa: linealizar en $(2, 1)$ (el punto de f) en vez de en $(1, 2)$ (el de h), o elegir la preimagen $(-1, 2)$, que queda lejos de $(1.02, 1.97)$. Y ojo con el signo de Δy: $1.97 - 2 = -0.03$.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Respuesta: Puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En $(0, 0)$ hay punto silla ($\det H = -9$). En $(1, 1)$ hay mínimo relativo ($\det H = 27$, $f''_{xx} = 6$), de valor $f(1, 1) = -1$.

Planteo: f es polinómica, así que es C^2 en todo $\mathbb{R}^2$. Por eso un extremo relativo sólo puede estar donde $\nabla f = \vec{0}$, y en cada punto crítico decide el hessiano: $\det H > 0$ y $f''_{xx} > 0$ da mínimo; $\det H > 0$ y $f''_{xx} < 0$ da máximo; $\det H < 0$ da punto silla; $\det H = 0$ no decide.
Puntos críticos: $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$. De $f'_x = 0$, $y = x^2$; en $f'_y = 0$: $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. El factor $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales (discriminante -3), así que $x = 0$ o $x = 1$. Puntos: **$(0, 0)$** y **$(1, 1)$**.
Hessiano: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$, así que $H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$ y $\det H = 36xy - 9$.
En $(0, 0)$: $\det H = -9 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 0) = 0$).
En $(1, 1)$: $\det H = 36 - 9 = 27 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(1, 1) = 1 + 1 - 3 =$ **-1**.

Trampa: en $x^4 = x$ no dividas por x, que perdés el origen. Y el mínimo es sólo relativo: sobre el eje x, $f(x, 0) = x^3$ tiende a $-\infty$, así que f no tiene mínimo absoluto.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u^2 + v, u - v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle la intersección entre la recta normal a Σ en $(2, 4, -1)$ y el plano xy.

Respuesta: $(u, v) = (1, 2)$; $\vec{N} = (-5, 3, -2)$; recta normal $\vec{X} = (2, 4, -1) + t(-5, 3, -2)$; corta al plano xy en $(9/2, 5/2, 0)$.

Paso 1, parámetros de (2, 4, –1): $uv = 2$, $2u^2 + v = 4$, $u - v = -1$. De la tercera $v = u + 1$, y en la primera $u^2 + u - 2 = 0$: $u = 1$ o $u = -2$. Con $u = 1$, $v = 2$: $2 + 2 = 4$ ✓. Con $u = -2$, $v = -1$: $8 - 1 = 7 \neq 4$ ✗. Único par: **(u, v) = (1, 2)**.
Paso 2, derivadas: $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (v, 4u, 1) = (2, 4, 1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, -1) = (1, 1, -1)$.
Paso 3, normal: $\vec{N} = (4\cdot(-1) - 1\cdot1, 1\cdot1 - 2\cdot(-1), 2\cdot1 - 4\cdot1) =$ **(–5, 3, –2)** $\neq \vec{0}$: punto regular. Recta normal: $\vec{X}$ **= (2 – 5t, 4 + 3t, –1 – 2t)**, es decir $(2, 4, -1) + t(-5, 3, -2)$.
Paso 4, plano xy: $z = 0$ pide $-1 - 2t = 0$, $t = -1/2$. Punto: $(2 + 5/2, 4 - 3/2, 0) =$ **(9/2, 5/2, 0)**.
Trampa: las dos primeras ecuaciones combinadas dan dos candidatos; el que no verifica la tercera coordenada no es el punto. Y el plano xy es $z = 0$, no "x = y".

8/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, y^2 + x, e^x y)$ a través de la frontera del cuerpo H: $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 5 - x^2 - y^2$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 416/15$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** la frontera de H es cerrada; elijo la normal exterior y uso Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (yz, y^2 + x, e^x y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (productos de polinomios y exponencial). H es acotado y su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 0$, techo paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, plano $y = 0$ y pared cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ ($y \ge 0$, $0 \le z \le 1$).
> **La región:** sobre el semidisco $D = \{x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\} = \{0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le 2\}$, z va de 0 a $5 - r^2$, que es $\ge 1 > 0$ en D (el techo nunca baja del piso).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(yz) + \partial_y(y^2 + x) + \partial_z(e^x y) = 0 + 2y + 0 = 2y$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{5-r^2} 2r \operatorname{sen}\theta \cdot r \, dz \, dr \, d\theta = (\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta)(\int_0^2 (5r^2 - r^4) \, dr) = [-2\cos\theta]_0^{\pi} \cdot [\frac{5r^3}{3} - \frac{r^5}{5}]_0^2 = 4 \cdot (\frac{40}{3} - \frac{32}{5}) = 4 \cdot \frac{104}{15} = \frac{416}{15}$.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\Phi = \frac{416}{15}}$ saliente.
> **Gráfico:** la mitad ($y \ge 0$) de una "cúpula" de paraboloide sobre el disco de radio 2, con pared cilíndrica de altura 1 y la cara plana $y = 0$; flechas saliendo (en la cara $y = 0$ apuntan hacia $(0, -1, 0)$, en el piso hacia $(0, 0, -1)$).
> **Control por caras:** plano $y = 0$: $\vec{f} \cdot (0, -1, 0) = -(0 + x)$, y x es impar sobre esa cara simétrica: 0. Pared: $\frac{32}{3}$. Piso (normal $(0, 0, -1)$): $-\iint_D e^{xy} \, dA \approx -8{,}7179$ (no tiene primitiva elemental, se calcula numéricamente). Techo (normal $(2x, 2y, 1)$), calculado directo: $\approx 25{,}7846$. Suman $\approx 27{,}7333 = \frac{416}{15}$ ✓.
> **Trampa:** la simetría que anula $\iiint 2y$ sobre un sólido completo no sirve acá: H sólo tiene $y \ge 0$, así que $2y$ no se cancela y la integral en θ va de 0 a π.

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le x$, $y \ge 0$.

> **Respuesta:** $A(\Sigma) = 1$.
>
> **Planteo:** Σ es un pedazo del cilindro circular de radio 1 y eje z, recortado abajo por el plano $z = 0$ y arriba por el plano $z = x$. $A(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint_D \|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z\| \, d\theta \, dz$. Ojo: el cilindro no se puede proyectar sobre el plano xy (se ve como una circunferencia, área 0), así que se parametriza con el ángulo y la altura.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$.
> **Dominio D:** $y \ge 0$ da $\operatorname{sen}\theta \ge 0$, o sea $\theta \in [0, \pi]$. Además $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, es decir $\cos\theta \ge 0$; junto con lo anterior queda $\theta \in [0, \pi/2]$. Para cada θ, la altura va de 0 a $x = \cos\theta$. $D = \{(\theta, z): 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le z \le \cos\theta\}$.
> **Vector normal:** $\vec{X}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$. $\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, con $\|\vec{X}_\theta \times \vec{X}_z\| = \sqrt{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = 1$. La parametrización es C^1, inyectiva en D y la normal nunca se anula: Σ es regular.

Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} 1 \, dz \, d\theta$. Integral en z: primitiva z, da cos θ. Integral en θ: primitiva sen θ, entre 0 y π/2 da 1 − 0.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{1}$.
Control (proyectando sobre el plano xz): con $y \geq 0$, Σ es la gráfica $y = \sqrt{(1 - x^2)}$ sobre $R = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$. El factor de área es $\sqrt{(1 + y_x^2 + y_z^2)} = \sqrt{(1 + \frac{x^2}{1 - x^2})} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$. $A = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \, dz \, dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}} \, dx = [-\sqrt{(1 - x^2)}]_0^1 = 1$ ✓ (impropia en x = 1, pero converge).
Trampa: tomar $\theta \in [0, \pi]$ sólo por $y \geq 0$. Para $\theta > \pi/2$ es $x < 0$ y la franja $0 \leq z \leq x$ está vacía; si integrás cos θ entre 0 y π te da 0, que no puede ser un área.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (ye^{xy} - xy + e^x, xe^{xy} + x^2)$ a lo largo de la curva
Γ: $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y \geq 0$
recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Respuesta: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = e^4 - 1 - 12\pi \approx 15{,}90$.

La curva: $x^2 - 4x + y^2 = 0$ es $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro (2, 0) y radio 2. Con $y \geq 0$ es la mitad de arriba, de (0, 0) a (4, 0) pasando por (2, 2): sentido **horario**. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (4, 0) a (0, 0) sobre el eje x. $\Gamma \cup C_1$ es el borde del semidisco $D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ en sentido horario: orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = ye^{xy} - xy + e^x$ y $Q = xe^{xy} + x^2$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es regular y su borde es cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: $P'_y = e^{xy} + xye^{xy} - x$, $Q'_x = e^{xy} + xye^{xy} + 2x$. $Q'_x - P'_y = 3x$.
Doble integral: polares centradas: $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, jacobiano r, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. $\iint_D 3x \, dA = \int_0^\pi \int_0^2 3(2 + r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta = 3[\int_0^\pi \int_0^2 2r \, dr \, d\theta + \int_0^\pi \int_0^2 r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta] = 3[\pi \cdot 4 + (8/3) \cdot [\mathrm{sen}\,\theta]_0^\pi] = 3 \cdot 4\pi = 12\pi$. Con la orientación horaria, $\oint_{\Gamma \cup C_1} = -12\pi$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 4 a 0; dy = 0 y P(t, 0) = 0 − 0 + e^t: $\int_4^0 e^t \, dt = [e^t]_4^0 = 1 - e^4$.
Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -12\pi - (1 - e^4) = \mathbf{e^4 - 1 - 12\pi} \approx 15{,}90$.
Trampa: en polares centradas, x no es r cos θ sino 2 + r cos θ. Si te olvidás del 2, la integral de 3x da 0 y perdés el −12π.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), x + z, e^{z^2})$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices (2, 0, 2), (0, 2, 0), (−2, 0, 2). Indique en un gráfico el sentido de recorrido usado en el cálculo.

Respuesta: Recorriendo A = (2, 0, 2) → B = (0, 2, 0) → C = (−2, 0, 2) → A (antihorario visto desde arriba): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. En el sentido contrario, −4.

Planteo: el borde del triángulo es una curva cerrada (poligonal, suave a trozos) y φ no se conoce, así que lo natural es el teorema del rotor tomando como superficie el triángulo mismo.
Plano del triángulo: A = (2, 0, 2), B = (0, 2, 0), C = (−2, 0, 2). B − A = (−2, 2, −2), C − A = (−4, 0, 0) y (B − A) × (C − A) = (0, 8, 8) ∥ (0, 1, 1). El plano es **y + z = 2** (los tres vértices lo cumplen: 0 + 2, 2 + 0, 0 + 2).
Superficie elegida: Σ = el triángulo plano, $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 2 - y)$ con (x, y) en el triángulo T de vértices (2, 0), (0, 2), (−2, 0) (la proyección sobre xy). Su borde es exactamente la curva del enunciado y la normal es constante: $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -1) = (0, 1, 1)$, hacia arriba.
Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ es plana, regular y orientable; su borde es una

poligonal cerrada simple, suave a trozos.

Sentido elegido (lo que va en el gráfico): A → B → C → A. Proyectado: (2, 0) → (0, 2) → (–2, 0) → (2, 0), que es antihorario visto desde arriba (desde z positivo). En el dibujo: el triángulo inclinado, con flechas de A a B, de B a C y de C a A, y la normal (0, 1, 1) saliendo hacia arriba y hacia y positivo.

Orientación compatible: regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Con los dedos siguiendo A → B → C el pulgar da (B – A) × (C – A) = (0, 8, 8), hacia arriba: coincide con la normal de la parametrización.

Rotor: con P = φ(x), Q = x + z, R = e^{z^2}: $\operatorname{rot}\vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$. φ(x) depende sólo de x, así que no aporta nada.

Flujo del rotor: $\iint_T (-1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)\, dxdy = \iint_T 1\, dxdy = \text{Área}(T) = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$.

Resultado: $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s}$ = **4** recorriendo A → B → C → A (y –4 en el sentido opuesto).

Control (circulación directa): φ(x)dx y $e^{z^2}dz$ son exactas (dan 0 en una curva cerrada); queda $\oint$ (x + z)dy. Tramo AB: (2 – 2t, 2t, 2 – 2t), t ∈ [0, 1], x + z = 4 – 4t, dy = 2dt: $\int_0^1 (8 - 8t)\, dt = [8t - 4t^2]_0^1 = 4$. Tramo BC: (–2t, 2 – 2t, 2t): x + z = 0. Tramo CA: y = 0, dy = 0. Total 4 ✓.

Trampa: sin el sentido declarado (y dibujado) el número no significa nada: el enunciado lo pide explícitamente.

Ejercicio 5. Sea $\vec{g}(x, y) = \mu(x)(xe^x, e^{2x+y})$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Halle μ para que $\vec{g}$ sea campo de gradientes y $\vec{g}(0, 0) = (0, 2)$.

b) Halle todas las funciones potenciales de $\vec{g}$ para la función μ hallada en a).

Respuesta: a) $\mu(x) = 2e^{-2x}$, y queda $\vec{g}(x, y) = (2xe^{-x}, 2e^y)$. b) Las funciones potenciales son $\varphi(x, y) = 2e^y - 2(x + 1)e^{-x} + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

a) Planteo: $\vec{g} = (P, Q)$ con $P = \mu(x)xe^x$ y $Q = \mu(x)e^{2x+y}$. Como $\mu \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo: $\vec{g}$ es campo de gradientes si y sólo si $Q'_x = P'_y$ en todo $\mathbb{R}^2$.

Derivadas cruzadas: P no depende de y, así que $P'_y = 0$. $Q'_x = \mu'(x)e^{2x+y} + 2\mu(x)e^{2x+y} = (\mu' + 2\mu)e^{2x+y}$. Como $e^{2x+y} > 0$, la condición es **$\mu' + 2\mu = 0$**.

EDO: $\mu \equiv 0$ no sirve (daría $\vec{g}(0, 0) = \vec{0}$). Separando: $\mu'/\mu = -2 \Rightarrow \ln|\mu| = -2x + k \Rightarrow \mu(x) = Ce^{-2x}$.

Condición: $\vec{g}(0, 0) = \mu(0)(0 \cdot e^0, e^0) = (0, \mu(0)) = (0, 2) \Rightarrow C = 2$. **$\mu(x) = 2e^{-2x}$**. Reemplazando, como $e^{-2x}e^{2x+y} = e^y$: $\vec{g}(x, y) = (2xe^{-x}, 2e^y)$, y ahí se ve $Q'_x = 0 = P'_y$.

b) Integrando en x: $\varphi'_x = 2xe^{-x} \Rightarrow \varphi = \int 2xe^{-x}\, dx + h(y)$. Por partes (u = 2x, dv = $e^{-x}dx$): $\int 2xe^{-x}\, dx = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\, dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} = -2(x + 1)e^{-x}$.

Ajuste en y: $\varphi'_y = h'(y) = 2e^y \Rightarrow h(y) = 2e^y + K$.

Control: $\nabla\varphi = (-2e^{-x} + 2(x + 1)e^{-x}, 2e^y) = (2xe^{-x}, 2e^y) = \vec{g}$.

Resultado: $\varphi(x, y) = 2e^y - 2(x + 1)e^{-x} + K$, $K \in \mathbb{R}$. Son todas: si φ_1 y φ_2 son potenciales, $\nabla(\varphi_1 - \varphi_2) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^2$, que es conexo, así que difieren en una constante.

Trampa: piden "todas": sin el + K (y la razón de por qué no hay otras) la respuesta queda incompleta. Y la condición $\vec{g}(0, 0) = (0, 2)$ es sobre el campo, que en (0, 0) vale (0, μ(0)).

30/6/25 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^3 + y, y^3 - z, y)$ a través de la frontera del cuerpo definido por
$3x^2 + 3y^2 - 5 \le z \le x^2 + y^2 + 3$.
Indique en un gráfico la orientación considerada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 64\pi$ (normales hacia afuera del sólido).
>
> **Planteo:** el cuerpo $H = \{3x^2 + 3y^2 - 5 \le z \le x^2 + y^2 + 3\}$ está entre dos paraboloides que abren hacia arriba; su frontera es cerrada. Elijo la normal exterior y aplico Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (x^3 + y, y^3 - z, y)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado (ver región) y su frontera, unión de los dos casquetes de paraboloide, es cerrada y suave a trozos (la arista es la circunferencia de corte).
> **La región:** los paraboloides se cortan donde $3r^2 - 5 = r^2 + 3 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$, a altura $z = 7$. Para $r < 2$ el de abajo es $3r^2 - 5$ (por ejemplo en $r = 0$: $-5 \le 3$). En cilíndricas: $H = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ 3r^2 - 5 \le z \le r^2 + 3\}$, de altura $(r^2 + 3) - (3r^2 - 5) = 8 - 2r^2$.
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(x^3 + y) + \partial_y(y^3 - z) + \partial_z(y) = 3x^2 + 3y^2 + 0 = 3r^2$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{3r^2-5}^{r^2+3} 3r^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi\int_0^2 3r^3(8 - 2r^2)\, dr = 2\pi\int_0^2 (24r^3 - 6r^5)\, dr = 2\pi[6r^4 - r^6]_0^2 = 2\pi(96 - 64) = 64\pi$.
> **Resultado: $\Phi = 64\pi$** saliente (-64π con la normal interior).
> **Gráfico:** una "lente" con fondo en el paraboloide angosto $z = 3r^2 - 5$ (vértice en $(0, 0, -5)$) y techo en el ancho $z = r^2 + 3$ (vértice en $(0, 0, 3)$), unidos en la circunferencia $r = 2$, $z = 7$. Flechas saliendo: en el techo con tercera componente positiva, en el fondo con tercera componente negativa.
> **Control por caras:** techo (normal $(-2x, -2y, 1)$) da -32π y fondo (normal $(6x, 6y, -1)$) da 96π: suman 64π ✓.
> **Trampa:** el elemento de volumen en cilíndricas lleva r: la integral es de $3r^2 \cdot r$, no de $3r^2$. Sin ese r da $2\pi\int(24r^2 - 6r^4) = 2\pi(64 - 38{,}4)$, que no es lo pedido.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 7/3$.
>
> **Planteo:** $P = \varphi(y) + y^2$, $Q = x\varphi'(y) + xy$. Como $\varphi \in C^2$, φ' es C^1 y P, Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (por eso piden C^2 y no C^1).
> **Rotor escalar:** $Q'_x = \varphi'(y) + y$, $P'_y = \varphi'(y) + 2y$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -y}$. No es de gradientes, pero φ' se cancela.
> **Cierre:** Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, el segmento de C a A sobre el eje x. A $\to$ B $\to$ C $\to$ A sube, baja y vuelve por abajo hacia la izquierda: es el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2 - y\}$ en **sentido horario**.
> **Hipótesis de Green:** D es regular, su borde es cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D (-y)\, dA = \iint_D y \, dA$.
> **Doble integral:** $\iint_D y \, dA = \int_0^1 y\,[x]_y^{2-y}\, dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\, dy = [y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.
> **Segmento:** S: $(t, 0)$, t de 2 a 0, derivada $(1, 0)$; $P(t, 0) = \varphi(0) + 0 = 1$, así que $\int_S = \int_2^0 1 \, dt = -2$. Acá se

usa el dato $\varphi(0) = 1$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{3} - (-2) =$ **7/3**.

Control: $(\varphi(y), x\varphi'(y)) = \nabla(x\varphi(y))$, que de A a C aporta $2\varphi(0) - 0 = 2$. Lo que queda, $\int y^2\,dx + xy\,dy$: en AB ($x = y = t$) es $\int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}$; en BC ($x = 1 + t$, $y = 1 - t$) es $\int_0^1 (-2t + 2t^2)\,dt = -\frac{1}{3}$. Total $2 + \frac{1}{3} = 7/3$ ✓.

Trampa: A → B → C → A es horario. Y sobre el eje x no te olvides de $\varphi(0)$: el segmento no da 0.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Respuesta: Con normal hacia arriba ($\vec{N} = (2x, 2y, 1)$): $\Phi = 9\pi/4$. Con la opuesta, $-9\pi/4$.

Planteo: Σ: $z = 9 - x^2 - y^2$, paraboloide con vértice (0, 0, 9) que abre hacia abajo. En el primer octante: $x, y \geq 0$ y $z \geq 0$, o sea $x^2 + y^2 \leq 9$. Es un gráfico sobre D = cuarto de disco de radio 3 ($x, y \geq 0$). $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$.
Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$.
Orientación elegida: la de $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$: tercera componente $1 > 0$, normal hacia arriba, que en el paraboloide es hacia afuera del sólido que encierra con los planos coordenados. En el gráfico: el cuarto de paraboloide con flechitas que en el vértice (0, 0, 9) apuntan según $\vec{k}$ y en el borde, por ejemplo en (3, 0, 0), según (6, 0, 1) (casi horizontales, hacia afuera).
Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2yz, -2xz, 1)$; $\vec{f} \cdot \vec{N} = 4xyz - 4xyz + 1 = 1$. Las dos primeras componentes se cancelan solas.

Cuenta: $\Phi = \iint_D 1\,dx\,dy =$ área de D. En polares: $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9\pi}{4}$.

Resultado: con la normal hacia arriba, $\Phi =$ **$9\pi/4$** (con la orientación opuesta sería $-9\pi/4$).
Control con Gauss: $\operatorname{div} \vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ ($\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$). Cierro con los tres planos coordenados, normales salientes $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$. En $x = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{i}) = -2yz$, $\int_0^3 \int_0^{9 - y^2} -2yz\,dz\,dy = -\int_0^3 y(9 - y^2)^2\,dy$ (primitiva de $y(9 - y^2)^2$: $-\frac{(9 - y^2)^3}{6}$) $= -\frac{729}{6} = -\frac{243}{2}$. En $y = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{j}) = 2xz$, por simetría $+\frac{243}{2}$. En $z = 0$: $\vec{f} \cdot (-\vec{k}) = -1$, da $-9\pi/4$. Gauss: $\Phi - 9\pi/4 = 0$, así que $\Phi = 9\pi/4$ ✓.
Trampa: el enunciado no fija la orientación y por eso pide el gráfico: si no la indicás, el signo no está justificado.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (t \cos \frac{\pi t}{2}, t \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$
que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (e^x(y + z), e^x, e^x + 2z)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [-1, 0]$, de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1). Con $U = e^x(y + z) + z^2$, la circulación es $U(B) - U(A) = 2 - 1 = 1$.

El arco: $\|\vec{X}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t/2) + t^2\operatorname{sen}^2(\pi t/2) + (t + 1)^2 = 2t^2 + 2t + 1$. Estar en la bola cerrada de radio 1 es $2t^2 + 2t + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2t(t + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 0$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi/2), -\operatorname{sen}(-\pi/2), 0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{X}(0) = (0, 0, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1).
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (e^x(y + z), e^x, e^x + 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$;

$P'_z - R'_x = e^x - e^x = 0$; $Q'_x - P'_y = e^x - e^x = 0$. rot $\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
Potencial: $U'_y = e^x \Rightarrow U = ye^x + h(x, z)$. $U'_x = ye^x + h'_x = ye^x + ze^x \Rightarrow h = ze^x + k(z)$. $U'_z = e^x + k'(z) = e^x + 2z \Rightarrow k = z^2$. **$U = e^x(y + z) + z^2$.**
Circulación: $U(B) = e^0(0 + 1) + 1 = 2$; $U(A) = e^0(1 + 0) + 0 = 1$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2 - 1 =$ **1**.
Trampa: el arco es $t \in [-1, 0]$, no $[0, 1]$; y la orientación "según la parametrización" es de $t = -1$ a $t = 0$, o sea de (0, 1, 0) a (0, 0, 1).

Ejercicio 5. Sean C la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto (0, 0) y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x\,dxdy$.

Respuesta: C: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2). $\iint_D x\,dxdy = -8\pi$.
Línea de campo (EDO): $x' = -y$, $y' = x + 2$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2}{-y}$. Separando: $y\,dy = -(x + 2)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{(x + 2)^2}{2} + c \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = k$. Por (0, 0): $k = 4$. **C: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$**. Control: $\frac{d}{dt}[(x + 2)^2 + y^2] = 2(x + 2)(-y) + 2y(x + 2) = 0$ ✓. (El campo se anula en (−2, 0), el centro: ahí no pasa ninguna línea de campo, pero no molesta porque lo que se integra es x sobre D, no el campo.)
La región: C es la circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2; está toda en el semiplano $x \le 0$ y toca al eje y sólo en el origen. D es el disco **$D = \{(x + 2)^2 + y^2 \le 4\}$**.
Cambio de variables: polares centradas en el centro, $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Es una traslación seguida de polares: jacobiano $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
Cuenta: $\iint_D x\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \int_0^2 r^2\,dr$.
Primero: $-2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 = -2 \cdot 2\pi \cdot 2 = -8\pi$. Segundo: $[\text{sen}\,\theta]_0^{2\pi} = 0$, se anula.
Resultado: $\iint_D x\,dxdy =$ **-8π**. Da negativo, y está bien: D está entero en $x \le 0$. (Es $\bar{x} \cdot$ área $= (-2) \cdot 4\pi$.)
Control con polares en el origen: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = -4x$, o sea $r = -4\cos\theta$, que pide $\cos\theta \le 0$: $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{-4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta \cdot \frac{(-4\cos\theta)^3}{3}\,d\theta = -\frac{64}{3}$
$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = -8\pi$ ✓.
Trampa: con polares en el origen, θ no va de 0 a 2π ni r hasta 2: el disco no contiene al origen en su interior. Y no hay que tachar el signo: el resultado negativo es correcto.

28/6/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región contenida en el primer octante que se encuentra limitada inferiormente por el plano xy y superiormente por la superficie de ecuación $3x^2 + 3y^2 + z = 12$. Grafique H y calcule $\iiint_H y^2\,dxdydz$.

> **Respuesta:** H es el cuarto (primer octante) de la cúpula $0 \le z \le 12 - 3x^2 - 3y^2$; $\iiint_H y^2\,dx\,dy\,dz = \mathbf{4\pi} \approx 12{,}57$.
>
> **El sólido (gráfico):** $3x^2 + 3y^2 + z = 12$ es $z = 12 - 3(x^2 + y^2)$, un paraboloide de revolución alrededor del eje z, con vértice (0, 0, 12) y que abre hacia abajo. Corta al plano xy ($z = 0$) en $x^2 + y^2 = 4$, la circunferencia de radio 2. Entre el plano xy y el paraboloide queda una cúpula maciza; el primer octante ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$) se queda con un cuarto. Para dibujarlo: la base es el cuarto de círculo de radio 2 en el plano xy; las dos caras planas están en los planos $y = 0$ (encerrada por la parábola $z = 12 - 3x^2$, de (0, 0, 12) a (2, 0, 0)) y $x = 0$ (parábola $z = 12 - 3y^2$, de (0, 0, 12) a (0, 2, 0)); y el techo curvo es el trozo de paraboloide que une esas dos parábolas.
> **Cilíndricas:** $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, con $|J| = r$. Primer octante: $\theta \in [0, \pi/2]$. La base: $r \in [0, 2]$. Altura: $z \in [0, 12 - 3r^2]$. El integrando y^2 pasa a $r^2\,\text{sen}^2\theta$.
> **Planteo:** $\iiint_H y^2\,dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{12 - 3r^2} r^2\,\text{sen}^2\theta \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$.
> **En z:** el integrando no depende de z; la primitiva es $r^3\,\text{sen}^2\theta \cdot z$ y da $r^3\,\text{sen}^2\theta\,(12 - 3r^2)$.
> **En r:** $\int_0^2 (12r^3 - 3r^5)\,dr$, primitiva $3r^4 - \frac{r^6}{2}$, entre 0 y 2 da $48 - 32 = 16$.
> **En θ:** $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\,d\theta$, con $\text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ la primitiva es $\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}$, que entre 0 y π/2 da $\frac{\pi}{4}$.
> **Resultado:** $\iiint_H y^2\,dV = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = \mathbf{4\pi} \approx 12{,}57$.
> **Control por simetría:** H es simétrica respecto del plano $y = x$, así que $\iiint y^2 = \iiint x^2 = \frac{1}{2} \iiint r^2\,dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 r^3(12 - 3r^2)\,dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 16 = 4\pi$ ✓ (y en cartesianas da lo mismo).
> **Trampa:** el integrando final es $r^3\,\text{sen}^2\theta$: r^2 viene de y^2 y el otro r del jacobiano. Y el ángulo va de 0 a π/2, no de 0 a 2π (eso sería toda la cúpula, 16π).

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $y^2 - z = 0$, $x \ge 0$.
Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f}(x, y, z) = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$. Indique en un gráfico la orientación de C empleada en el cálculo.

> **Respuesta:** Con C de (0, −2, 4) a (0, 2, 4) (y creciente, antihoraria vista desde arriba): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16$ (con la orientación opuesta, −16).
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $\text{rot}\,\vec{f} = (e^x - e^x, ye^x - ye^x, ze^x - ze^x) = \vec{0}$: es de gradientes.
> **Potencial:** de $\phi'_x = yze^x$, $\phi = yze^x + h(y, z)$. $\phi'_y = ze^x + h'_y = y + ze^x \Rightarrow h = y^2/2 + k(z)$. $\phi'_z = ye^x + k' = ye^x \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = yze^x + y^2/2$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 4$ con $x \ge 0$ es la media circunferencia derecha y $z = y^2$. $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4\,\text{sen}^2\,t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Extremos A = (0, −2, 4) y B = (0, 2, 4).

Orientación elegida: t creciente, de A a B (y creciente; en el gráfico, antihoraria vista desde arriba, pasando por (2, 0, 0)).
Cuenta: $\phi(B) = 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 = 10$ y $\phi(A) = (-2) \cdot 4 \cdot 1 + 2 = -6$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \phi(B) - \phi(A) = 16$ (−16 en el sentido contrario).
Trampa: los dos extremos tienen la misma x y la misma z, pero no da 0: el término yze^x cambia de signo con y.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y), h(3x + 3y) - e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices A = (0, 3), B = (3, 0) y C = (3, 6), recorrido en el sentido A → C → B → A.

Respuesta: La curva se recorre en sentido horario. $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = -\iint_T (-2y)\, dA = \mathbf{54}$.

Planteo: la curva es el borde del triángulo T de vértices A = (0, 3), B = (3, 0) y C = (3, 6), una poligonal cerrada y simple. Como h es una función cualquiera, conviene Green: la parte con h es un gradiente (sobre cada lado vale una diferencia de una primitiva de h y en el triángulo cerrado suma 0), y en el rotor desaparece sola.
Orientación: de A a C se sube por la recta y = 3 + x; de C a B se baja por el lado vertical x = 3; de B a A se vuelve por y = 3 − x. El lado vertical está a la derecha y se recorre hacia abajo, así que el sentido es **horario** (negativo). Control: (C − A) × (B − A) = (3, 3) × (3, −3) = 3·(−3) − 3·3 = −18 < 0. Entonces la circulación pedida es $\mathbf{-\iint_T (Q'_x - P'_y)\, dA}$.
Hipótesis de Green: T es compacta y elemental, con borde cerrado C^1 a trozos; $P = y^2 + h(3x + 3y)$ y $Q = h(3x + 3y) - e^y$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $(x, y) \mapsto 3x + 3y$ es un polinomio.
Rotor: por la regla de la cadena, $P'_y = 2y + 3h'(3x + 3y)$ y $Q'_x = 3h'(3x + 3y)$. Restando, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -2y}$: la h desaparece.
Región: $T = \{(x, y) : 0 \le x \le 3,\ 3 - x \le y \le 3 + x\}$ (las dos rectas por A y el lado x = 3).
Cuenta: $\oint_{\text{horario}} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -\iint_T (-2y)\, dA = \int_0^3 \int_{3-x}^{3+x} 2y\, dy\, dx = \int_0^3 [y^2]_{3-x}^{3+x}\, dx = \int_0^3 ((3 + x)^2 - (3 - x)^2)\, dx = \int_0^3 12x\, dx = [6x^2]_0^3 = 54$.
Otra forma de ver por qué no importa h: $h(3x + 3y)(1, 1) = \nabla(\frac{1}{3} H(3x + 3y))$ con $H' = h$, un gradiente C^1 en $\mathbb{R}^2$, y su circulación sobre una curva cerrada es 0. Lo que queda es $(y^2, -e^y)$, con rotor −2y.
Resultado: $\oint \vec{f} \cdot \vec{ds} = \mathbf{54}$.
Trampa: aplicar Green "en automático" con el signo más da −54. El sentido lo fija el orden de los vértices: A → C → B → A es horario y lleva el signo menos.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma: z + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 2y \le 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 1, 1 - 2y)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = -\pi$ (con $\vec{N} = (0, -2y, -1)$).

Planteo: Σ es el pedazo del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ que queda sobre la región D: $x^2 + y^2 - 2y \le 0$. Es un gráfico sobre el plano xy.
Proyección D: completando cuadrados, $x^2 + y^2 - 2y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \le 1$: **el disco de centro (0, 1) y radio 1**. En polares: $r^2 \le 2r \operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow 0 \le r \le 2 \operatorname{sen}\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$.
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 4 - y^2)$, $(x, y) \in D$, de clase C^1. $\vec{X}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (0, 2y, 1)$.

Orientación: la tercera componente es $1 > 0$, al revés de lo pedido. Cambiamos el signo: $\vec{N} = (0, -2y, -1)$, tercera componente $-1 < 0$ ✓.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(X) = (xy(4 - y^2), 1, 1 - 2y)$. La primera componente (la fea) se multiplica por 0. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 0 + 1\cdot(-2y) + (1 - 2y)(-1) = -2y - 1 + 2y = -1$. Constante.
Cuenta: $\Phi = \iint_D (-1)\, dx\, dy = -\text{área}(D)$. Explícito en polares: $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} (-r)\, dr\, d\theta = -\int_0^{\pi} 2\,\text{sen}^2\theta\, d\theta = -[\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}]_0^{\pi} = -\pi$.
Resultado: $\Phi = -\pi$.
Trampa: el disco tiene radio 1 y centro (0, 1), no radio 2 ni centro en el origen. Y acá no conviene Gauss: $\text{div}\,\vec{f} = yz \neq 0$ y habría que cerrar con tres superficies; el cálculo directo es de una línea.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (y + \varphi(x), x - y, x - z\varphi(x))$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$;
b) el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier bola cerrada sea nulo.

Respuesta: $\varphi(x) = 2e^x - 1$.

Regularidad: como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, las tres componentes de $\vec{f}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$.
b) equivale a $\text{div}\,\vec{f} = 0$: toda bola cerrada B es un sólido acotado cuya frontera ∂B (una esfera) es una superficie cerrada suave, y $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$: vale el teorema de Gauss con normal exterior, $\oiint_{\partial B} \vec{f}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B \text{div}\,\vec{f}\, dV$. Si $\text{div}\,\vec{f} \equiv 0$, el flujo es nulo en toda bola. Al revés, si $\text{div}\,\vec{f}(P_0) \neq 0$ en algún punto, como $\text{div}\,\vec{f}$ es continua conserva el signo en una bola chica centrada en P_0, y ahí la triple (y el flujo) sería distinta de 0. Entonces b) $\Leftrightarrow \text{div}\,\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$.
Divergencia: $\text{div}\,\vec{f} = \partial(y + \varphi(x))/\partial x + \partial(x - y)/\partial y + \partial(x - z\varphi(x))/\partial z = \varphi'(x) - 1 - \varphi(x)$.
EDO: $\text{div}\,\vec{f} = 0$ es $\varphi' - \varphi = 1$, lineal de primer orden. Multiplicando por el factor integrante e^{-x}: $(\varphi e^{-x})' = \varphi' e^{-x} - \varphi e^{-x} = e^{-x}$. Integrando: $\varphi e^{-x} = -e^{-x} + K$, o sea $\varphi(x) = Ke^x - 1$.
a) Condición inicial: $\vec{f}(0, 1, 1) = (1 + \varphi(0), 0 - 1, 0 - 1\cdot\varphi(0)) = (1 + \varphi(0), -1, -\varphi(0))$. Igualando a $(2, -1, -1)$: $1 + \varphi(0) = 2$ y $-\varphi(0) = -1$, las dos dan $\varphi(0) = 1$ (la segunda componente se cumple sola, así que las condiciones son compatibles). Entonces $K - 1 = 1$, $K = 2$.
Resultado: $\varphi(x) = \mathbf{2e^x - 1}$, que es C^1. Control: $\varphi' - \varphi - 1 = 2e^x - (2e^x - 1) - 1 = 0$ ✓ y $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$ ✓.
Trampa: cada componente se deriva respecto de su variable: $\partial(x - z\varphi(x))/\partial z = -\varphi(x)$, no $-z\varphi'(x)$. Y la equivalencia flujo nulo en toda bola $\Leftrightarrow \text{div}\,\vec{f} = 0$ tiene dos direcciones: Gauss da una y la continuidad de la divergencia la otra.

10/5/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2x - x^2 - y^2)}}{\sqrt{(x - y)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (2, 0), (0, 0).

> **Respuesta:** a) $D = \{(x - 1)^2 + y^2 \le 1, y < x\}$: el disco cerrado de centro (1, 0) y radio 1 sin el segmento circular que corta la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Frontera: el arco de la circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)) más la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Interior: $\{(x - 1)^2 + y^2 < 1, y < x\}$. b) Nivel 0: el arco con $y < x$ sin sus extremos (0, 0) y (1, 1). De los puntos: sólo (2, 0) pertenece; (1, 1) y (0, 0) no están en el dominio.
>
> **a) Condiciones:** la raíz del numerador pide $2x - x^2 - y^2 \ge 0$; completando cuadrados, $2x - x^2 - y^2 = 1 - [(x - 1)^2 + y^2]$, así que la condición es $(x - 1)^2 + y^2 \le 1$. La raíz del denominador pide su radicando ≥ 0 y además $\ne 0$: $y < x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \le 1, y < x\}$.
> **Cortes:** la recta $y = x$ corta la circunferencia en (0, 0) y (1, 1) (reemplazando $y = x$ queda $2x^2 - 2x = 0$).
> **Gráfico de D:** el disco de centro (1, 0) y radio 1 y la recta $y = x$, que lo corta en la cuerda de (0, 0) a (1, 1). El centro cumple $y < x$, así que D es el pedazo grande: el disco sin el segmento circular chico que queda arriba y a la izquierda de la cuerda (la cuerda ve un ángulo recto desde el centro). El arco de circunferencia que bordea a D va lleno salvo sus extremos (0, 0) y (1, 1), que van huecos; la cuerda va en punteado.
> **Frontera (gráfico aparte):** ∂D = arco de circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)) $\cup$ cuerda $\{y = x, 0 \le x \le 1\}$. Curva cerrada en trazo lleno. Pertenecen a D los puntos del arco salvo (0, 0) y (1, 1); la cuerda no (anula el denominador).
> **Interior (otro gráfico):** $\operatorname{int} D = \{(x - 1)^2 + y^2 < 1, y < x\}$, todo con borde punteado. Los puntos con las dos desigualdades estrictas tienen una bola dentro de D (preimagen de abiertos por funciones continuas); los del arco no, porque toda bola centrada en ellos se sale del disco.
> **b) Planteo:** el denominador no se anula en D, así que $f = 0 \Leftrightarrow$ el radicando del numerador vale $0 \Leftrightarrow$ el punto está sobre la circunferencia. Además tiene que estar en D: $y < x$.
> **Nivel 0:** el arco de circunferencia con $y < x$ (de (0, 0) a (1, 1) pasando por (1, –1) y (2, 0)), **sin** los extremos (0, 0) y (1, 1).
> **Los puntos:** (1, 1): $x - y = 0$, no está en D, no pertenece. (2, 0): $2 \cdot 2 - 4 - 0 = 0$ y $x - y = 2 > 0$, $f(2, 0) = 0/\sqrt{2} = 0$, **pertenece**. (0, 0): $x - y = 0$, no está en D, no pertenece.
> **Trampa:** (0, 0) y (1, 1) anulan el numerador, pero también el denominador: f queda 0/0, no está definida y no pertenece al conjunto de nivel 0.

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y$ y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: (1, 3) y (–1, –3). Los dos son puntos silla (f no tiene extremos locales).
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞); buscamos $\nabla f = 0$ y clasificamos con el hessiano.
> **Derivadas:** $f_x = 3x^2 - xy = x(3x - y)$; $f_y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

Sistema: $f_y = 0$ da $x = 1$ o $x = -1$. Como $x \neq 0$, $f_x = 0$ pide $y = 3x$. **Puntos: (1, 3) y (–1, –3).**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - y$, $f_{xy} = -x$, $f_{yy} = 0$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(1, 3): $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(1, 3) = 1$).
(–1, –3): $H = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(-1, -3) = -1$). → En general $\det H = (6x - y)\cdot 0 - x^2 = -x^2$, que es negativo en los dos puntos porque $x = \pm 1$.
Trampa: ver $f_{yy} = 0$ y concluir "det = 0, el criterio no decide". El determinante es $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, y el término cruzado lo hace negativo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$\operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y = 2$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 1), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $z_0 = 1$; $\nabla f(0, 1) = (-1/2, -2)$; $\check{v} = (4/\sqrt{17}, -1/\sqrt{17})$ o $\check{v} = (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$.

Planteo: $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y - 2$ y la ecuación es $F = 0$.
Punto: en $(x, y) = (0, 1)$: $0 + z^3 - z + 0 + 2 - 2 = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1) = 0$. Las raíces son $-1, 0, 1$ y la condición $z_0 > 0$ deja $\mathbf{z_0 = 1}$: punto $(0, 1, 1)$.
Derivadas de F: $F'_x = \cos x - e^xz + 1$, $F'_y = 2yz^3 + 2$, $F'_z = 3y^2z^2 - e^x$. En $(0, 1, 1)$: $F'_x = 1 - 1 + 1 = 1$, $F'_y = 2 + 2 = 4$, $F'_z = 3 - 1 = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(0, 1, 1) = 0$; (ii) F es combinación de seno, exponencial y polinomios, C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(0, 1, 1) = 2 \neq 0$. Por lo tanto existe $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(0, 1)$ con $f(0, 1) = 1$.
Gradiente: $f'_x(0, 1) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -1/2$, $f'_y(0, 1) = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -4/2 = -2$. Así $\nabla f(0, 1) = (-1/2, -2)$.
Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable en $(0, 1)$, y entonces $f'((0, 1), \check{v}) = \nabla f(0, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-a/2 - 2b = 0$, o sea $a = -4b$. Reemplazando: $16b^2 + b^2 = 1$, $b = \pm 1/\sqrt{17}$.
Resultado: $\check{v} = (4/\sqrt{17}, -1/\sqrt{17})$ y **$\check{v} = (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$** (los dos versores ortogonales al gradiente, que es tangente a la curva de nivel).
Trampa: son dos versores, no uno: si das sólo uno el ítem queda incompleto. Y la fórmula $\nabla f \cdot \check{v}$ sólo vale porque f es diferenciable; hay que decirlo.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (e^t, -\cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $\nabla g(1, -1)$
b) Calcule aproximadamente $h(0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: a) $\nabla g(1, -1) = (3, -3)$. b) $h(0) = 4$, $h'(0) = 3$, $h(0.05) \approx 4.15$.

Datos de f: el polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$ es $f(-1, 2) + f'_r(-1, 2)(r + 1) + f'_s(-1, 2)(s - 2)$. Con $P(r, s) = 1 - r + s$: $f(-1, 2) = P(-1, 2) = 1 + 1 + 2 = 4$ y **$\nabla f(-1, 2) = (-1, 1)$**.
a) El punto interior: $(xy, x^2 + y^2)$ en $(1, -1)$ da $(-1, 2)$ ✓.

Hipótesis: $f \in C^1$ y la interior es polinómica, así que g es C^1 (diferenciable) y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (1, –1): $r = xy$ da $(y, x) = (–1, 1)$; $s = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (2, –2)$.
Cuenta: $g'_x = (–1)(–1) + 1·2 = 3$; $g'_y = (–1)·1 + 1·(–2) = –3$. **$\nabla g(1, –1) = (3, –3)$**.
b) La curva: $\vec{\alpha}(t) = (e^t, –\cos t)$: $\vec{\alpha}(0) = (1, –1)$ ✓ y $\vec{\alpha}'(t) = (e^t, \operatorname{sen} t)$, $\vec{\alpha}'(0) = (1, 0)$.
Hipótesis: $\vec{\alpha}$ es C^1 y g es diferenciable en $\vec{\alpha}(0)$, así que $h = g \circ \vec{\alpha}$ es derivable en 0 con $h'(0) = \nabla g(\vec{\alpha}(0))·\vec{\alpha}'(0)$.
Cuenta: $h(0) = g(\vec{\alpha}(0)) = f(–1, 2) = 4$; $h'(0) = \nabla g(1, –1)·\vec{\alpha}'(0) = (3, –3)·(1, 0) = 3$.
Resultado: la aproximación lineal de h en $t = 0$ es $h(t) \approx 4 + 3t$, y entonces $h(0.05) \approx h(0) + h'(0)·0.05 = 4 + 3·0.05 =$ **4.15**.
Trampa: $\vec{\alpha}'(0) = (1, 0)$ porque sen 0 = 0: la derivada de $–\cos t$ es $+\operatorname{sen} t$. Y $h(0)$ es $g(\vec{\alpha}(0)) = g(1, –1) = f(–1, 2) = 4$, no $P(0, 0) = 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v^2, u – v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

Respuesta: $P_1 = (1, 1, –1)$ y $P_2 = (–1, –1, 1)$. Π: $x + y – z = –1$; tangentes a Σ_2: $x + y – z = 3$ en P_1 y $x + y – z = –3$ en P_2.

Paso 1, el parámetro de A: $\vec{X}(u, v) = (0, 1, 2)$ pide $u + v = 0$ y $u – v = 2$, de donde $u = 1$, $v = –1$; se comprueba $v^2 = 1$ ✓. Es el único par (u, v) que da A.
Paso 2, normal de Σ_1 en A: $\vec{X}$ es C^1 (polinómica). $\vec{X}_u = (1, 0, 1)$, $\vec{X}_v = (1, 2v, –1) = (1, –2, –1)$ en $(1, –1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (0·(–1) – 1·(–2), 1·1 – 1·(–1), 1·(–2) – 0·1) = (2, 2, –2) \neq \vec{0}$: A es punto regular y Π existe, con normal $\vec{n} = (1, 1, –1)$. Π: $x + (y – 1) – (z – 2) = 0$, o sea **$x + y – z = –1$**.
Paso 3, normal de la esfera: Σ_2 es el conjunto de nivel 3 de $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, de clase C^1, con $\nabla G = (2x, 2y, 2z) \neq \vec{0}$ sobre Σ_2 (el origen no está en Σ_2). La normal en P es 2P.
Paso 4, paralelismo: planos paralelos ⟺ normales paralelas: $P = \lambda(1, 1, –1)$. Con $P \in \Sigma_2$: $3\lambda^2 = 3$, $\lambda = \pm 1$. Quedan **$P_1 = (1, 1, –1)$** y **$P_2 = (–1, –1, 1)$**.
Control: el tangente a Σ_2 en P_1 es $(x – 1) + (y – 1) – (z + 1) = 0$, $x + y – z = 3$; en P_2, $x + y – z = –3$. Ninguno coincide con Π ($x + y – z = –1$), así que son paralelos de verdad.
Trampa: son **dos** puntos (antípodas). Quedarse con $\lambda = 1$ solo pierde la mitad; y no hay que pedir $P \in \Sigma_1$, el punto se busca en la esfera.

10/5/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2y - y^2 - x^2)}}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (0, 2), (0, 0).

> **Respuesta:** a) $D = \{x^2 + (y - 1)^2 \le 1, y > x\}$: el disco cerrado de centro (0, 1) y radio 1 sin el segmento circular que corta la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Frontera: el arco de la circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)) más la cuerda de (0, 0) a (1, 1). Interior: $\{x^2 + (y - 1)^2 < 1, y > x\}$. b) Nivel 0: el arco con $y > x$ sin sus extremos (0, 0) y (1, 1). De los puntos: sólo (0, 2) pertenece; (1, 1) y (0, 0) no están en el dominio.
>
> **a) Condiciones:** la raíz del numerador pide $2y - y^2 - x^2 \ge 0$; completando cuadrados, $2y - y^2 - x^2 = 1 - [x^2 + (y - 1)^2]$, así que la condición es $x^2 + (y - 1)^2 \le 1$. La raíz del denominador pide su radicando ≥ 0 y además $\neq 0$: $y > x$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \le 1, y > x\}$.
> **Cortes:** la recta $y = x$ corta la circunferencia en (0, 0) y (1, 1) (reemplazando $y = x$ queda $2x^2 - 2x = 0$).
> **Gráfico de D:** el disco de centro (0, 1) y radio 1 y la recta $y = x$, que lo corta en la cuerda de (0, 0) a (1, 1). El centro cumple $y > x$, así que D es el pedazo grande: el disco sin el segmento circular chico que queda abajo y a la derecha de la cuerda (la cuerda ve un ángulo recto desde el centro). El arco de circunferencia que bordea a D va lleno salvo sus extremos (0, 0) y (1, 1), que van huecos; la cuerda va en punteado.
> **Frontera (gráfico aparte):** ∂D = arco de circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)) $\cup$ cuerda $\{y = x, 0 \le x \le 1\}$. Curva cerrada en trazo lleno. Pertenecen a D los puntos del arco salvo (0, 0) y (1, 1); la cuerda no (anula el denominador).
> **Interior (otro gráfico):** $\operatorname{int} D = \{x^2 + (y - 1)^2 < 1, y > x\}$, todo con borde punteado. Los puntos con las dos desigualdades estrictas tienen una bola dentro de D (preimagen de abiertos por funciones continuas); los del arco no, porque toda bola centrada en ellos se sale del disco.
> **b) Planteo:** el denominador no se anula en D, así que $f = 0 \Leftrightarrow$ el radicando del numerador vale $0 \Leftrightarrow$ el punto está sobre la circunferencia. Además tiene que estar en D: $y > x$.
> **Nivel 0:** el arco de circunferencia con $y > x$ (de (1, 1) a (0, 0) pasando por (0, 2) y (–1, 1)), **sin** los extremos (0, 0) y (1, 1).
> **Los puntos:** (1, 1): $y - x = 0$, no está en D, no pertenece. (0, 2): $2 \cdot 2 - 4 - 0 = 0$ e $y - x = 2 > 0$, $f(0, 2) = 0/\sqrt{2} = 0$, **pertenece**. (0, 0): $y - x = 0$, no está en D, no pertenece.
> **Trampa:** (0, 0) y (1, 1) anulan el numerador, pero también el denominador: f queda 0/0, no está definida y no pertenece al conjunto de nivel 0.

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$ y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos: (3, 1) y (–3, –1). Los dos son puntos silla (f no tiene extremos locales).
>
> **Planteo:** f es polinómica (C^∞); buscamos $\nabla f = 0$ y clasificamos con el hessiano.
> **Derivadas:** $f_x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - y^2)$; $f_y = 3y^2 - xy = y(3y - x)$.

Sistema: $f_x = 0$ da $y = 1$ o $y = -1$. Como $y \neq 0$, $f_y = 0$ pide $x = 3y$. **Puntos: (3, 1) y (–3, –1).**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -y$, $f_{yy} = 6y - x$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
(3, 1): $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(3, 1) = 1$).
(–3, –1): $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det = -1 < 0$: **punto silla** ($f(-3, -1) = -1$). → En general $\det H = 0 \cdot (6y - x) - y^2 = -y^2$, negativo en los dos puntos porque $y = \pm 1$.
Trampa: ver $f_{xx} = 0$ y decir que el criterio no decide (o que "no se puede saber el signo de f_{xx}"). Con $\det H < 0$ es silla sin mirar f_{xx}. Es el tema 1 con x e y intercambiadas.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$\operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x = 2$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 0), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $z_0 = 1$; $\nabla f(1, 0) = (-2, -1/2)$; $\check{v} = (1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$ o $\check{v} = (-1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})$.

Planteo: $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x - 2$ y la ecuación es $F = 0$.
Punto: en $(x, y) = (1, 0)$: $0 + z^3 - z + 0 + 2 - 2 = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1) = 0$. Con $z_0 > 0$ queda $\mathbf{z_0 = 1}$: punto $(1, 0, 1)$.
Derivadas de F: $F'_x = 2xz^3 + 2$, $F'_y = \cos y - e^yz + 1$, $F'_z = 3x^2z^2 - e^y$. En $(1, 0, 1)$: $F'_x = 4$, $F'_y = 1 - 1 + 1 = 1$, $F'_z = 3 - 1 = 2$.
Hipótesis del TFI: (i) $F(1, 0, 1) = 0$; (ii) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (seno, exponencial y polinomios); (iii) $F'_z(1, 0, 1) = 2 \neq 0$. Entonces existe $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(1, 0)$ con $f(1, 0) = 1$.
Gradiente: $f'_x(1, 0) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -4/2 = -2$, $f'_y(1, 0) = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -1/2$. Así $\nabla f(1, 0) = (-2, -1/2)$.
Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable en $(1, 0)$, y $f'((1, 0), \check{v}) = \nabla f(1, 0) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$: $-2a - b/2 = 0$, o sea $b = -4a$. Reemplazando: $a^2 + 16a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{17}$.
Resultado: $\check{v} = (1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$ y **$\check{v} = (-1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})$**.
Trampa: son dos versores opuestos; y hay que justificar que f es diferenciable para usar $f' = \nabla f \cdot \check{v}$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a) Calcule $\nabla g(-1, 1)$
b) Calcule aproximadamente $h(-0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Respuesta: a) $\nabla g(-1, 1) = (-3, 3)$. b) $h(0) = 4$, $h'(0) = 3$, $h(-0.05) \approx 3.85$.

Datos de f: el polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$ es $f(-1, 2) + f'_r(-1, 2)(r + 1) + f'_s(-1, 2)(s - 2)$. Con $P(r, s) = 1 - r + s$: $f(-1, 2) = P(-1, 2) = 1 + 1 + 2 = 4$ y **$\nabla f(-1, 2) = (-1, 1)$**.
a) El punto interior: $(xy, x^2 + y^2)$ en $(-1, 1)$ da $(-1, 2)$ ✓.
Hipótesis: $f \in C^1$ y la interior es polinómica, así que g es C^1 (diferenciable) y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (–1, 1): $r = xy$ da $(y, x) = (1, -1)$; $s = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (-2, 2)$.

Cuenta: $g'_x = (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = -3$; $g'_y = (-1)(-1) + 1\cdot 2 = 3$. $\nabla g(-1, 1) = (-3, 3)$.
b) La curva: $\vec{\alpha}(t) = (-\cos t, e^t)$: $\vec{\alpha}(0) = (-1, 1)$ ✓ y $\vec{\alpha}'(t) = (\operatorname{sen} t, e^t)$, $\vec{\alpha}'(0) = (0, 1)$.
Hipótesis: $\vec{\alpha}$ es C^1 y g es diferenciable en $\vec{\alpha}(0)$, así que $h = g \circ \vec{\alpha}$ es derivable en 0 con $h'(0) = \nabla g(\vec{\alpha}(0))\cdot \vec{\alpha}'(0)$.
Cuenta: $h(0) = g(\vec{\alpha}(0)) = f(-1, 2) = 4$; $h'(0) = \nabla g(-1, 1)\cdot\vec{\alpha}'(0) = (-3, 3)\cdot(0, 1) = 3$.
Resultado: la aproximación lineal de h en $t = 0$ es $h(t) \approx 4 + 3t$, y entonces $h(-0.05) \approx h(0) + h'(0)\cdot(-0.05) = 4 - 0.15 = \mathbf{3.85}$.
Trampa: el incremento es negativo ($\Delta t = -0.05$), así que la estimación queda por debajo de $h(0)$. Y $h(0)$ es $g(\vec{\alpha}(0)) = g(-1, 1) = f(-1, 2) = 4$, no $P(0, 0) = 1$.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u^2, v - u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$
y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

Respuesta: Π: $x + y - z = -1$. Puntos: $P_1 = (1, 1, -1)$ y $P_2 = (-1, -1, 1)$, con planos tangentes $x + y - z = 3$ y $x + y - z = -3$.

Paso 1, el parámetro de A: $\vec{X}(u, v) = (0, 1, 2)$ pide $u + v = 0$, $u^2 = 1$, $v - u = 2$. De la primera y la tercera, $u = -1$, $v = 1$, y $u^2 = 1$ ✓.
Paso 2, normal de Σ_1 en A: $\vec{X}_u = (1, 2u, -1) = (1, -2, -1)$, $\vec{X}_v = (1, 0, 1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = ((-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 0, (-1)\cdot 1 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - (-2)\cdot 1) = (-2, -2, 2) \neq \vec{0}$: A es regular y Π existe, con normal $(1, 1, -1)$.
Π: $(x - 0) + (y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea $\mathbf{x + y - z = -1}$.
Paso 3, normal de Σ_2: Σ_2 es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1 con $\nabla G = 2(x, y, z) \neq \vec{0}$ sobre Σ_2; la normal en P es P.
Paso 4, paralelismo: $P = \lambda(1, 1, -1)$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 3$: $3\lambda^2 = 3$, $\lambda = \pm 1$. $\mathbf{P_1 = (1, 1, -1)}$ y $\mathbf{P_2 = (-1, -1, 1)}$.
Planos tangentes: en P_1, $(x - 1) + (y - 1) - (z + 1) = 0$, o sea $x + y - z = 3$; en P_2, $x + y - z = -3$. Ninguno es Π (que tiene término independiente -1), así que son paralelos y no coincidentes.
Trampa: son dos puntos antípodas; y no hace falta normalizar $\vec{N}$ para escribir Π, pero sí imponer que P esté en la esfera.

25/2/25, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, z, z^2)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12, \sqrt{(2x^2 + y^2)} \le z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 24\pi$ con normal saliente de H.
>
> **Planteo:** H está dentro de $x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12$ y por encima del cono elíptico $z = \sqrt{(2x^2 + y^2)}$. Su frontera es cerrada (casquete del elipsoide arriba, cono abajo), así que va Gauss.
> **Orientación:** normal saliente de H. En el gráfico: en el casquete superior las flechas apuntan hacia arriba y afuera; en el cono, hacia abajo y afuera.
> **Hipótesis:** $\vec{f} = (-y, z, z^2)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$; H es acotado y ∂H es cerrada y suave a trozos (el vértice del cono y la curva donde se cortan las dos superficies no molestan).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial(-y)/\partial x + \partial z/\partial y + \partial(z^2)/\partial z = 0 + 0 + 2z$.
> **Proyección:** hay puntos de H sobre (x, y) si $\sqrt{(2x^2 + y^2)} \le \sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)} \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 \le 12 - x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 \le 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4$. Aunque las dos superficies son elípticas, la proyección es el disco D de radio 2.
> **Triple integral:** $\iiint_H 2z\, dV = \iint_D \int_{\sqrt{(2x^2 + y^2)}}^{\sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}} 2z\, dz\, dA$. Primitiva z^2: $[z^2]$ entre los límites $= (12 - x^2 - 2y^2) - (2x^2 + y^2) = 12 - 3(x^2 + y^2)$. En polares: $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\, [6r^2 - 3r^4/4]_0^2 = 2\pi\, (24 - 12) = 24\pi$.
> **Resultado:** $\Phi = \mathbf{24\pi}$ con normal exterior.
> **Control directo:** casquete $z = \sqrt{(12 - x^2 - 2y^2)}$ con $\vec{N} = (x/z, 2y/z, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -xy/z + 2y + z^2$, que integra $0 + 0 + \iint (12 - x^2 - 2y^2)\, dA = 48\pi - 4\pi - 8\pi = 36\pi$. Cono con $\vec{N} = (2x/z, y/z, -1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -2xy/z + y - (2x^2 + y^2)$, que integra $-8\pi - 4\pi = -12\pi$. Total 24π ✓.
> **Trampa:** ninguna de las dos superficies es de revolución, así que no pases a cilíndricas de entrada. Integrá primero en z (la primitiva z^2 elimina las raíces) y recién con $12 - 3(x^2 + y^2)$ pasá a polares.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2x + yz, 4y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x \ge 0$,
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** C va de (0, 0, 0) a (0, 2, 4). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 8$.
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (2x + yz, 4y + xz, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, y $\text{rot}\, \vec{f} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$, así que es un campo de gradientes. Potencial: de $\phi'_x = 2x + yz$, $\phi = x^2 + xyz + h(y, z)$; $\phi'_y = xz + h'_y = 4y + xz \Rightarrow h = 2y^2 + k(z)$; $\phi'_z = xy + k'(z) = xy \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xyz$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 2y$ es la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, de centro (0, 1) y radio 1, y como $x^2 + y^2 = 2y$, la segunda ecuación da $z = x^2 + y^2 = 2y$. Con $x \ge 0$ es la media circunferencia derecha, de extremos (0, 0) y (0, 2) en el plano xy. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (\text{sen}\, t, 1 - \cos t, 2 - 2\cos t)$, $t \in [0, \pi]$ ($x = \text{sen}\, t \ge 0$ ✓).
> **Orientación:** $y(t) = 1 - \cos t$ es creciente en $[0, \pi]$ ($y' = \text{sen}\, t \ge 0$), así que se recorre con t creciente. Entonces se va de A = (0, 0, 0) a B = (0, 2, 4).
> **Cuenta:** $\phi(B) = 0 + 2 \cdot 4 + 0 = 8$ y $\phi(A) = 0$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = 8$.
Trampa: z no es cero en los extremos: en B, z = 2y = 4. Acá el término xyz se anula porque x = 0 en los dos extremos, pero no lo des por hecho sin mirarlo.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación x + y + z = 2 contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Respuesta: $\Phi = 4$ con la normal que se aleja del origen, $\vec{N} = (1, 1, 1)$; con la opuesta, $\Phi = -4$.

Planteo: Σ es el triángulo de vértices (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2). El enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y mostrarla en el dibujo.
Gráfico y orientación elegida: dibujá los tres ejes, marcá los tres vértices sobre ellos y uní con el triángulo. Elegimos la normal que **se aleja del origen** (flecha que sale del triángulo hacia el lado opuesto al origen, o sea hacia afuera del tetraedro que forma con los planos coordenados).
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x\}$ ($z \ge 0$ equivale a $x + y \le 2$). $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)}$.
Orientación: las tres componentes de N son positivas, así que apunta hacia el lado que no contiene al origen: coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 2 - x - y)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = x + y + 2 - x - y = 2$, constante. Entonces $\Phi = 2 \cdot$ área(D), con área(D) = 2.
Cuenta: $\Phi = \int_0^2 \int_0^{2-x} 2 \, dy \, dx = \int_0^2 2(2 - x) \, dx = [4x - x^2]_0^2 = 4$.
Resultado: $\Phi = 4$ con la normal que se aleja del origen (con la opuesta, $\Phi = -4$).
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1; cerramos con las caras del tetraedro V del primer octante (volumen $2^3/6$). $\operatorname{div} \vec{f} = 3$, $\iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{8}{6} = 4$. En las caras coordenadas el flujo es 0: en x = 0, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -x = 0$, y lo mismo en y = 0 y en z = 0. Así que todo el flujo saliente pasa por Σ: $\Phi = 4$ ✓.
Trampa: el enunciado pide el gráfico con la orientación; sin eso el signo no tiene sentido y el ejercicio queda incompleto.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y),\ h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 3\}$
recorrida en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 36$ (horario).

Planteo: $P = y^2 + h(2x + 2y)$, $Q = h(2x + 2y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
La región: $D = \{|x| \le y \le 3\}$ es el triángulo de vértices (0, 0), (3, 3) y (−3, 3), entre la "V" $y = |x|$ y la recta $y = 3$. Escrita en franjas horizontales: $D = \{0 \le y \le 3,\ -y \le x \le y\}$.
Hipótesis del teorema: P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ ($h \in C^1$ compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y el segmento horizontal) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: por la regla de la cadena, $Q'_x = 2h'(2x + 2y)$ y $P'_y = 2y + 2h'(2x + 2y)$. $Q'_x - P'_y = \mathbf{-2y}$ (la h se cancela: $(h(2x + 2y), h(2x + 2y)) = \nabla(H(2x + 2y)/2)$ con $H' = h$).
Doble integral: $\iint_D (-2y) \, dA = \int_0^3 \int_{-y}^{y} (-2y) \, dx \, dy = \int_0^3 -4y^2 \, dy = [-4y^3/3]_0^3 = -36$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(-36) = \mathbf{36}$.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2 \, dx$. En sentido antihorario: por $y = x$ de (0, 0) a (3, 3): $\int_0^3 x^2 \, dx = 9$; por $y = 3$ de (3, 3) a (−3, 3): $\int_3^{-3} 9 \, dx = -54$; por $y = -x$ de (−3, 3) a (0, 0): $\int_{-3}^{0} x^2 \, dx = 9$. Total −36, y en horario 36 ✓.

> **Trampa:** el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 3)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por (0, 0). Calcule $\iint_D x \, dxdy$.

> **Respuesta:** Γ: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ (centro (3, 0), radio 3). $\iint_D x \, dxdy = 27\pi$.
>
> **EDO de $\mathcal{F}$:** las curvas $y = k(x - 3)$ son las rectas que pasan por (3, 0). Despejando $k = \dfrac{y}{x - 3}$ y derivando $y = k(x - 3)$: $y' = k = \dfrac{y}{x - 3}$.
>
> **Familia ortogonal $\mathcal{G}$:** $y' = -\dfrac{x - 3}{y}$. Separando: $y \, dy = -(x - 3) \, dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{(x - 3)^2}{2} + k \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = C$. Son las circunferencias centradas en (3, 0), como era de esperar: lo ortogonal a todas las rectas por un punto son las circunferencias con centro en ese punto (el radio es perpendicular a la tangente). Por (0, 0): $C = 9$. **Γ: $(x - 3)^2 + y^2 = 9$**.
>
> **La región:** D es el disco de centro (3, 0) y radio 3; está todo en $x \geq 0$ y toca al eje y sólo en el origen. $D = \{(x - 3)^2 + y^2 \leq 9\}$.
>
> **Cambio de variables:** $x = 3 + r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, con $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Traslación más polares: jacobiano $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
>
> **Cuenta:** $\iint_D x \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3 + r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \left[\dfrac{r^2}{2}\right]_0^3 + [\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\dfrac{r^3}{3}\right]_0^3 = 3 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{9}{2} + 0$.
>
> **Resultado:** $\iint_D x \, dxdy =$ **27π** (es $\bar{x} \cdot$ área $= 3 \cdot 9\pi$).
>
> **Control con polares en el origen:** $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ es $x^2 + y^2 = 6x$, o sea $r = 6\cos\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{6\cos\theta} r\cos\theta \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{216\cos^4\theta}{3} \, d\theta = \dfrac{216}{3} \cdot \dfrac{3\pi}{8} = 27\pi$ ✓.
>
> **Trampa:** en polares con centro en el origen, el borde es $r = 6\cos\theta$ y no $r = 3$; con $r \leq 3$ y θ de 0 a 2π integrarías sobre un disco centrado en el origen y daría 0. Es el mismo ejercicio que el tema 2, con centro (2, 0).

25/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (z, -x, z^2)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 \le 12, \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \le z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 24\pi$ (normales hacia afuera de H).
>
> **Planteo:** H está entre el cono elíptico $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$ (abajo) y el elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 12$ (arriba); su frontera es cerrada. Con la normal exterior, Gauss.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (z, -x, z^2)$ es polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. H es acotado (está dentro del elipsoide) y su frontera es cerrada y suave a trozos: el casquete del elipsoide y el pedazo de cono (el vértice en el origen es un punto, no molesta).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x z + \partial_y(-x) + \partial_z(z^2) = 0 + 0 + 2z = 2z$.
> **La región (el paso clave):** en H, $z \ge \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \ge 0$, así que $z^2 \ge x^2 + 2y^2$. Entonces $12 \ge 2x^2 + y^2 + z^2 \ge 2x^2 + y^2 + x^2 + 2y^2 = 3(x^2 + y^2)$, o sea $x^2 + y^2 \le 4$. Al revés, si $x^2 + y^2 \le 4$, el intervalo $\sqrt{(x^2 + 2y^2)} \le z \le \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}$ no es vacío (el radicando de arriba es $\ge 12 - 2 \cdot 4 = 4 > 0$). Las superficies se cortan justo sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Así: $H = \{x^2 + y^2 \le 4, \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \le z \le \sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}\}$.
> **Cuenta:** integrando primero en z, la primitiva de $2z$ es z^2: $\int 2z\, dz$ entre el cono y el elipsoide $= (12 - 2x^2 - y^2) - (x^2 + 2y^2) = 12 - 3(x^2 + y^2)$. Las raíces desaparecen. Luego, en polares: $\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (12 - 3r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi[6r^2 - \frac{3r^4}{4}]_0^2 = 2\pi(24 - 12) = 24\pi$.
> **Resultado: $\Phi = 24\pi$** saliente.
> **Gráfico:** un "cucurucho": el cono elíptico con vértice en el origen, tapado arriba por el casquete del elipsoide, que se pegan sobre $x^2 + y^2 = 4$. Flechas saliendo: hacia arriba en el casquete y hacia abajo y afuera en el cono.
> **Control por caras:** el casquete del elipsoide aporta 36π y el cono -12π (normal exterior en cada uno): 24π ✓.
> **Trampa:** pasar a esféricas o cilíndricas de entrada: ni el cono ni el elipsoide son de revolución y los límites quedan horribles. Integrar primero en z con primitiva z^2 es lo que simplifica todo; y la proyección sale de eliminar z entre las dos superficies.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (4x + yz, 2y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x \ge 0$,
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

> **Respuesta:** C va de (0, 0, 0) a (0, 4, 16). $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16$.
>
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (4x + yz, 2y + xz, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, y $\text{rot}\, \vec{f} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$. Potencial: de $\phi'_x = 4x + yz$, $\phi = 2x^2 + xyz + h(y, z)$; $\phi'_y = xz + h'_y = 2y + xz \Rightarrow h = y^2 + k(z)$; $\phi'_z = xy + k' = xy \Rightarrow k$ constante. $\phi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xyz$.
> **La curva:** $x^2 + y^2 = 4y$ es la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, de centro (0, 2) y radio 2, y la segunda ecuación da $z = x^2 + y^2 = 4y$. Con $x \ge 0$ es la media circunferencia derecha, de extremos (0, 0) y (0, 4) en el plano xy. Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t, 8 - 8 \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ ($x \ge 0$ ✓).

Orientación: $y(t) = 2 - 2\cos t$ es creciente en $[0, \pi]$, así que se recorre con t creciente: de A = (0, 0, 0) a B = (0, 4, 16).
Cuenta: $\phi(B) = 0 + 16 + 0 = 16$ y $\phi(A) = 0$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 16$.
Trampa: el extremo de arriba no es (0, 2): la circunferencia $x^2 + y^2 = 4y$ tiene diámetro 4, así que llega a $y = 4$, y ahí $z = 4y = 16$.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 3$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Respuesta: $\Phi = 27/2$ con la normal que se aleja del origen, $\vec{N} = (1, 1, 1)$; con la opuesta, $\Phi = -27/2$.

Planteo: Σ es el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). El enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y mostrarla en el dibujo.
Gráfico y orientación elegida: dibujá los tres ejes, marcá los tres vértices sobre ellos y uní con el triángulo. Elegimos la normal que **se aleja del origen** (flecha que sale del triángulo hacia el lado opuesto al origen, o sea hacia afuera del tetraedro que forma con los planos coordenados).
Parametrización: $\vec{X}(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$, $(x, y) \in D = \{0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x\}$ ($z \ge 0$ equivale a $x + y \le 3$). $\vec{X}_x = (1, 0, -1)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -1)$, $\vec{N} = \vec{X}_x \times \vec{X}_y = (1, 1, 1)$.
Orientación: las tres componentes de N son positivas, así que apunta hacia el lado que no contiene al origen: coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f}(\vec{X}) = (x, y, 3 - x - y)$, $\vec{f}\cdot\vec{N} = x + y + 3 - x - y = 3$, constante. Entonces $\Phi = 3 \cdot$ área(D), con área(D) = $\frac{9}{2}$.
Cuenta: $\Phi = \int_0^3 \int_0^{3-x} 3 \, dy \, dx = \int_0^3 3(3 - x) \, dx = [9x - \frac{3x^2}{2}]_0^3 = 27 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$.
Resultado: $\Phi = \frac{27}{2}$ con la normal que se aleja del origen (con la opuesta, $\Phi = -\frac{27}{2}$).
Control con Gauss: $\vec{f}$ es C^1; cerramos con las caras del tetraedro V del primer octante (volumen $3^3/6$). $\operatorname{div} \vec{f} = 3$, $\iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{27}{6} = \frac{27}{2}$. En las caras coordenadas el flujo es 0: en $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -x = 0$, y lo mismo en $y = 0$ y en $z = 0$. Así que todo el flujo saliente pasa por Σ: $\Phi = \frac{27}{2}$ ✓.
Trampa: el enunciado pide el gráfico con la orientación; sin eso el signo no tiene sentido y el ejercicio queda incompleto.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y),\ h(3x + 3y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le 2\}$
recorrida en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 32/3$ (horario).

Planteo: $P = y^2 + h(3x + 3y)$, $Q = h(3x + 3y) + e^y$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Como h es desconocida, Green.
La región: $D = \{|x| \le y \le 2\}$ es el triángulo de vértices (0, 0), (2, 2) y (−2, 2). En franjas horizontales: $D = \{0 \le y \le 2,\ -y \le x \le y\}$.
Hipótesis del teorema: P y Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (h ∈ C^1 compuesta con una lineal, y^2 y e^y). D es una región elemental (regular) y su borde (dos segmentos de la "V" y el segmento horizontal) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.

Rotor: por la regla de la cadena, $Q'_x = 3h'(3x + 3y)$ y $P'_y = 2y + 3h'(3x + 3y)$. $Q'_x - P'_y =$ **$-2y$** (la h se cancela: $(h(3x + 3y), h(3x + 3y)) = \nabla(H(3x + 3y)/3)$ con $H' = h$).
Doble integral: $\iint_D (-2y)\, dA = \int_0^2 \int_{-y}^{y} (-2y)\, dx\, dy = \int_0^2 -4y^2\, dy = [-4y^3/3]_0^2 = -32/3$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(-32/3) =$ **$32/3$**.
Control (la otra cara): los términos con h y $(0, e^y)$ son gradientes y no aportan; queda $\oint y^2\, dx$. En sentido antihorario: por $y = x$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$: $8/3$; por $y = 2$ de $(2, 2)$ a $(-2, 2)$: $\int_2^{-2} 4\, dx = -16$; por $y = -x$ de $(-2, 2)$ a $(0, 0)$: $8/3$. Total $-32/3$, y en horario $32/3$ ✓.
Trampa: el signo: Green da la circulación antihoraria; la pedida es horaria, así que se cambia el signo del resultado de la doble integral.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 2)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por $(0, 0)$. Calcule $\iint_D x\, dxdy$.

Respuesta: Γ: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ (centro $(2, 0)$, radio 2). $\iint_D x\, dxdy = 8\pi$.

EDO de $\mathscr{F}$: las curvas $y = k(x - 2)$ son las rectas que pasan por $(2, 0)$. Despejando $k = \dfrac{y}{x - 2}$ y derivando $y = k(x - 2)$: $y' = k = \dfrac{y}{x - 2}$.
Familia ortogonal $\mathcal{G}$: $y' = -\dfrac{x - 2}{y}$. Separando: $y\, dy = -(x - 2)\, dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{(x - 2)^2}{2} + k \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = C$. Son las circunferencias centradas en $(2, 0)$, como era de esperar: lo ortogonal a todas las rectas por un punto son las circunferencias con centro en ese punto (el radio es perpendicular a la tangente). Por $(0, 0)$: $C = 4$. **Γ: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$**.
La región: D es el disco de centro $(2, 0)$ y radio 2; está todo en $x \geq 0$ y toca al eje y sólo en el origen. $D = \{(x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$.
Cambio de variables: $x = 2 + r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Traslación más polares: jacobiano $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
Cuenta: $\iint_D x\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2 + r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = 2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 + [\mathrm{sen}\,\theta]_0^{2\pi} \cdot [\frac{r^3}{3}]_0^2 = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{2} + 0$.
Resultado: $\iint_D x\, dxdy =$ **8π** (es $\bar{x} \cdot$ área $= 2 \cdot 4\pi$).
Control con polares en el origen: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = 4x$, o sea $r = 4\cos\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{64\cos^4\theta}{3}\, d\theta = \frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = 8\pi$ ✓.
Trampa: en polares con centro en el origen, el borde es $r = 4\cos\theta$ y no $r = 2$; con $r \leq 2$ y θ de 0 a 2π integrarías sobre un disco centrado en el origen y daría 0. Es el mismo ejercicio que el tema 1, con centro $(3, 0)$.

18/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región triangular de vértices (–2, 4), (0, 0) y (2, 4), suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y): 0 \le y \le 4, -y/2 \le x \le y/2\}$. $M = \frac{208k}{3} \approx 69{,}33k$.
>
> **La región (dibujo):** el triángulo tiene un vértice en el origen y los otros dos a la misma altura, (–2, 4) y (2, 4): es un triángulo isósceles con la punta abajo, simétrico respecto del eje y. Lados: de (0, 0) a (2, 4) la recta $y = 2x$; de (0, 0) a (–2, 4) la recta $y = -2x$; arriba el segmento $y = 4$. Entonces $D = \{2|x| \le y \le 4\}$.
> **Densidad:** el cuadrado de la distancia al origen es $x^2 + y^2$, así que $\delta = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$.
> **Límites (tipo II, conviene):** para cada altura $y \in [0, 4]$, x va del lado izquierdo al derecho: $y = -2x$ da $x = -\frac{y}{2}$ e $y = 2x$ da $x = \frac{y}{2}$. Así sale en un solo tramo: $D = \{0 \le y \le 4, -\frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2}\}$.
> **Integral en x:** primitiva $\frac{x^3}{3} + y^2x$, entre $-\frac{y}{2}$ y $\frac{y}{2}$: $2(\frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{2}) = \frac{y^3}{12} + y^3 = \frac{13y^3}{12}$.
> **Integral en y:** $\int_0^4 \frac{13y^3}{12}\,dy$, primitiva $\frac{13y^4}{48}$, entre 0 y 4: $\frac{13 \cdot 256}{48} = \frac{208}{3}$.
> **Resultado:** $M = \mathbf{\frac{208k}{3}} \approx 69{,}33k$.
> **Control en el otro orden (dy dx):** ahora hay dos tramos, porque el piso es $y = -2x$ para $x \in [-2, 0]$ e $y = 2x$ para $x \in [0, 2]$; el techo es $y = 4$. Por la simetría (D y δ son pares en x) alcanza con duplicar el tramo derecho: $\int_{2x}^4 (x^2 + y^2)\,dy = [x^2y + \frac{y^3}{3}]_{2x}^4 = 4x^2 + \frac{64}{3} - \frac{14x^3}{3}$, y $2\int_0^2 (4x^2 + \frac{64}{3} - \frac{14x^3}{3})\,dx = 2(\frac{32}{3} + \frac{128}{3} - \frac{56}{3}) = \frac{208}{3}$ ✓.
> **Trampa:** en polares el lado $y = 4$ queda $r = \frac{4}{\operatorname{sen}\theta}$ y se complica sin necesidad; el orden dx dy es el natural. Y si integrás primero en y tenés que partir en $x = 0$ (o usar la simetría con criterio, diciendo que D y δ son simétricos).

Ejercicio 2. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2x - \cos(z), y + e^{x^2+z^2}, z)$ sobre la porción de paraboloide $\Sigma : z = 4x^2 + y^2,\ z \le 4,$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente positiva.

> **Respuesta:** $\Phi = -8\pi$ (normales con tercera componente positiva).
>
> **Planteo:** Σ: $z = 4x^2 + y^2$, $z \le 4$, es un paraboloide elíptico abierto por arriba; su borde es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ (semiejes 1 en x y 2 en y) a altura 4. El campo trae $e^{x^2+z^2}$, que no tiene primitiva elemental: hacerlo directo es un problema. Cerramos con la tapa T: $z = 4$, $4x^2 + y^2 \le 4$, y usamos Gauss en $H = \{4x^2 + y^2 \le z \le 4\}$.
> **Hipótesis del teorema:** $\vec{f} = (2x - \cos z, y + e^{x^2+z^2}, z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (composición de funciones C^∞). $\Sigma \cup T$ es cerrada, suave a trozos, y acota H. Gauss da el flujo saliente.
> **Orientación:** en Σ la normal con tercera componente positiva apunta hacia adentro de H (el sólido está arriba del paraboloide), así que $\Phi_{\Sigma,\,\text{pedido}} = -\Phi_{\Sigma,\,\text{ext}}$. En T la exterior es (0, 0, 1).
> **Divergencia:** $\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x(2x - \cos z) + \partial_y(y + e^{x^2+z^2}) + \partial_z(z) = 2 + 1 + 1 = 4$ (la exponencial no depende de y,

se va).

Volumen: a altura z el corte es $4x^2 + y^2 \le z$, una elipse de semiejes $\frac{\sqrt{z}}{2}$ y $\sqrt{z}$, de área $\pi \cdot \frac{\sqrt{z}}{2} \cdot \sqrt{z} = \frac{\pi z}{2}$. $\text{Vol}(H) = \int_0^4 \frac{\pi z}{2}\, dz = [\frac{\pi z^2}{4}]_0^4 = 4\pi$. Entonces $\iiint_H 4\, dV = 16\pi$.

Tapa: en $z = 4$, $\vec{f} \cdot (0, 0, 1) = z = 4$; el área de $4x^2 + y^2 \le 4$ es $\pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$. $\Phi_T = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$.

Gauss: $\Phi_{\Sigma,\, ext} = 16\pi - 8\pi = 8\pi$.

Resultado: con las normales hacia z^+, $\boldsymbol{\Phi = -8\pi}$.

Control directo: con $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (-8x, -2y, 1)$: $\vec{f} \cdot \vec{N} = -16x^2 + 8x \cos z - 2y^2 - 2y\, e^{x^2+z^2} + z$, con $z = 4x^2 + y^2$. Los términos $8x \cos z$ y $-2y\, e^{x^2+z^2}$ son impares en x y en y respectivamente sobre una elipse simétrica: integran 0 (así se esquiva la exponencial). Queda $\iint (-12x^2 - y^2)\, dA$; con $x = \frac{r}{2}\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ ($dA = \frac{r}{2}\, dr\, d\theta$, $r \le 2$): $\int_0^{2\pi} \int_0^2 (-3r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) \frac{r}{2}\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-3\pi - \pi) = -8\pi$ ✓.

Trampa: quedarse con el $+8\pi$ de Gauss sin dar vuelta el signo: el pedido es con la normal hacia arriba, que en Σ es la interior.

Ejercicio 3. Considere la superficie
$\Sigma : y + x^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le x^2$.
Halle una parametrización de Σ y calcule la integral del campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{(1 + 4x^2)}$ en Σ.

Respuesta: Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le x^2$. $\iint_\Sigma f\, dS = \frac{424}{15} \approx 28{,}27$.

Planteo: $y + x^2 = 4$ es un cilindro parabólico: la parábola $y = 4 - x^2$ del plano xy, trasladada paralela al eje z. Σ es el trozo con $x \ge 0$, $y \ge 0$, entre el plano $z = 0$ y la superficie $z = x^2$. $\iint_\Sigma f\, dS = \iint_D f(\vec{X}(x, z))\, \|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\|\, dx\, dz$.

Parametrización: como las generatrices son paralelas al eje z, se usan x y z como parámetros: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$.

Dominio D: $x \ge 0$, e $y = 4 - x^2 \ge 0$ da $x \le 2$: $0 \le x \le 2$. Para cada x, $0 \le z \le x^2$. $D = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le x^2\}$.

Vector normal: $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$. $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$. $\|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\| = \sqrt{(4x^2 + 1)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Integrando: $f(\vec{X}(x, z)) = \sqrt{(1 + 4x^2)}$, así que $f \cdot \|\vec{X}_x \times \vec{X}_z\| = 1 + 4x^2$ (la raíz se va).

Cuenta: $\iint = \int_0^2 \int_0^{x^2} (1 + 4x^2)\, dz\, dx$. Integral en z: primitiva $(1 + 4x^2)\, z$, entre 0 y x^2 da $x^2 + 4x^4$. Integral en x: primitiva $\frac{x^3}{3} + \frac{4x^5}{5}$, entre 0 y 2 da $\frac{8}{3} + \frac{128}{5} = \frac{40 + 384}{15}$.

Resultado: $\iint_\Sigma f\, dS = \boldsymbol{\frac{424}{15}} \approx 28{,}27$.

Control (otra parametrización): con (y, z) como parámetros, $\vec{X}(y, z) = (\sqrt{(4 - y)}, y, z)$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 4 - y$. Ahí la norma es $\sqrt{(1 + \frac{1}{4(4 - y)})}$ y $f = \sqrt{(17 - 4y)}$; integrado numéricamente da 28,2667 ✓.

Trampa: no se puede proyectar sobre el plano xy (el cilindro se ve como la parábola, área 0). Y la cota de z depende de x: el techo es $z = x^2$, no un número.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ con $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y
$\vec{g}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + y,\ 2x^3yz^2,\ 2x^3y^2z)$
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), 6 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

Respuesta: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi$.

El enunciado dice $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ aunque el campo vive en $\mathbb{R}^3$; lo leemos como $C^2(\mathbb{R}^3)$. Si φ dependiera sólo de (x, y), $\nabla\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, 0)$ sigue siendo un gradiente y el resultado no cambia. **Planteo:** φ es desconocida, así que hay que aprovechar que su gradiente circula 0 en curvas cerradas, y separar lo que es gradiente dentro de $\vec{g}$.
Descomposición: $\nabla(x^3y^2z^2) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2, 2x^3y^2z)$, así que $\vec{g} = \nabla(x^3y^2z^2) + (y, 0, 0)$ y $\vec{f} = \nabla(\varphi + x^3y^2z^2) + (y, 0, 0)$, con $\varphi + x^3y^2z^2$ de clase C^2.
La parte de gradientes: $\vec{\alpha}(0) = (3, 0, 0) = \vec{\alpha}(2\pi)$ y $\vec{\alpha}$ es C^1: la curva es cerrada y $\oint_C \nabla(\varphi + x^3y^2z^2) \cdot d\vec{s} = 0$.
El resto: $\oint_C (y, 0, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen} t)(-3 \operatorname{sen} t)\, dt = -9 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -9\pi$.
Control con el teorema del rotor: $\operatorname{rot}(y, 0, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 6 - 2x$ ($z = 6 - 6\cos t = 6 - 2x$) sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$, recorrida en sentido antihorario visto desde arriba, compatible con la normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -9\pi$ ✓.
Resultado: $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi}$.
Trampa: $\vec{g}$ no es de gradientes (su rotor es $(0, 0, -1)$), así que la circulación no es 0 por ser curva cerrada. El "+ y" de la primera componente es justamente lo que hay que detectar.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva $y = \alpha(x)$ que tiene por extremos los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2, y_1)$, siendo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que cumple la ecuación diferencial $y' + 2xy = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2x + y, x)$ a lo largo de Γ recorrida de A a B.

Respuesta: $\alpha(x) = 1 - e^{-x^2}$, así que $y_1 = 1 - e^{-4}$. Con $\varphi = x^2 + xy$, la circulación de A a B es $\varphi(B) - \varphi(A) = 6 - 2e^{-4} \approx 5{,}963$.

EDO lineal: $y' + 2xy = 2x$ tiene factor integrante $e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2}$. Multiplicando: $(ye^{x^2})' = 2xe^{x^2} \Rightarrow ye^{x^2} = e^{x^2} + C \Rightarrow \boldsymbol{y = 1 + Ce^{-x^2}}$. (También sale separando: $y' = 2x(1 - y)$.)
Cuál es α: Γ es parte del gráfico de α y tiene extremo $A = (0, 0)$, así que $\alpha(0) = 0$: $1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$. $\boldsymbol{\alpha(x) = 1 - e^{-x^2}}$. Control: $\alpha' = 2xe^{-x^2}$ y $\alpha' + 2x\alpha = 2xe^{-x^2} + 2x - 2xe^{-x^2} = 2x$.
El otro extremo: $B = (2, \alpha(2))$: $\boldsymbol{y_1 = 1 - e^{-4}}$.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (2x + y, x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 1 = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = 2x + y \Rightarrow \varphi = x^2 + xy + h(y)$; $\varphi'_y = x + h' = x \Rightarrow h$ constante. $\boldsymbol{\varphi = x^2 + xy}$.
Circulación: $\varphi(B) - \varphi(A) = 4 + 2(1 - e^{-4}) - 0 = \boldsymbol{6 - 2e^{-4}} \approx 5{,}963$.
Trampa: la condición inicial no está dicha como "$\alpha(0) = 0$": sale de que $A = (0, 0)$ es extremo de Γ, que está sobre $y = \alpha(x)$. Sin eso, y_1 queda con una constante suelta.

11/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región del plano limitada por las curvas de nivel 4 y 9 de la función $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$, suponiendo que la densidad de masa en cada punto P es proporcional al cuadrado de la distancia entre P y (1, 0).

Respuesta: D: $4 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9$ (corona de centro (1, 0), radios 2 y 3). $M = \dfrac{65\pi k}{2} \approx 102{,}1k$.

Las curvas de nivel: $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$. La curva de nivel 4 es $(x-1)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (1, 0) y radio 2) y la de nivel 9 es $(x-1)^2 + y^2 = 9$ (mismo centro, radio 3).
La región (dibujo): la chapa limitada por las dos es la corona $D = \{4 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9\}$: el anillo entre dos circunferencias concéntricas con centro en (1, 0), no en el origen.
Densidad: el cuadrado de la distancia de $P = (x, y)$ a (1, 0) es $(x-1)^2 + y^2$, así que $\delta(x, y) = k[(x-1)^2 + y^2]$, $k > 0$.
Polares desplazadas: como todo está centrado en (1, 0), uso $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Jacobiano: $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$. Entonces $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, la corona es $2 \le r \le 3$ con $0 \le \theta \le 2\pi$ (rectángulo) y $\delta = kr^2$.
Cuenta: $M = \int_0^{2\pi} \int_2^3 kr^2 \cdot r \, dr \, d\theta$. En r: primitiva $\dfrac{kr^4}{4}$, entre 2 y 3 da $\dfrac{k(81 - 16)}{4} = \dfrac{65k}{4}$. En θ: $\dfrac{65k}{4}$ θ entre 0 y 2π da $\dfrac{65k}{4} \cdot 2\pi$.
Resultado: $M = \boldsymbol{\dfrac{65\pi k}{2}} \approx 102{,}1k$.
Control: masa del disco de radio 3 menos la del de radio 2 (misma densidad): $2\pi k \cdot \dfrac{3^4}{4} - 2\pi k \cdot \dfrac{2^4}{4} = \dfrac{81\pi k}{2} - 8\pi k = \dfrac{65\pi k}{2}$ ✓.
Trampa: las polares comunes (centradas en el origen) no describen esta corona con límites constantes; hay que centrarlas en (1, 0). Y la densidad es la distancia *al cuadrado*: $\delta = kr^2$, que con el jacobiano da kr^3 (no kr^2).

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie Σ de ecuación $z + x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra contenida en el primer octante.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{24} \approx 29{,}33$.

Planteo: Σ es el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ (vértice en (0, 0, 9), abre hacia abajo) restringido a $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| \, dr \, d\theta$.
Parametrización: $X(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 9 - r^2)$.
Dominio D: $z \ge 0$ es $9 - r^2 \ge 0$, o sea $0 \le r \le 3$ (la curva borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano $z = 0$). $x \ge 0$ e $y \ge 0$ dan $0 \le \theta \le \pi/2$. $D = [0, 3] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ ($r \ge 0$). Se anula sólo en $r = 0$, un único punto, que no cambia el área.

Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r\sqrt{(1 + 4r^2)}\, dr\, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\, dr$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 3 da $\frac{37^{3/2} - 1}{12} = \frac{37\sqrt{37} - 1}{12}$. Integral en θ: primitiva $\frac{37\sqrt{37} - 1}{12}\,\theta$, entre 0 y π/2 multiplica por $\frac{\pi}{2}$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\frac{\pi(37\sqrt{37} - 1)}{24}} \approx 29{,}33$.

Control (cartesianas): como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\, dx\, dy$ sobre el cuarto de disco $x^2 + y^2 \le 9$, $x, y \ge 0$; integrado numéricamente da 29,3297 ✓.

Trampa: el primer octante también pide $z \ge 0$, y esa es la condición que corta el paraboloide en $r = 3$. Y no te olvides del factor r del módulo: sin él la integral en r ya no tiene primitiva inmediata, señal de que falta algo.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \text{sen}(y^2 z), y + e^{z^2}, 2z)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - y^2, |x| \le 2\}$.

Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

Respuesta: $\Phi = 512/3$ (normales hacia afuera de H).

Planteo: la frontera de H es cerrada; con la normal exterior, Gauss: $\Phi = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\, dV$. Directo sería inviable por e^{z^2} y $\text{sen}(y^2 z)$.

Hipótesis del teorema: $\vec{f} = (x + \text{sen}(y^2 z), y + e^{z^2}, 2z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (C^∞). H es acotado: $1 \le 5 - y^2$ obliga a $y^2 \le 4$, o sea $|y| \le 2$, y $|x| \le 2$. Su frontera es cerrada y suave a trozos: piso $z = 1$, techo $z = 5 - y^2$, y los planos $x = 2$ y $x = -2$. Orientación: normal exterior.

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x(x + \text{sen}(y^2 z)) + \partial_y(y + e^{z^2}) + \partial_z(2z) = 1 + 1 + 2 = 4$.

Cuenta: $\Phi = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{1}^{5-y^2} 4\, dz\, dy\, dx = 4\cdot 4\cdot\int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 16[4y - \frac{y^3}{3}]_{-2}^{2} = 16(16 - \frac{16}{3}) = 16\cdot\frac{32}{3} = \frac{512}{3}$.

Resultado: $\mathbf{\Phi = \frac{512}{3}}$.

Gráfico: un "túnel" de techo parabólico ($z = 5 - y^2$, máximo 5 en $y = 0$) apoyado en el plano $z = 1$, cortado por las paredes $x = \pm 2$; las flechas salen: hacia $(0, 0, -1)$ en el piso, hacia $(\pm 1, 0, 0)$ en las paredes, hacia arriba en el techo.

Control por caras: paredes $x = \pm 2$ (normales $(\pm 1, 0, 0)$): $\vec{f}\cdot(1, 0, 0)$ en $x = 2$ es $2 + \text{sen}(y^2 z)$ y $-\vec{f}\cdot(1, 0, 0)$ en $x = -2$ es $2 - \text{sen}(y^2 z)$; sumadas dan 4 sobre la sección de área $\int_{-2}^{2}(4 - y^2)dy = \frac{32}{3}$: $\frac{128}{3}$. Piso $z = 1$ (normal $(0, 0, -1)$): $-2z = -2$ sobre el cuadrado de área 16: -32. Techo (normal $(0, 2y, 1)$): $2y^2 + 2y\, e^{z^2} + 2(5 - y^2)$; el término con e^{z^2} es impar en y y se anula, queda $10\cdot 16 = 160$. Total $\frac{128}{3} - 32 + 160 = \frac{512}{3}$ ✓.

Trampa: olvidarse de que el piso es $z = 1$ (no $z = 0$): la altura es $5 - y^2 - 1 = 4 - y^2$ y los límites en y son ± 2, no $\pm\sqrt{5}$.

Ejercicio 4. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva

$\Gamma : x^2 + y^2 = 4,\ x - y \ge 0,\ x \le 0$.

Indique en un gráfico la orientación elegida para Γ.

Respuesta: $\alpha(y) = 3y$, $\vec{f} = \nabla(3xy^2)$. Con Γ antihoraria, de $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(0, -2)$: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 6\sqrt{2}$ (con la orientación opuesta, $-6\sqrt{2}$).

Condición de gradientes: $P = y\alpha(y)$ y $Q = 2x\alpha(y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{f} = \nabla\phi$ (con $\phi \in C^2$, porque $\vec{f}$ es C^1), por Schwarz $P'_y = Q'_x$: $\alpha(y) + y\alpha'(y) = 2\alpha(y) \Leftrightarrow y\alpha'(y) = \alpha(y)$ para todo y.

La EDO: para $y \neq 0$, $(\alpha/y)' = \dfrac{y\alpha' - \alpha}{y^2} = 0$, así que $\alpha = K_1 y$ en $y > 0$ y $\alpha = K_2 y$ en $y < 0$. Como $\alpha \in C^1$, α' es continua en 0: $\alpha'(0) = K_1$ por derecha y K_2 por izquierda, entonces $K_1 = K_2 = K$ (y $\alpha(0) = 0$ sale de la ecuación en $y = 0$). Queda $\alpha(y) = Ky$. Control: $y \cdot K = Ky$ ✓.

Constante: $\vec{f}(1, 1) = (\alpha(1), 2\alpha(1)) = (K, 2K) = (3, 6) \Rightarrow K = 3$ (las dos componentes dan lo mismo, así que el dato es consistente). $\alpha(y) = 3y$ y $\vec{f} = (3y^2, 6xy)$. Con esto, $P'_y = 6y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes, con potencial $\phi(x, y) = 3xy^2$ ($\phi'_x = 3y^2$, $\phi'_y = 6xy$ ✓).

La curva: circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2 con $y \leq x$ y $x \leq 0$: es el arco del tercer cuadrante entre la recta $y = x$ y el eje y negativo. Extremos: con $y = x$, $2x^2 = 4$ y $x \leq 0$ da $Q_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; con $x = 0$, $y = -2$ (cumple $y \leq x$) da $Q_2 = (0, -2)$. En ángulos, $\theta \in [5\pi/4, 3\pi/2]$.

Orientación elegida: antihoraria, de Q_1 a Q_2 (en el gráfico, la flecha baja desde $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ hasta $(0, -2)$).

Cuenta: $\phi(Q_2) = 3 \cdot 0 \cdot 4 = 0$ y $\phi(Q_1) = 3(-\sqrt{2})(2) = -6\sqrt{2}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(Q_2) - \phi(Q_1) =$ **$6\sqrt{2}$** con Γ antihoraria ($-6\sqrt{2}$ si se la recorre al revés).

Trampa: $x - y \geq 0$ es $y \leq x$ (debajo de la recta), no arriba. Con $x \leq 0$ eso deja un arco chico de 45°, no un cuarto de circunferencia. Y como el enunciado pide indicar la orientación, sin ella el signo no vale.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las condiciones
$x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z - y = 0$, $x \geq 0$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), z, y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ. Indique el sentido de recorrido de la curva utilizado.

Respuesta: Recorriendo Γ de $(0, 0, 0)$ a $(0, 2, 2)$ (pasando por $(1, 1, 1)$), la circulación es 4. En el sentido opuesto es -4.

La curva: $x^2 + y^2 - 2y = 0$ es $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, el cilindro circular de radio 1 y eje $\{x = 0, y = 1\}$; cortado con el plano $z = y$ da una elipse. La condición $x \geq 0$ se queda con la mitad: Γ es un **arco abierto**, cuyos extremos tienen $x = 0$, o sea $(y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0$ o $y = 2$: $A = (0, 0, 0)$ y $B = (0, 2, 2)$. Parametrización: $\vec{X}(t) = (\operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ (ahí $x = \operatorname{sen} t \geq 0$).

Sentido elegido: el de t creciente, de $A = (0, 0, 0)$ a $B = (0, 2, 2)$, pasando por $(1, 1, 1)$.

¿Es de gradientes? $\vec{f} = (\varphi(x), z, y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$) y $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 1, 0 - 0, 0 - 0) = \vec{0}$; como $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, $\vec{f}$ es de gradientes. Más directo: si $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(s)\,ds$ (existe porque φ es continua), $U(x, y, z) = \Phi(x) + yz$ cumple $\nabla U = (\varphi(x), z, y) = \vec{f}$.

Circulación: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A) = (\Phi(0) + 2 \cdot 2) - (\Phi(0) + 0 \cdot 0) =$ **4**. El $\Phi(0)$ se cancela porque los dos extremos tienen $x = 0$: por eso no hace falta conocer φ.

Control directo: $\vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) = \varphi(\operatorname{sen} t)\cos t + 2(1 - \cos t)\operatorname{sen} t$. La primera parte es $(\Phi(\operatorname{sen} t))'$ y suma $\Phi(\operatorname{sen} \pi) - \Phi(\operatorname{sen} 0) = 0$; la segunda es $((1 - \cos t)^2)'$ y da $(1 - \cos \pi)^2 - 0 = 4$.

Resultado: 4 de $(0, 0, 0)$ a $(0, 2, 2)$; -4 en el sentido contrario.

Trampa: Γ no es cerrada (es media elipse), así que no da 0 aunque el campo sea conservativo. Y hay que indicar el sentido: el enunciado lo pide y el signo depende de eso.

17/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada la curva C parametrizada por
$\vec{\alpha} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\alpha}(t) = (2 - 4\,\text{sen}(t)\cos(t),\ 2\,\text{sen}(t))$
cuyo gráfico es el siguiente
[gráfico: curva cerrada con forma de gota invertida, con un pico en el eje x y la parte redondeada arriba]
indique la orientación dada por la parametrización y calcule el área de la región encerrada por ella.

> **Respuesta:** La parametrización recorre la curva en sentido **horario**. Área = **16/3**.
>
> **La curva:** $\vec{\alpha}(t) = (2 - 4\,\text{sen}\,t\cos t,\ 2\,\text{sen}\,t) = (2 - 2\,\text{sen}(2t),\ 2\,\text{sen}\,t)$. Es cerrada: $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(\pi) = (2, 0)$. Es simple: t y $\pi - t$ dan la misma altura $2\,\text{sen}\,t$ pero $x = 2 \mp 2\,\text{sen}(2t)$ distintas (salvo en $t = \pi/2$), y en $[0, \pi/2]$ la altura crece. Es C^1 a trozos (en (2, 0) tiene un pico: sale con velocidad (−4, 2) y llega con (−4, −2)).
>
> **Orientación:** $t = 0$: (2, 0); $t = \pi/4$: $(0, \sqrt{2})$; $t = \pi/2$: (2, 2); $t = 3\pi/4$: $(4, \sqrt{2})$; $t = \pi$: (2, 0). Sale del pico hacia la izquierda y arriba, pasa por arriba de izquierda a derecha y baja por la derecha: sentido **horario** (negativo).
>
> **Green para el área:** con $\vec{f} = (0, x)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ y $Q'_x - P'_y = 1$, queda $\text{área}(D) = \oint_{\partial D^+} x\,dy$. Como $\vec{\alpha}$ recorre ∂D en sentido horario, $\int_\alpha x\,dy = -\text{área}(D)$.
>
> **Cuenta:** $x\,y' = (2 - 4\,\text{sen}\,t\cos t)(2\cos t) = 4\cos t - 8\,\text{sen}\,t\cos^2 t$. $\int_0^\pi 4\cos t\,dt = [4\,\text{sen}\,t]_0^\pi = 0$; $\int_0^\pi 8\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,dt = \left[-\frac{8\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$. Entonces $\int_\alpha x\,dy = 0 - \frac{16}{3} = -\frac{16}{3}$ (el signo negativo confirma el sentido horario).
>
> **Control por franjas:** a la altura $y = 2\,\text{sen}\,t$ el ancho es $4\,\text{sen}(2t) = 8\,\text{sen}\,t\cos t = 2y\sqrt{4 - y^2}$, y $\int_0^2 2y\sqrt{4 - y^2}\,dy = \left[-\frac{2}{3}(4 - y^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$ ✓.
>
> **Resultado:** sentido horario; **área = 16/3**.
>
> **Trampa:** el −16/3 no es "un área negativa" que se corrige con módulo sin decir nada: es la marca de que la parametrización es horaria, y hay que decirlo.

Ejercicio 2. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas formada por las lineas de campo de $\vec{g}(x, y) = (x, 4y)$ y sea Γ la curva ortogonal a las curvas de $\mathscr{F}$ que pasa por (0, 1). Calcule
$\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx\,dy$
donde D es la región acotada del plano cuyo borde es Γ.

> **Respuesta:** $\mathscr{F}$: $y = cx^4$ (y el eje y). Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$. $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = 4\pi$.
>
> **Líneas de campo (EDO):** $x' = x$, $y' = 4y$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$. Separando: $\frac{dy}{y} = 4\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 4\ln|x| + c \Rightarrow$ **$y = c\,x^4$** (con $c = 0$ el eje x; además el eje y, $x = 0$, también es línea de campo). La EDO de $\mathscr{F}$ es entonces $y' = \frac{4y}{x}$.
>
> **Ortogonales:** $y' = -\frac{x}{4y}$. Separando: $4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + k \Rightarrow x^2 + 4y^2 = C$. Por (0, 1): $C = 4$. **Γ: $x^2 + 4y^2 = 4$**, o sea $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Otra forma de verlo: $\nabla(x^2 + 4y^2) = (2x, 8y) = 2\vec{g}$, así que $\vec{g}$ es perpendicular a las curvas de nivel de $x^2 + 4y^2$, y esas curvas de nivel son las ortogonales a las líneas

de campo. En (0, 1) la línea de campo es el eje y y Γ tiene tangente horizontal ✓.

La región: Γ es una elipse acostada centrada en el origen, que corta los ejes en (±2, 0) y (0, ±1). $D = \{x^2 + 4y^2 \le 4\}$.

Cambio de variables: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Jacobiano: $\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r$. Y el integrando se simplifica: $x^2 + 4y^2 = 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\,\mathrm{sen}^2\theta = 4r^2$.

Cuenta: $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2 \cdot 2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot [2r^4]_0^1 = 2\pi \cdot 2$.

Resultado: $\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx dy = \mathbf{4\pi}$.

Control: en cartesianas, para $x \in [-2, 2]$ e $|y| \le \sqrt{(1 - x^2/4)}$, da 4π; y por partes, $\iint_D x^2 = 2\pi$ y $\iint_D 4y^2 = 2\pi$ (por la simetría que arregla el cambio de variables, los dos sumandos pesan igual) ✓.

Trampa: la ortogonal no es una línea de campo de $\vec{g}$: hay que pasar por la EDO de $\mathscr{F}$ y cambiar la pendiente por $-1/y'$. Si integrás las líneas de campo y te quedás ahí, no aparece ninguna curva cerrada.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo

$H : \sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

Respuesta: $M = 81\pi k/16$.

Planteo: $M = \iiint_H \delta\,dV$.

El sólido: $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es el cono de eje z con vértice en el origen que abre hacia arriba (semiapertura 45°). La condición $\sqrt{(x^2 + y^2)} \le z \le 3$ es lo de adentro del cono (la parte del "helado") tapado por el plano $z = 3$; cono y plano se cortan en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ a altura 3. Con $x \ge 0$, $y \ge 0$ queda el cuarto del primer octante. Cada corte horizontal a altura z es un cuarto de disco de radio z.

Densidad: distancia al plano xy = $|z| = z$ (en H, $z \ge 0$): $\delta = kz$, con $k > 0$.

Coordenadas: cilíndricas, jacobiano r. Rangos: $0 \le \theta \le \pi/2$ (primer cuadrante), $r \le z \le 3$, que pide $r \le 3$, así que $0 \le r \le 3$.

Cuenta: $M = k\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_r^3 z\,r\,dz\,dr\,d\theta$. Primitiva en z: $\frac{z^2}{2}$, entre r y 3: $\frac{r(9 - r^2)}{2}$. Primitiva en r: $\frac{1}{2}\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)$, entre 0 y 3: $\frac{1}{2}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{8}$. Por $\pi/2$ de la integral en θ.

Resultado: $\mathbf{M = \frac{81\pi k}{16}}$.

Control en esféricas: $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\varphi$, jacobiano $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\varphi = \pi/4$ y lo de adentro es $0 \le \varphi \le \pi/4$; el plano $z = 3$ es $\rho\cos\varphi = 3$, así que $0 \le \rho \le 3/\cos\varphi$; $\theta \in [0, \pi/2]$. La densidad es $k\rho\cos\varphi$. $M = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3/\cos\varphi} \rho^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$. En ρ: $\frac{\rho^4}{4}$ da $\frac{81}{4\cos^4\varphi}$, y queda $\frac{81}{4}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi}$. Primitiva en φ: $\frac{1}{2\cos^2\varphi}$, entre 0 y $\pi/4$: $\frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$. Total: $\frac{81}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{81\pi k}{16}$ ✓.

Trampa: poner $0 \le z \le r$ (eso es lo de afuera del cono) o, en esféricas, $\rho \le 3$ (eso describe la bola de radio 3, no el plano $z = 3$).

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie $\Sigma : z + y^2 = 5,\ y \ge 0,\ 0 \le x \le 2,\ z \ge 1$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido.

Respuesta: Con el borde recorrido $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$ (antihorario visto desde arriba, normal $(0, 2y, 1)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4$. En el sentido contrario, -4.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = x + z$, $Q = y^2 - xy$, $R = y + z^2$: polinomios, $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

La superficie y su borde: Σ es el trozo del cilindro parabólico $z = 5 - y^2$ con $z \geq 1$ (o sea $y^2 \leq 4$, y como $y \geq 0$, $0 \leq y \leq 2$) y $0 \leq x \leq 2$: el gráfico de $z = 5 - y^2$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 2]$ del plano xy. Su borde C tiene cuatro tramos: C_1 segmento $y = 0$, $z = 5$, de $(0, 0, 5)$ a $(2, 0, 5)$; C_2 arco de parábola $z = 5 - y^2$ en $x = 2$, de $(2, 0, 5)$ a $(2, 2, 1)$; C_3 segmento $y = 2$, $z = 1$, de $(2, 2, 1)$ a $(0, 2, 1)$; C_4 arco de parábola en $x = 0$, de $(0, 2, 1)$ a $(0, 0, 5)$. Es cerrada y suave a trozos.

Superficie elegida: el borde no está en un plano, así que no hay un trozo de plano que lo tenga como borde; la propia Σ es la cómoda: un gráfico C^1 sobre un rectángulo, suave y orientable. Con $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ se cumplen las hipótesis del teorema del rotor.

Orientación: tomo $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 2y, 1)$, que apunta hacia arriba (tercera componente positiva). Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia arriba los dedos giran en sentido antihorario visto desde arriba, así que el borde se recorre de modo que su proyección da la vuelta a R en sentido antihorario: $\mathbf{C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_4}$, es decir $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$. En el gráfico: la superficie como un techo que baja de $z = 5$ (sobre $y = 0$) a $z = 1$ (sobre $y = 2$), con flechas en ese orden.

Rotor: $\operatorname{rot} \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (1 - 0, 1 - 0, -y - 0) = \mathbf{(1, 1, -y)}$.

Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2y + (-y) \cdot 1 = y$. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \int_0^2 y \, dy \, dx = \int_0^2 [y^2/2]_0^2 \, dx = \int_0^2 2 \, dx = 4$.

Resultado: recorriendo $(0, 0, 5) \to (2, 0, 5) \to (2, 2, 1) \to (0, 2, 1) \to (0, 0, 5)$, $\mathbf{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4}$ (en el sentido contrario, -4).

Control: tramo por tramo, C_1 da 12, C_2 da -48, C_3 da -4 y C_4 da 44: suman 4.

Trampa: la normal de $z = 5 - y^2$ es $(0, 2y, 1)$, no $(0, 0, 1)$: el término $2y$ se multiplica con la segunda componente del rotor y con $(0, 0, 1)$ te daría -4.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 4$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x - z^2, y + x^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

Respuesta: $\nabla \cdot \vec{f} = 3$; $\operatorname{vol}(H) = 32/3$; flujo con normales hacia el interior $= -32$.

Planteo: H es el tetraedro limitado por $x + y + z = 4$ y los tres planos coordenados: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4 - x$, $0 \leq z \leq 4 - x - y$. ∂H son cuatro triángulos: superficie cerrada y suave a trozos.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (x - z^2, y + x^2, z)$ es polinomial, C^1 en $\mathbb{R}^3$. Con normal exterior, $\oiint_{\partial H} \vec{f} \cdot \check{n}_{ext} \, d\sigma = \iiint_H \nabla \cdot \vec{f} \, dV$; el enunciado pide normales hacia el interior, así que el flujo pedido es menos esa triple.

Divergencia: $\partial/\partial x(x - z^2) + \partial/\partial y(y + x^2) + \partial/\partial z(z) = 1 + 1 + 1 = \mathbf{3}$.

Volumen: $\int_0^4 \int_0^{4-x} (4 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^4 \frac{(4 - x)^2}{2} \, dx = \left[-\frac{(4 - x)^3}{6}\right]_0^4 = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3}$.

Cuenta: flujo saliente $= 3 \cdot \frac{32}{3} = 32$.

Resultado: con normales hacia el interior, **flujo = −32**.

Trampa: el signo (normales interiores). Los términos z^2 y x^2 no aportan a la divergencia: z^2 está en la primera componente y se deriva respecto de x, x^2 está en la segunda y se deriva respecto de y.

10/12/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0) \}$.

a) Estudie la continuidad de f en (0, 0).

b) Calcule las derivadas parciales de f en el origen. Indique, con fundamento, si ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

> **Respuesta:** a) No es continua en (0, 0): por $y = mx$ el límite es $2m/(1 + 2m^2)$, que depende de m. b) $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$; ninguna de las dos es continua en el origen ($f'_x(0, y) = 1/y$ y $f'_y(x, 0) = 2/x$).
>
> Lectura del enunciado: en la foto la fracción es muy chica; se toma $2xy/(x^2 + 2y^2)$, como la lee la resolución de la clase de repaso. Si el denominador fuera $x^2 + 2y^3$ las conclusiones serían las mismas (por $y = mx$ daría $2m$ y las parciales en el origen también valen 0).
>
> **a) Planteo:** f es continua en (0, 0) si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$.
>
> **Rectas y = mx** ($x \neq 0$): $f(x, mx) = \dfrac{2mx^2}{x^2 + 2m^2x^2} = \dfrac{2m}{1 + 2m^2}$, constante. Con $m = 0$ da 0 y con $m = 1$ da 2/3.
>
> **Conclusión:** el límite por cada recta depende de la pendiente, así que el límite doble no existe y f **no es continua** en el origen.
>
> **b) Parciales en el origen, por definición:** $f(h, 0) = 0$ y $f(0, k) = 0$ para $h, k \neq 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to0} \dfrac{0 - 0}{h} = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to0} \dfrac{0 - 0}{k} = 0$.
>
> **Parciales fuera del origen** (regla del cociente): $f'_x(x, y) = \dfrac{2y(x^2 + 2y^2) - 2xy\cdot2x}{(x^2 + 2y^2)^2} = \dfrac{2y(2y^2 - x^2)}{(x^2 + 2y^2)^2}$ y $f'_y(x, y) = \dfrac{2x(x^2 + 2y^2) - 2xy\cdot4y}{(x^2 + 2y^2)^2} = \dfrac{2x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + 2y^2)^2}$.
>
> **¿Son continuas en (0, 0)?** Habría que tener $f'_x(x, y) \to 0$ y $f'_y(x, y) \to 0$. Sobre el eje y ($x = 0, y \neq 0$): $f'_x(0, y) = 4y^3/(4y^4) = 1/y$, que no está acotada cuando $y \to 0$. Sobre el eje x ($y = 0, x \neq 0$): $f'_y(x, 0) = 2x^3/x^4 = 2/x$, tampoco acotada. Ninguna de las dos tiende a 0: **ninguna es continua en el origen**.
>
> **Fundamento sin cuentas:** si f'_x y f'_y (que existen en todo el plano) fueran continuas en (0, 0), por la condición suficiente f sería diferenciable ahí, y entonces continua. Como en a) vimos que f no es continua, las dos parciales no pueden ser continuas a la vez en el origen. Las cuentas de arriba muestran que, de hecho, no lo es ninguna.
>
> **Trampa:** no confundas "existen las parciales en el origen" (sí, valen 0) con "las parciales son continuas en el origen" (no). Para la continuidad hay que mirar el límite de las fórmulas de f'_x y f'_y fuera del origen.

Ejercicio 2. Sea g un función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en (1, –1) es $P(x, y) = 1 - x + y + x^2 + xy + y^2$.

Determine si $f(x, y) = e^{g(x,y)}$ alcanza un extremo relativo en (1, –1). En caso afirmativo indique tipo y valor.

> **Respuesta:** (1, –1) es punto crítico de f y allí f tiene un mínimo relativo, de valor $f(1, -1) = e^0 = 1$.
>
> **Planteo:** g es C^3 y la exponencial es C^∞, así que $f = e^g$ es C^3 en $\mathbb{R}^2$ (abierto). Como P es el Taylor de orden 2 de g en (1, –1), g comparte con P el valor y las derivadas primeras y segundas en ese punto.
>
> **Datos de g en (1, –1):** $g(1, -1) = P(1, -1) = 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$. $P'_x = -1 + 2x + y$ y $P'_y = 1 + x + 2y$,

que en (1, –1) dan –1 + 2 – 1 = 0 y 1 + 1 – 2 = 0: $\nabla g(1,-1) = (0,0)$. $Hg(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (hessiano de P).

Gradiente de f (regla de la cadena): $\nabla f = e^g \nabla g$, que en (1, –1) vale $e^0 \cdot (0,0) = (0,0)$: **(1, –1) es punto crítico de f**.

Hessiano de f: derivando otra vez, $f''_{ij} = e^g(g''_{ij} + g'_i\, g'_j)$. En (1, –1) los g′ valen 0 y $e^g = 1$, así que $Hf(1,-1) = Hg(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: det H > 0 y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; det H > 0 y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; det H < 0, punto silla (no hay extremo); det H = 0 no decide.

Clasificación: det Hf = 4 – 1 = 3 > 0 y $f''_{xx} = 2 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $\mathbf{f(1,-1) = e^0 = 1}$.

Otra forma de verlo: Hg(1, –1) da mínimo relativo de g en (1, –1) con g(1, –1) = 0; como e^t es estrictamente creciente, en un entorno vale $g \geq 0$ y entonces $f = e^g \geq e^0 = 1 = f(1,-1)$.

Trampa: en general $f''_{xx} = e^g(g''_{xx} + (g'_x)^2)$, no $e^g g''_{xx}$: el término $(g'_x)^2$ se va sólo porque el punto es crítico. Y el valor del extremo es $e^{g(1,\,-1)} = 1$, no g(1, –1) = 0.

Ejercicio 3. Considere la ecuación

$2z + \cos(y - z) + xy = 4$.

a) Pruebe que en un entorno del punto (1, 1, 1) la ecuación define implícitamente una función y = f(x, z) de clase C^1.

b) Encuentre los versores para los cuales derivada direccional de $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto (1, 1) resulta nula. Justifique sus cálculos.

Respuesta: a) F es C^1, F(1, 1, 1) = 0 y $F'_y(1,1,1) = 1 \neq 0$: y = f(x, z) existe y es C^1 cerca de (1, 1), con f(1, 1) = 1, $f'_x(1,1) = -1$, $f'_z(1,1) = -2$. b) $\nabla h(1,1) = (2,-1)$; derivada direccional nula para $\check{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

a) Planteo: $F(x, y, z) = 2z + \cos(y - z) + xy - 4$. La función a despejar es y = f(x, z), así que la condición clave es $F'_y \neq 0$.

Hipótesis del TFI: (1) F(1, 1, 1) = 2 + cos 0 + 1 – 4 = 0 ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomio más coseno de un polinomio). (3) $F'_y = -\text{sen}(y - z) + x$, que en (1, 1, 1) vale 0 + 1 = 1 ≠ 0 ✓. Entonces existe y = f(x, z) de clase C^1 en un entorno de (1, 1) con f(1, 1) = 1.

Derivadas de f en (1, 1): $F'_x = y \to 1$; $F'_z = 2 + \text{sen}(y - z) \to 2$. Así $f'_x(1,1) = -1/1 = -1$ y $f'_z(1,1) = -2/1 = -2$.

b) Diferenciabilidad de h: $h(x, z) = x^3 + z \cdot f(x, z)$ es C^1 en un entorno de (1, 1) (sumas y productos de funciones C^1), así que es diferenciable y $h'((1,1), \check{v}) = \nabla h(1,1) \cdot \check{v}$.

Gradiente: $h'_x = 3x^2 + z \cdot f'_x \to 3 - 1 = 2$; $h'_z = f + z \cdot f'_z \to 1 - 2 = -1$. $\nabla h(1,1) = (2,-1)$.

Versores: con $\check{v} = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$, pedimos 2a – b = 0, o sea b = 2a; entonces $5a^2 = 1$, $a = \pm 1/\sqrt{5}$. Quedan $\mathbf{\check{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})}$ y $\mathbf{\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})}$.

Trampa: el término f(1, 1) en h'_z (regla del producto) se olvida seguido; sin él da $\nabla h = (2,-2)$ y los versores salen mal.

Ejercicio 4. Sea g(u, v) un campo escalar de clase C^1 tal que w = 1 – 2u + 3v es una ecuación del plano tangente al gráfico de g en (2, 1, g(2, 1)). Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy)$.

Calcule f(0.9, 1.05) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: f(1, 1) = 0, $\nabla f(1,1) = (-1,-1)$. $f(0.9, 1.05) \approx 0 + (-1)(-0.1) + (-1)(0.05) = 0.05$.

Datos de g: el plano tangente $w = 1 - 2u + 3v$ en $(2, 1, g(2, 1))$ da $g(2, 1) = 1 - 4 + 3 = 0$ y $\nabla g(2, 1) = (-2, 3)$.
Elección del punto: hace falta un punto cercano a $(0.9, 1.05)$ donde $(x^2 + y^2, xy)$ valga $(2, 1)$: $(1, 1)$ da $(2, 1)$ ✓. Entonces $f(1, 1) = g(2, 1) = 0$.
Hipótesis: g es C^1 y la interior es polinómica, así que f es C^1 en un entorno de $(1, 1)$: es diferenciable y $f(x, y) \approx f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$ cerca de $(1, 1)$.
Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 + y^2$ da $(2x, 2y) = (2, 2)$; $v = xy$ da $(y, x) = (1, 1)$.
Cuenta: $f'_x = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$; $f'_y = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1$. $\nabla f(1, 1) = (-1, -1)$.
Resultado: con $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.05$: $f(0.9, 1.05) \approx 0 + (-1)(-0.1) + (-1)(0.05) = \mathbf{0.05}$.
Trampa: el punto de la aproximación no está dado, hay que buscarlo: tiene que estar cerca de $(0.9, 1.05)$ **y** mandar la interior al punto donde conocés g. Y $g(2, 1)$ no es el 1 del plano: hay que evaluar.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u + v, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$.
Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $A = (-1, 1, 1)$. Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Respuesta: Un único punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$. Plano tangente: $-x + y + z = -1$; en forma paramétrica, $\vec{X} = (2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Paso 1, normal de la esfera en A: Σ^* es el nivel 3 de $G = x^2 + y^2 + z^2$, C^1, con $\nabla G = 2(x, y, z)$; $A = (-1, 1, 1)$ está $(1 + 1 + 1 = 3)$ y $\nabla G(A) = (-2, 2, 2) \neq \vec{0}$, proporcional a $\vec{n} = (-1, 1, 1)$. Su plano tangente es $-x + y + z = 3$.
Paso 2, normal de Σ: $\vec{X}$ es C^1. $\vec{X}_u = (1, 0, u)$, $\vec{X}_v = (1, v, 0)$. $\vec{N} = (0 \cdot 0 - u \cdot v, u \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot v - 0 \cdot 1) = (-uv, u, v)$. Con $u, v > 0$, $\vec{N} \neq \vec{0}$: Σ es regular.
Paso 3, paralelismo: $(-uv, u, v) = \lambda(-1, 1, 1)$: $u = \lambda$, $v = \lambda$ y $uv = \lambda$, o sea $\lambda^2 = \lambda$. $\lambda = 0$ queda afuera (daría $u = 0$, que no está en el dominio, y además $\vec{N} = \vec{0}$ no define plano); entonces $\lambda = 1$, $\mathbf{u = v = 1}$.
Punto: $P = \vec{X}(1, 1) = (2, 1/2, 1/2)$.
Plano tangente: normal $(-1, 1, 1)$: $-(x - 2) + (y - 1/2) + (z - 1/2) = 0$, o sea $\mathbf{-x + y + z = -1}$, paralelo y distinto de $-x + y + z = 3$. Forma paramétrica (con los vectores tangentes $\vec{X}_u(1, 1) = (1, 0, 1)$ y $\vec{X}_v(1, 1) = (1, 1, 0)$): $\vec{X} = \mathbf{(2, 1/2, 1/2) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Trampa: la ecuación $\lambda^2 = \lambda$ tiene la raíz $\lambda = 0$, que hay que descartar justificándolo (dominio $u, v > 0$); y la ecuación paramétrica del plano se arma con $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$, no con la normal.

10/12/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \le 8, y \ge 0, z \ge 1\}$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\,dxdydz = 16/15$.
>
> **Planteo:** integrar yz sobre $H = \{x^2 + y^2 + 4z^2 \le 8, y \ge 0, z \ge 1\}$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de radio 2). $z \ge 1$ deja el casquete de arriba, entre $z = 1$ y la punta $z = \sqrt{2}$, e $y \ge 0$ se queda con la mitad. Cada tajada $z = cte$ es el medio disco $x^2 + y^2 \le 8 - 4z^2$, $y \ge 0$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. $y \ge 0$ es $\text{sen}\,\theta \ge 0$: $0 \le \theta \le \pi$.
> Rangos: $1 \le z \le \sqrt{2}$, $0 \le r \le \sqrt{(8 - 4z^2)}$, $0 \le \theta \le \pi$. El integrando con el jacobiano queda $yz \cdot r = z\,r^2\,\text{sen}\,\theta$.
> **Cuenta (por tajadas):** para z fijo, $\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$ y $\int_0^R r^2\,dr = \frac{R^3}{3}$, con $R = \sqrt{(8 - 4z^2)}$.
> Queda $\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} z(8 - 4z^2)^{3/2}\,dz$. Con $u = 8 - 4z^2$, $du = -8z\,dz$; $z = 1 \mapsto u = 4$, $z = \sqrt{2} \mapsto u = 0$: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_0^4 u^{3/2}\,du = \frac{1}{12}\cdot[\frac{2}{5}u^{5/2}]_0^4 = \frac{1}{12}\cdot\frac{64}{5} = \frac{16}{15}$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\,dV = \mathbf{\frac{16}{15}}$.
> **Control (orden dz dr dθ):** $0 \le r \le 2$ y $1 \le z \le \frac{\sqrt{(8 - r^2)}}{2}$. En z: $[\frac{z^2}{2}] = \frac{8 - r^2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{4 - r^2}{8}$. Queda $2\int_0^2 r^2 \cdot \frac{4 - r^2}{8}\,dr = \frac{1}{4}[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}]_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{16}{15}$ ✓.
> **Trampa:** el integrando no es constante en θ: $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y por eso la integral en θ da 2 (no π). Y el jacobiano suma otra r: queda r^2, no r.

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(2, 0, 0) \to (0, 2, 0) \to (0, 0, 2) \to (2, 0, 0)$ (antihorario visto desde el primer octante, normal $(1, 1, 1)$): $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2$. En el sentido contrario, -2.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 - y$, $Q = 3x^2y^2z^2 + \varphi(y)$, $R = 2x^2y^3z$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. C es el borde del triángulo Σ de vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ y $D = (0, 0, 2)$ (los cortes del plano con los ejes): es cerrada y suave a trozos, tres segmentos.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = 6xy^2z^2 - (6xy^2z^2 - 1) = 1$.
> **$\text{rot}\,\vec{f} = (0, 0, 1)$**: φ(y) no aporta porque su derivada respecto de x (y de z) es 0. Mirado de otra forma, $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (-y, \varphi(y), 0)$, y la parte de gradiente no circula sobre una curva cerrada.
> **Hipótesis del teorema del rotor:** $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$; Σ es un trozo de plano (suave, orientable, acotada) cuyo

borde es C. Uso la propia Σ, que ya es la superficie más cómoda con ese borde: plana y de normal constante.
Orientación: escribo Σ como $z = 2 - x - y$ sobre el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, y tomo la normal hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$. Regla de la mano derecha: con el pulgar en (1, 1, 1), los dedos recorren el borde **A** → **B** → **D** → **A**, que visto desde el primer octante (desde un punto como (5, 5, 5) mirando al origen) es antihorario. En el gráfico: flechas de (2, 0, 0) a (0, 2, 0), de ahí a (0, 0, 2) y de vuelta a (2, 0, 0).
Cuenta: $\text{rot}\,\vec{f} \cdot \vec{N} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1$, así que $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_T 1\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2-x} dy\,dx = \int_0^2 (2 - x)\,dx = [2x - x^2/2]_0^2 = 4 - 2 = 2$.
Resultado: recorriendo A → B → D → A, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2}$ (en el sentido contrario, −2).
Trampa: no hace falta conocer φ ni pelearse con $2xy^3z^2$: el rotor los mata. Si lo hacés por segmentos, la parte con φ en cada tramo depende sólo de los extremos y se cancela al cerrar la vuelta; pero entonces tenés que parametrizar los tres lados con el sentido correcto, que es donde más se pierden puntos.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación
$\vec{X} = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t),\ t \in \mathbb{R}$
contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$. Calcule la longitud de Γ.

Respuesta: Γ: $t \in [-1, 1]$. $L = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)} \approx 6{,}594$.

Planteo: la longitud es $L = \int_\Gamma ds = \int \|\vec{X}'(t)\|\,dt$ sobre el intervalo de t para el cual $\vec{X}(t)$ está en D.
Qué tramo está en D: reemplazando $\vec{X}(t)$ en la desigualdad: $x^2 + y^2 + 2z^2 = \cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t) + 2t^2 = 1 + 2t^2$. Entonces $1 + 2t^2 \leq 3 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$. Γ es una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que va de $\vec{X}(-1) = (-1, 0, -1)$ a $\vec{X}(1) = (-1, 0, 1)$: da una vuelta entera, porque πt recorre $[-\pi, \pi]$.
Rapidez: por la regla de la cadena $\vec{X}'(t) = (-\pi \operatorname{sen}(\pi t), \pi \cos(\pi t), 1)$, y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(\pi^2 \operatorname{sen}^2(\pi t) + \pi^2 \cos^2(\pi t) + 1)} = \sqrt{(\pi^2 + 1)}$, constante. $\vec{X}$ es C^1, inyectiva (la tercera componente es t) y $\vec{X}' \neq \vec{0}$: parametrización regular de Γ.
Cuenta: $L = \int_{-1}^{1} \sqrt{(\pi^2 + 1)}\,dt = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot t\,|_{-1}^{1} = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot (1 - (-1)) = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)}$.
Resultado: $L = \boldsymbol{2\sqrt{(\pi^2 + 1)}} \approx 6{,}594$.
Trampa: la derivada de cos(πt) y de sen(πt) lleva el factor π. Si te lo olvidás, la rapidez da √2 y $L = 2\sqrt{2}$, que está mal. Y el tramo sale de la región D, no de pedir $0 \leq \pi t \leq 2\pi$.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(y), xh'(y) + \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$
recorrido en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D \text{ horario}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{16/3}$.

Planteo: $D = \{x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$. Las parábolas se cortan donde $x^2 = 2 - x^2$, o sea $x = \pm 1$, en (−1, 1) y (1, 1); entonces $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$, una región compacta y elemental cuyo borde (dos arcos de parábola) es una curva cerrada, simple y C^1 a trozos.
Hipótesis de Green: $P = y^2 + h(y)$ es C^1 porque $h \in C^2$; $Q = x\,h'(y) + \cos(y)$ es C^1 porque $h' \in C^1$ (por eso piden $h \in C^2$ y no sólo C^1). Los dos son C^1 en todo $\mathbb{R}^2$.
Rotor: $P'_y = 2y + h'(y)$, $Q'_x = h'(y)$. Entonces $\boldsymbol{Q'_x - P'_y = -2y}$. (Otra forma: $(h(y), x\,h'(y)) = \nabla(x\,h(y))$ es un gradiente y no aporta circulación sobre una curva cerrada.)
Orientación: se pide **sentido horario**, el negativo para Green: arriba por $y = 2 - x^2$ de izquierda a derecha y abajo por $y = x^2$ de derecha a izquierda. Por eso $\oint_{\text{horario}} = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.

Cuenta: $-\iint_D(-2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} 2y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}[y^2]_{x^2}^{2-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}((2-x^2)^2 - x^4)\,dx = \int_{-1}^{1}(4 - 4x^2)\,dx = [4x - \frac{4x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.
Resultado: $\oint \vec{f}\cdot d\vec{s}$ = **16/3**.
Trampa: el sentido horario cambia el signo de Green; con el antihorario daría –16/3. Y ojo con la derivada de x h′(y) respecto de x: es h′(y), no h″(y).

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (9y, -x)$ que pasa por (0, 1) y está contenida en el semiplano $x - 3y \le 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

Respuesta: Γ: $x^2 + 9y^2 = 9$ con $x - 3y \le 0$, de extremos $P_2 = (-3\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $P_1 = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Recorrida en el sentido del campo $\vec{g}$ (horario: de P_2 a P_1 pasando por (–3, 0) y (0, 1)), la circulación es $2\sqrt{2}$; en el sentido opuesto, $-2\sqrt{2}$.

Línea de campo: tangente paralelo a $\vec{g}$: $x' = 9y$, $y' = -x$ (como EDO: $dy/dx = -x/(9y)$, separable: $9y\,dy = -x\,dx$). Entonces $xx' + 9yy' = 9xy - 9xy = 0 \Rightarrow$ **$x^2 + 9y^2 = C$**; por (0, 1): C = 9.
El recorte: la recta x = 3y pasa por el centro de la elipse y la corta donde $9y^2 + 9y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}/2$, $x = 3y$: $P_1 = (3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $P_2 = (-3\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. El semiplano $x - 3y \le 0$ contiene a (0, 1) ($0 - 3 \le 0$), así que Γ es la media elipse "de arriba de la recta", que pasa por (–3, 0) y (0, 1). Parametrización: $\vec{X}(t) = (3\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [-3\pi/4, \pi/4]$ (en $t = -3\pi/4$ está P_2, en $t = -\pi/2$ está (–3, 0), en $t = 0$ está (0, 1), en $t = \pi/4$ está P_1).
Sentido elegido (gráfico): el de la línea de campo: $\vec{X}'(t) = (3\cos t, -\operatorname{sen} t) = \vec{g}(\vec{X}(t))/3$. En (0, 1) el campo es (9, 0), hacia la derecha: la elipse se recorre en **sentido horario**, saliendo de P_2 (abajo a la izquierda), subiendo por (–3, 0), pasando por (0, 1) hacia la derecha y llegando a P_1.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 2xy = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = x + xy^2 \Rightarrow \varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + h(y)$; $\varphi'_y = x^2y + h' = 2 + x^2y \Rightarrow h = 2y$. **$\varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + 2y$**.
Circulación: en los dos extremos $x^2 = 9/2$ e $y^2 = 1/2$, así que los dos primeros términos valen lo mismo (9/4 + 9/8) y sólo cuenta 2y: $\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = 2(\sqrt{2}/2) - 2(-\sqrt{2}/2) =$ **$2\sqrt{2}$**. En sentido antihorario (de P_1 a P_2) da $-2\sqrt{2}$.
Trampa: el semiplano no es "y ≥ 0": la recta de corte es x = 3y y los extremos no están sobre los ejes. Y hay que dibujar y decir el sentido, porque cambia el signo.

10/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \le 18,\ y \ge 0,\ z \ge 1\}$.

> **Respuesta:** $\iiint_H yz\,dx dy dz = 18/5$.
>
> **Planteo:** integrar yz sobre $H = \{x^2 + y^2 + 9z^2 \le 18,\ y \ge 0,\ z \ge 1\}$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 9z^2 = 18$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 9$ (circunferencia de radio 3). $z \ge 1$ deja el casquete de arriba, entre $z = 1$ y la punta $z = \sqrt{2}$, e $y \ge 0$ se queda con la mitad. Cada tajada $z = cte$ es el medio disco $x^2 + y^2 \le 18 - 9z^2$, $y \ge 0$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. $y \ge 0$ es $\text{sen}\,\theta \ge 0$: $0 \le \theta \le \pi$.
> Rangos: $1 \le z \le \sqrt{2}$, $0 \le r \le \sqrt{(18 - 9z^2)}$, $0 \le \theta \le \pi$. El integrando con el jacobiano queda $z\,r^2\,\text{sen}\,\theta$.
> **Cuenta (por tajadas):** para z fijo, $\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta = 2$ y $\int_0^{R} r^2\,dr = \frac{R^3}{3}$, con $R = \sqrt{(18 - 9z^2)}$. Queda $\frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} z(18 - 9z^2)^{3/2}\,dz$. Con $u = 18 - 9z^2$, $du = -18z\,dz$; $z = 1 \mapsto u = 9$, $z = \sqrt{2} \mapsto u = 0$: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}\int_0^{9} u^{3/2}\,du = \frac{1}{27}\cdot\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^{9} = \frac{1}{27}\cdot\frac{486}{5} = \frac{18}{5}$.
> **Resultado:** $\iiint_H yz\,dV = \mathbf{\frac{18}{5}}$.
> **Control (orden dz dr dθ):** $0 \le r \le 3$ y $1 \le z \le \frac{\sqrt{(18 - r^2)}}{3}$. En z: $\left[\frac{z^2}{2}\right] = \frac{18 - r^2}{18} - \frac{9}{18} = \frac{9 - r^2}{18}$.
> Queda $2\int_0^3 r^2\cdot\frac{9 - r^2}{18}\,dr = \frac{1}{9}\left[3r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left(81 - \frac{243}{5}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{162}{5} = \frac{18}{5}$ ✓.
> **Trampa:** $y = r\,\text{sen}\,\theta$ hace que la integral en θ dé 2 y no π; y con el jacobiano el integrando lleva r^2, no r. En la sustitución, cuidado con que los límites se dan vuelta (u = 9 abajo pasa a ser el de arriba al cambiar el signo).

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f}\cdot\vec{ds}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 + \varphi(x),\ 3x^2y^2z^2 + x,\ 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(3, 0, 0) \to (0, 3, 0) \to (0, 0, 3) \to (3, 0, 0)$ (antihorario visto desde el primer octante, normal $(1, 1, 1)$): $\int_C \vec{f}\cdot\vec{ds} = 9/2$. En el sentido contrario, $-9/2$.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = 2xy^3z^2 + \varphi(x)$, $Q = 3x^2y^2z^2 + x$, $R = 2x^2y^3z$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$. C es el borde del triángulo Σ de vértices $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $D = (0, 0, 3)$ (los cortes del plano con los ejes): es cerrada y suave a trozos, tres segmentos.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 6x^2y^2z - 6x^2y^2z = 0$; $P'_z - R'_x = 4xy^3z - 4xy^3z = 0$; $Q'_x - P'_y = (6xy^2z^2 + 1) - (6xy^2z^2) = 1$. **$\text{rot}\,\vec{f} = (0, 0, 1)$**: $\varphi(x)$ no aporta porque su derivada respecto de y (y de z) es 0. Mirado de otra forma, $\vec{f} = \nabla(x^2y^3z^2) + (\varphi(x), x, 0)$, y la parte de gradiente no circula sobre una curva cerrada.

Hipótesis del teorema del rotor: $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$; Σ es un trozo de plano (suave, orientable, acotada) cuyo borde es C. Uso la propia Σ, que ya es la superficie más cómoda con ese borde: plana y de normal constante.
Orientación: escribo Σ como $z = 3 - x - y$ sobre el triángulo T: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$, y tomo la normal hacia arriba, $\vec{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$. Regla de la mano derecha: con el pulgar en (1, 1, 1), los dedos recorren el borde **A** → **B** → **D** → **A**, que visto desde el primer octante (desde un punto como (5, 5, 5) mirando al origen) es antihorario. En el gráfico: flechas de (3, 0, 0) a (0, 3, 0), de ahí a (0, 0, 3) y de vuelta a (3, 0, 0).
Cuenta: $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{N} = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 1$, así que $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = \iint_T 1 \, dx \, dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} dy \, dx = \int_0^3 (3 - x) \, dx = [3x - x^2/2]_0^3 = 9 - 9/2 = 9/2$.
Resultado: recorriendo A → B → D → A, $\boldsymbol{\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 9/2}$ (en el sentido contrario, −9/2).
Trampa: no hace falta conocer φ ni pelearse con $2xy^3z^2$: el rotor los mata. Si lo hacés por segmentos, la parte con φ en cada tramo depende sólo de los extremos y se cancela al cerrar la vuelta; pero entonces tenés que parametrizar los tres lados con el sentido correcto, que es donde más se pierden puntos.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación
$\vec{X} = (\operatorname{sen}(\pi t), \cos(\pi t), t)$, $t \in \mathbb{R}$
contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4$. Calcule la longitud de Γ.

Respuesta: Γ: $t \in [-1, 1]$. $L = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)} \approx 6{,}594$.

Planteo: la longitud es $L = \int_\Gamma ds = \int \|\vec{X}'(t)\| \, dt$ sobre el intervalo de t para el cual $\vec{X}(t)$ está en D.
Qué tramo está en D: reemplazando X(t) en la desigualdad: $x^2 + y^2 + 3z^2 = \operatorname{sen}^2(\pi t) + \cos^2(\pi t) + 3t^2 = 1 + 3t^2$. Entonces $1 + 3t^2 \leq 4 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$. Γ es una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que va de $\vec{X}(-1) = (0, -1, -1)$ a $\vec{X}(1) = (0, -1, 1)$: da una vuelta entera, porque πt recorre $[-\pi, \pi]$.
Rapidez: por la regla de la cadena $\vec{X}'(t) = (\pi \cos(\pi t), -\pi \operatorname{sen}(\pi t), 1)$, y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(\pi^2 \operatorname{sen}^2(\pi t) + \pi^2 \cos^2(\pi t) + 1)} = \sqrt{(\pi^2 + 1)}$, constante. $\vec{X}$ es C^1, inyectiva (la tercera componente es t) y $\vec{X}' \neq 0$: parametrización regular de Γ.
Cuenta: $L = \int_{-1}^1 \sqrt{(\pi^2 + 1)} \, dt = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot t \,|_{-1}^1 = \sqrt{(\pi^2 + 1)} \cdot (1 - (-1)) = 2\sqrt{(\pi^2 + 1)}$.
Resultado: $L = \boldsymbol{2\sqrt{(\pi^2 + 1)}} \approx 6{,}594$.
Trampa: la derivada de cos(πt) y de sen(πt) lleva el factor π. Si te lo olvidás, la rapidez da √2 y $L = 2\sqrt{2}$, que está mal. Y el tramo sale de la región D, no de pedir $0 \leq \pi t \leq 2\pi$.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(y) - y^2, xh'(y) - \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3 - x^2\}$
recorrido en sentido horario.

Respuesta: $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -64/5$ (horario).

Planteo: $P = h(y) - y^2$, $Q = xh'(y) - \cos(y)$, con $h \in C^2(\mathbb{R})$. Sin conocer h no se puede parametrizar: Green.
La región: $2x^2 \leq 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1$, así que $D = \{-1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 3 - x^2\}$, entre la parábola de abajo $y = 2x^2$ y la de arriba $y = 3 - x^2$, que se cortan en (±1, 2).
Hipótesis del teorema: $h \in C^2$ implica $h' \in C^1$, entonces $Q = xh'(y) - \cos y$ es C^1; P también. $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$. D es una región elemental y su borde (dos arcos de parábola) es cerrado, simple y suave a trozos. El sentido pedido es **horario** (negativo): $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dA$.
Rotor: $Q'_x = h'(y)$, $P'_y = h'(y) - 2y$, $Q'_x - P'_y = 2y$ (la h se va: $(h(y), xh'(y)) = \nabla(x\,h(y))$).
Doble integral: $\iint_D 2y \, dA = \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{3-x^2} 2y \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [y^2]_{2x^2}^{3-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 (9 - 6x^2 + x^4 - 4x^4) \, dx =$

$2[9x - 2x^3 - 3x^5/5]_0^1 = 2(9 - 2 - 3/5) = 64/5$.
Resultado: por el sentido horario, $\oint_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-64/5}$.
Control (la otra cara): $(h(y), xh'(y)) = \nabla(x\,h(y))$ y $(0, -\cos y) = \nabla(-\operatorname{sen} y)$ no aportan; queda $\oint -y^2\,dx$. Antihorario: abajo $y = 2x^2$, x de -1 a 1: $\int_{-1}^{1} -4x^4\,dx = -8/5$; arriba $y = 3 - x^2$, x de 1 a -1: $\int_{1}^{-1} -(3 - x^2)^2\,dx = 72/5$. Total $64/5$, y en horario $-64/5$ ✓.
Trampa: la hipótesis $h \in C^2$ no es decorativa: es la que garantiza que Q (que tiene h') sea C^1, y hay que decirlo para poder usar Green.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por $(1, 0)$ y está contenida en el semiplano $3x - y \geq 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

Respuesta: Γ: $9x^2 + y^2 = 9$ con $3x - y \geq 0$, de extremos $Q_2 = (-\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$ y $Q_1 = (\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$. Recorrida en el sentido del campo $\vec{g}$ (antihorario: de Q_2 a Q_1 pasando por $(0, -3)$ y $(1, 0)$), la circulación es $6\sqrt{2}$; en el sentido opuesto, $-6\sqrt{2}$.

Línea de campo: tangente paralelo a $\vec{g}$: $x' = -y$, $y' = 9x$ (como EDO: $dy/dx = -9x/y$, separable: $y\,dy = -9x\,dx$). Entonces $9xx' + yy' = -9xy + 9xy = 0 \Rightarrow \mathbf{9x^2 + y^2 = C}$; por $(1, 0)$: $C = 9$.
El recorte: la recta $y = 3x$ pasa por el centro y corta la elipse donde $9x^2 + 9x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2$, $y = 3x$: $Q_1 = (\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ y $Q_2 = (-\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$. El semiplano $3x - y \geq 0$ contiene a $(1, 0)$ $(3 \geq 0)$, así que Γ es la media elipse "a la derecha de la recta", que pasa por $(0, -3)$ y $(1, 0)$. Parametrización: $\vec{X}(t) = (\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $t \in [-3\pi/4, \pi/4]$ ($t = -3\pi/4$: Q_2; $t = -\pi/2$: $(0, -3)$; $t = 0$: $(1, 0)$; $t = \pi/4$: Q_1).
Sentido elegido (gráfico): el de la línea de campo: $\vec{X}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 3\cos t) = \vec{g}(\vec{X}(t))/3$. En $(1, 0)$ el campo es $(0, 9)$, hacia arriba: **sentido antihorario**, saliendo de Q_2 (abajo a la izquierda), bajando a $(0, -3)$, pasando por $(1, 0)$ hacia arriba y llegando a Q_1.
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ es C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $Q'_x = 2xy = P'_y$. Potencial: $\varphi'_x = x + xy^2 \Rightarrow \varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + h(y)$; $\varphi'_y = x^2y + h' = 2 + x^2y \Rightarrow h = 2y$. $\boldsymbol{\varphi = x^2/2 + x^2y^2/2 + 2y}$.
Circulación: en los dos extremos $x^2 = 1/2$ e $y^2 = 9/2$, así que los dos primeros términos valen lo mismo $(1/4 + 9/8)$ y sólo cuenta $2y$: $\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2) = 2(3\sqrt{2}/2) - 2(-3\sqrt{2}/2) = \mathbf{6\sqrt{2}}$. En sentido horario (de Q_1 a Q_2) da $-6\sqrt{2}$.
Trampa: el semiplano lo define la recta $y = 3x$, no el eje y: los extremos son Q_1 y Q_2, no $(0, \pm 3)$. Y sin indicar el sentido la respuesta no está completa.

9/11/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(y + 2x)}{\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}}$.

Exprese el dominio natural de f mediante ecuaciones y/o inecuaciones, grafíquelo e indique si es abierto o cerrado. Represente en otro gráfico su frontera.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 2x > 0,\ 9x^2 + y^2 < 9\}$: la parte del interior de la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$ que está por encima de la recta $y = -2x$. D es abierto y no es cerrado. $\partial D = \{9x^2 + y^2 = 9,\ y + 2x \geq 0\} \cup \{y = -2x,\ -3/\sqrt{13} \leq x \leq 3/\sqrt{13}\}$.
>
> **Condiciones:** $\ln(y + 2x)$ pide $y + 2x > 0$. $\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}$ está en el denominador: pide $9 - 9x^2 - y^2 \geq 0$ por la raíz y $\neq 0$ por el cociente, o sea $9x^2 + y^2 < 9 \iff x^2 + y^2/9 < 1$, el interior de la elipse de centro el origen, semieje 1 en x y 3 en y.
> **D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -2x,\ x^2 + y^2/9 < 1\}$.
> **Cortes de $y = -2x$ con la elipse:** $9x^2 + 4x^2 = 9 \implies x = \pm 3/\sqrt{13}$: puntos $(3/\sqrt{13}, -6/\sqrt{13})$ y $(-3/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13})$.
> **Gráfico:** la región de la elipse a la derecha de la recta $y = -2x$ (contiene a $(1/2, 0)$). Todo el borde va en punteado: el arco de elipse de $(-3/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13})$ a $(3/\sqrt{13}, -6/\sqrt{13})$ pasando por $(0, 3)$ y $(1, 0)$, y la cuerda sobre $y = -2x$.
> **¿Abierto?** Sí: con $g_1 = y + 2x$ y $g_2 = 9 - 9x^2 - y^2$ continuas, $D = g_1^{-1}((0, +\infty)) \cap g_2^{-1}((0, +\infty))$, intersección de dos abiertos.
> **¿Cerrado?** No: $(0, 3)$ es punto frontera (los $(0, 3 - \varepsilon)$ están en D) y no es de D porque anula la raíz del denominador. (También: en $\mathbb{R}^2$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^2$, y D no es ninguno de los dos.)
> **Frontera** (otro gráfico, en trazo lleno): $\partial D = \{9x^2 + y^2 = 9,\ y + 2x \geq 0\} \cup \{y = -2x,\ -3/\sqrt{13} \leq x \leq 3/\sqrt{13}\}$, el arco más la cuerda, con los dos puntos de corte incluidos. Como D es abierto, $\partial D \cap D = \emptyset$.
> **Trampa:** la raíz en el denominador exige radicando > 0 estricto. Si se pone ≥ 0, el borde de la elipse queda adentro y se concluye mal que D no es abierto.

Ejercicio 2. Sea

$f(x, y) = y^3 - 6\mathbf{a}^2xy + 3\mathbf{a}x^2y$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Halle el o los valores de **a** para que f tenga un punto crítico en $(1, 1)$ y clasifíquelo para cada valor hallado.

> **Respuesta:** Sólo $a = 1$. Para $a = 1$, $(1, 1)$ es mínimo relativo, de valor $f(1, 1) = -2$.
>
> **Planteo:** f es polinómica en (x, y) para cada a, así que es C^∞ en $\mathbb{R}^2$. $(1, 1)$ es punto crítico si y sólo si $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$.
> **Gradiente:** $f'_x = -6a^2y + 6axy$, $f'_y = 3y^2 - 6a^2x + 3ax^2$.
> **Evaluado en (1, 1):** $f'_x(1, 1) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$, que se anula para $a = 0$ o $a = 1$. $f'_y(1, 1) = 3 - 6a^2 + 3a = -3(2a^2 - a - 1) = -3(a - 1)(2a + 1)$, que se anula para $a = 1$ o $a = -1/2$.
> **Las dos a la vez:** el único valor común es **a = 1**. Control de los descartados: con $a = 0$, $f'_y(1, 1) = 3 \neq 0$; con $a = -1/2$, $f'_x(1, 1) = -6 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) = -9/2 \neq 0$.

Hessiano: $f''_{xx} = 6ay$, $f''_{xy} = -6a^2 + 6ax$, $f''_{yy} = 6y$. Con $a = 1$ en $(1, 1)$: $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.
Clasificación: $\det H = 36 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**. Con $a = 1$, $f = y^3 - 6xy + 3x^2y$, y su valor es **$f(1, 1) = 1 - 6 + 3 = -2$**.
Trampa: cada ecuación por separado da dos valores de a; sólo sirve el que anula *las dos*. Si te quedás con $a = 0$ o $a = -1/2$, $(1, 1)$ ni siquiera es punto crítico.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4 = 0$
define implícitamente en un entorno del punto $(-1, 1, 2)$ a $z = f(x, y)$ con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en $A = (-1, 1)$ alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Respuesta: $\nabla f(-1, 1) = (-1, -2)$. Máximo $\sqrt{5}$, en la dirección $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = 2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4$, $P = (-1, 1, 2)$, queremos $z = f(x, y)$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 0 + 1 \cdot 4 - 4 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = 2 \operatorname{sen}(x + y) + 2yz$, $F_z(P) = 0 + 4 = 4 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $A = (-1, 1)$, con $f(A) = 2$.
Derivadas: $F_x = 2z \cos(x + y)$, $F_x(P) = 4$. $F_y = 2z \cos(x + y) + z^2$, $F_y(P) = 4 + 4 = 8$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -1$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -2$. **$\nabla f(A) = (-1, -2)$**.
Derivada direccional: como f es C^1, es diferenciable en A, y entonces para todo versor $\check{v}$ vale $f'(A, \check{v}) = \nabla f(A) \cdot \check{v}$. Por Cauchy-Schwarz, $\nabla f \cdot \check{v} = \|\nabla f\| \cos\theta$, con θ el ángulo entre ∇f y $\check{v}$. El máximo es con $\theta = 0$: dirección **$\check{v} = \nabla f / \|\nabla f\| = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$**, y el máximo vale **$\|\nabla f(A)\| = \sqrt{5}$**.
Trampa: el valor máximo de la derivada direccional es positivo ($\|\nabla f\| > 0$ si $\nabla f \neq 0$), aunque el versor tenga componentes negativas.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{h}(r, s)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, donde $\vec{h} = \vec{F} \circ \vec{g}$ con $\vec{g}(r, s) = (r + s, r - s, s^2)$ y $\vec{F}(u, v, w) = (v, u + v, u^2 + v^2 + w)$.
Halle una ecuación del plano tangente a Σ en $P = \vec{h}(0, 1)$.

Respuesta: $P = (-1, 0, 3)$; $\vec{h}_r = (1, 2, 0)$, $\vec{h}_s = (-1, 0, 6)$, $\vec{N} = (12, -6, 2) \parallel (6, -3, 1)$. Plano tangente: $6x - 3y + z = -3$.

Punto: $\vec{g}(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1, 1) = (1, -1, 1)$ y $P = \vec{F}(1, -1, 1) = (-1, 1 - 1, 1 + 1 + 1) =$ **$(-1, 0, 3)$**.
Hipótesis: $\vec{g}$ y $\vec{F}$ son polinómicas, diferenciables; vale $D\vec{h}(0, 1) = D\vec{F}(1, -1, 1) \cdot D\vec{g}(0, 1)$.
Jacobianas: $D\vec{g}(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2s \end{pmatrix}$, en $(0, 1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D\vec{F}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2u & 2v & 1 \end{pmatrix}$, en $(1, -1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Producto: fila 1: $(1, -1)$; fila 2: $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0)$; fila 3: $2(1, 1) - 2(1, -1) + (0, 2) = (0, 6)$. $D\vec{h}(0, 1) =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$: $\vec{h}_r = (1, 2, 0)$, $\vec{h}_s = (-1, 0, 6)$.

Normal: $\vec{h}_r \times \vec{h}_s = (2\cdot 6 - 0\cdot 0,\ 0\cdot(-1) - 1\cdot 6,\ 1\cdot 0 - 2\cdot(-1)) = (12, -6, 2) \neq \vec{0}$, así que P es punto regular de Σ. Usamos $n = (6, -3, 1)$.

Plano: $6(x + 1) - 3(y - 0) + (z - 3) = 0$, o sea **$6x - 3y + z = -3$**. Control: $-6 - 0 + 3 = -3$ ✓.

Control alternativo: componiendo a mano, $\vec{h}(r, s) = (r - s, 2r, 2r^2 + 3s^2)$; $\vec{h}_r = (1, 2, 4r)$ y $\vec{h}_s = (-1, 0, 6s)$, que en $(0, 1)$ dan lo mismo.

Trampa: evaluar $D\vec{F}$ en $(0, 1)$ (el punto de los parámetros) en vez de en $\vec{g}(0, 1) = (1, -1, 1)$.

Ejercicio 5. Halle el o los puntos de la curva C definida por las ecuaciones
$\{ x^2 + y^2 = 1 ; x + y + z = 1 \}$,
para los cuales la recta tangente a C en ellos es paralela al plano yz.

Respuesta: $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 2)$.

Parametrización: la proyección de C sobre el plano xy es $x^2 + y^2 = 1$, así que $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, y del plano $z = 1 - x - y$. Queda $\vec{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi)$, de clase C^1.

Vector tangente: $\vec{g}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t - \cos t)$. Nunca es nulo (sus dos primeras componentes no se anulan a la vez), así que C es regular y en cada punto hay recta tangente.

Condición: la recta es paralela al plano yz si su dirección es perpendicular a la normal de ese plano, $(1, 0, 0)$: $\vec{g}'(t)\cdot(1, 0, 0) = -\operatorname{sen} t = 0$, o sea $t = 0$ o $t = \pi$.

Resultado: $\vec{g}(0) =$ **$(1, 0, 0)$**, con dirección $(0, 1, -1)$, y $\vec{g}(\pi) =$ **$(-1, 0, 2)$**, con dirección $(0, -1, 1)$. Las dos direcciones tienen componente x nula ✓.

Control con gradientes: $(2x, 2y, 0) \times (1, 1, 1) = (2y, -2x, 2x - 2y)$; la primera componente se anula si $y = 0$, y entonces $x = \pm 1$ y $z = 1 - x$: los mismos dos puntos ✓.

Trampa: "paralela al plano yz" no es "paralela al eje x", es justo lo contrario. La condición es que la componente x de la dirección sea 0, no que la dirección sea $(1, 0, 0)$.

21/10/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$. Es abierto, no es cerrado, no es acotado y no es conexo (dos componentes: $y > x^2$ e $y < x^2$). b) Nivel 0: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ sin los puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2) \approx (\pm 1{,}59;\ 2{,}54)$.
>
> **a) Condición:** el numerador es un polinomio (definido en todo $\mathbb{R}^2$); sólo molesta el denominador: $y - x^2 \neq 0$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, el plano sin la parábola $y = x^2$.
> **Gráfico:** todo el plano sombreado, con la parábola de vértice (0, 0) que abre hacia arriba dibujada en punteado (excluida). La parábola parte a D en dos pedazos: el de adentro ($y > x^2$, contiene a (0, 1)) y el de afuera ($y < x^2$, contiene a (0, –1)).
> **Abierto:** sí. $g(x, y) = y - x^2$ es continua y $D = \{g > 0\} \cup \{g < 0\}$, unión de dos abiertos (preimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ por una función continua). Equivalente: ∂D es la parábola y ningún punto de ella está en D.
> **Cerrado:** no. (0, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos como $(0, -\varepsilon)$ en D y el propio (0, 0), que no está) y no pertenece a D. D no contiene a su frontera, que es toda la parábola.
> **Acotado:** no: contiene a todos los puntos $(0, -n)$, $n \in \mathbb{N}$, de norma tan grande como quieras.
> **Conexo:** no. $g(x, y) = y - x^2$ es continua en D, nunca se anula ahí y vale 1 en (0, 1) y –1 en (0, –1). Si una curva continua dentro de D uniera esos dos puntos, g sobre la curva pasaría de positivo a negativo y por Bolzano se anularía en algún punto de D: absurdo. D tiene dos componentes, $\{y > x^2\}$ e $\{y < x^2\}$.
> **b) Nivel 0 (otro gráfico):** $f = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = 0$ con $(x, y) \in D$: la circunferencia de centro (0, 0) y radio 3, menos los puntos donde la corta la parábola (ahí f no está definida).
> **Cortes:** reemplazando $x^2 = y$ en $x^2 + y^2 = 9$ queda $y^2 + y - 9 = 0$, $y = (-1 \pm \sqrt{37})/2$. Como $y = x^2 \geq 0$, sirve sólo $y_0 = (\sqrt{37} - 1)/2 \approx 2{,}54$, con $x = \pm\sqrt{y_0} \approx \pm 1{,}59$.
> **Resultado:** $C_0 = \{x^2 + y^2 = 9\}$ sin los dos puntos $(\pm\sqrt{((\sqrt{37} - 1)/2)}, (\sqrt{37} - 1)/2)$. En el dibujo: la circunferencia de radio 3 con dos puntitos huecos arriba, donde la atraviesa la parábola.
> **Trampa:** dar como nivel 0 la circunferencia entera. En esos dos puntos queda 0/0: f no está definida, así que no pueden estar en ningún conjunto de nivel.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$.

Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

> **Respuesta:** $h(2, -3) = 0$, $\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$, $\nabla h(2, -3) = (-2, 4)$. Plano tangente: $z = -2x + 4y + 16$ (o sea $2x - 4y + z = 16$).
>
> **Hipótesis:** $\vec{g}$ es C^1, luego diferenciable en (2, –3). $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$ es C^1 en el semiplano abierto $y > 0$, que contiene a $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$; por lo tanto f es diferenciable en (2, 1). Entonces $h = f \circ \vec{g}$ es diferenciable en (2, –3) y vale la regla de la cadena en forma matricial: $Dh(2, -3) = Df(2, 1) \cdot D\vec{g}(2,$

-3).

f y su gradiente en (2, 1): $f(2, 1) = 2 \ln 1 + \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 0 = 0$. $f_x = \ln y + \frac{2}{3}x(1 - y)$, que en (2, 1) da $0 + 0 = 0$; $f_y = x/y - \frac{1}{3}x^2$, que en (2, 1) da $2 - 4/3 = 2/3$. $\nabla f(2, 1) = (0, 2/3)$.

Cadena: $\nabla h(2, -3) = (0, 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = (0\cdot 1 + (2/3)(-3), 0\cdot 2 + (2/3)\cdot 6) = \mathbf{(-2, 4)}$. Y $h(2, -3) = f(\vec{g}(2, -3)) = f(2, 1) = 0$.

Plano tangente: $z = 0 - 2(x - 2) + 4(y + 3)$, es decir $\mathbf{z = -2x + 4y + 16}$ (equivalente: $2x - 4y + z = 16$).

Trampa: f se deriva y evalúa en $(2, 1) = \vec{g}(2, -3)$, no en $(2, -3)$ (ahí $\ln(-3)$ ni existe). Y el orden del producto importa: es el gradiente (fila) por la jacobiana, $(0, 2/3)\cdot D\vec{g}$; multiplicar la matriz por la columna da $(4/3, 4)$, que está mal.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Respuesta: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$ y $f'(P, \check{v}) = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.

Planteo: $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6$ y $F_2 = x^2 + z^2 - y$. $P = (1, 2, -1)$ está en C: $1 + 4 + 1 = 6$ y $1 + 1 = 2$ ✓.

Gradientes en P: $\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z) \to (2, 4, -2) \parallel (1, 2, -1)$; $\nabla F_2 = (2x, -1, 2z) \to (2, -1, -2)$. Son C^1 y no paralelos, así que C es regular en P y su tangente es perpendicular a ambos.

Tangente: $(1, 2, -1) \times (2, -1, -2) = (2\cdot(-2) - (-1)(-1), (-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2), 1\cdot(-1) - 2\cdot 2) = (-5, 0, -5) \parallel (1, 0, 1)$.

Sentido y versor: la tangente tiene dos sentidos, $\pm(1, 0, 1)$; el de coordenada x negativa es $(-1, 0, -1)$. La derivada direccional se toma sobre versores, así que se normaliza: $\check{v} = (-1, 0, -1)/\sqrt{2}$.

Diferenciabilidad: $f = xy^2 + yz$ es polinómica, por lo tanto diferenciable en $\mathbb{R}^3$, y entonces $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P)\cdot\check{v}$.

Gradiente de f: $\nabla f = (y^2, 2xy + z, y) \to \nabla f(P) = (4, 4 - 1, 2) = (4, 3, 2)$.

Cuenta: $f'(P, \check{v}) = (4\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1))/\sqrt{2} = -6/\sqrt{2} = \mathbf{-3\sqrt{2}}$.

Trampa: usar $(-1, 0, -1)$ sin normalizar (da -6) o quedarse con el sentido $(1, 0, 1)$ (da $+3\sqrt{2}$). Y antes de usar la fórmula del gradiente hay que decir que f es diferenciable.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u\cos(v), u, u\,\mathrm{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Respuesta: L: $(x, y, z) = (0, 2, 2) + s(0, -1, 1)$. No tiene puntos en común con la curva (el sistema es incompatible).

Parámetros del punto: $\vec{\varphi}(u, v) = (0, 2, 2)$ pide $u = 2$ (segunda coordenada), $\cos v = 0$ y $\mathrm{sen}\, v = 1$, o sea $v = \pi/2$, que está en $[0, \pi]$ (y $u = 2$ en $[1, 3]$).

Normal: $\vec{\varphi}_u = (\cos v, 1, \mathrm{sen}\, v) = (0, 1, 1)$, $\vec{\varphi}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v, 0, u\cos v) = (-2, 0, 0)$ en $(2, \pi/2)$. Producto vectorial: $(1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot(-2) - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot(-2)) = (0, -2, 2) \neq \vec{0}$: el punto es regular. Director de L: $(0, -1, 1)$.

Control geométrico: Σ está sobre el cono $x^2 + z^2 = y^2$, cuyo gradiente $(2x, -2y, 2z)$ en $(0, 2, 2)$ es $(0, -4, 4) \parallel (0, -1, 1)$ ✓.

Recta normal: L: $(x, y, z) = (0, 2 - s, 2 + s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Intersección con la curva: igualamos $(0, 2 - s, 2 + s) = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$. Primera coordenada: $t = 3$. Tercera: $2 + s = 2$, $s = 0$. Segunda: $2 - 0 = 2$ contra $t^2 + 1 = 10$. Contradicción: el sistema no tiene

solución.

Resultado: L y la curva no tienen ningún punto en común. (El único punto de la curva con $x = 0$ es $(0, 10, 2)$, que no está en L.)

Trampa: usar el mismo parámetro para la recta y la curva. Tienen que ser parámetros distintos (s y t); con uno solo, el sistema cambia y podés sacar una conclusión falsa.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en $(1/2, 0)$ un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

Respuesta: $b = 2$ y $a > 0$ (cualquier a positivo). En $(1/2, 0)$ hay un mínimo local, de valor $f(1/2, 0) = -3/8$. Si $a < 0$ (con $b = 2$) el punto es silla.

Condición necesaria: f es polinómica, diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y $(1/2, 0)$ es interior; si allí hay extremo local, $\nabla f(1/2, 0) = (0, 0)$.

Derivadas: $f_x = ay^2 + 4bx^3 - 1$, $f_y = 2axy$.

En el punto: $f_x(1/2, 0) = 4b\cdot(1/8) - 1 = b/2 - 1 = 0$, así que **$b = 2$**. $f_y(1/2, 0) = 2a\cdot(1/2)\cdot 0 = 0$ vale para todo a: la primera condición no dice nada de a.

Hessiano: $f_{xx} = 12bx^2 = 12\cdot 2\cdot(1/4) = 6$; $f_{xy} = 2ay = 0$; $f_{yy} = 2ax = a$. $H(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\det H = 6a$.

Casos ($a \neq 0$): si **$a > 0$**, $\det H = 6a > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**. Si $a < 0$, $\det H < 0$: punto silla, no hay extremo.

Valor: $f(1/2, 0) = 0 + 2\cdot(1/16) - 1/2 = 1/8 - 1/2 =$ **$-3/8$** (no depende de a).

Resultado: $b = 2$, $a > 0$, mínimo local de valor $-3/8$.

Trampa: quedarse con $\nabla f = 0$ y contestar "b = 2, a cualquiera". Anular el gradiente es necesario pero no suficiente: con $a < 0$ el punto es crítico y es silla. (El caso $a = 0$, que daría $\det H = 0$, lo excluye el enunciado al pedir valores no nulos.)

19/10/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (1 + \ln(xy), \sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** 1. $D = \{(x, y) : xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1\}$: la elipse llena de centro (1, 0) y semiejes 2 y 1, sólo en el primer y el tercer cuadrante (ejes excluidos). Frontera: en el 1er cuadrante, el arco de elipse de $(0, \sqrt{3}/2)$ a (3, 0) con los segmentos de los ejes $[0, 3] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, \sqrt{3}/2]$; en el 3ro, el arco de (–1, 0) a $(0, -\sqrt{3}/2)$ con los segmentos $[-1, 0] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [-\sqrt{3}/2, 0]$. Interior: $\{xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 < 1\}$. 2. No es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo.
>
> **1. Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los de sus componentes. $1 + \ln(xy)$ pide $xy > 0$: x e y del mismo signo, o sea primer o tercer cuadrante, sin los ejes. $\sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)}$ pide $3 - x^2 + 2x - 4y^2 \geq 0$.
> **Completar cuadrados:** $3 - x^2 + 2x - 4y^2 = 4 - (x - 1)^2 - 4y^2$, así que la condición es $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1$: elipse llena (con borde) de centro (1, 0), semieje 2 en x y 1 en y. Va de $x = -1$ a $x = 3$ y corta el eje y donde $1/4 + y^2 = 1$, en $(0, \pm\sqrt{3}/2)$.
> **Dominio:** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 \leq 1\}$.
> **Gráfico de D:** dos pedazos de la elipse. Uno grande en el primer cuadrante (de $x = 0$ a $x = 3$, contiene a (1, 1/2)) y uno chico en el tercero (x entre –1 y 0, $y < 0$, contiene a (–1/2, –1/4)). Los arcos de elipse en trazo lleno; los tramos de los ejes en punteado.
> **Frontera (otro gráfico):** en el 1er cuadrante, el arco de elipse de $(0, \sqrt{3}/2)$ a (3, 0) pasando por (1, 1), cerrado por los segmentos $[0, 3] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, \sqrt{3}/2]$; en el 3ro, el arco de (–1, 0) a $(0, -\sqrt{3}/2)$ cerrado por $[-1, 0] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [-\sqrt{3}/2, 0]$. Los dos contornos se tocan en el origen. Pertenecen a D los puntos de los arcos salvo sus extremos (que están sobre los ejes); los segmentos de los ejes no (ahí $xy = 0$).
> **Interior (otro gráfico):** int $D = \{xy > 0, (x - 1)^2/4 + y^2 < 1\}$: los mismos dos pedazos, con todo el borde punteado.
> **2. Abierto:** no. $(1, 1) \in D$ ($xy = 1 > 0$ y $0 + 1 \leq 1$), pero toda bola centrada en él tiene puntos fuera de la elipse.
> **Cerrado:** no. (1, 0) es punto frontera (toda bola centrada en él tiene puntos de D, como $(1, \varepsilon)$) y no pertenece a D ($xy = 0$).
> **Acotado:** sí: D está dentro de la elipse, $|x - 1| \leq 2$ y $|y| \leq 1$.
> **Conexo:** no. La función x es continua, no se anula en D ($xy > 0$ obliga $x \neq 0$) y vale 1 en (1, 1/2) y –1/2 en (–1/2, –1/4). Una curva continua dentro de D que uniera esos puntos tendría abscisa que pasa de positiva a negativa y, por Bolzano, se anularía: absurdo. D tiene dos componentes, la del 1er y la del 3er cuadrante.
> **Trampa:** traducir $xy > 0$ como "$x > 0$ e $y > 0$" y perder el pedazo del tercer cuadrante; justo ese pedazo es el que hace que D no sea conexo. El 1 + de la primera componente no cambia nada.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(x - 2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y + 1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (1, 0) y clasifíquelo.

Respuesta: a = 1, b = 1. En (1, 0) hay punto silla (det H = –20); no hay extremo. f(1, 0) = 8.

Planteo: f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que (1, 0) es crítico si y sólo si $\nabla f(1, 0) = \vec{0}$.

Derivadas: $f'_x = 2a(x - 2) - 6bx^2 + 8$ y $f'_y = 2a + 2b(y + 1) - 4$ (el término 2ay aporta 2a a la derivada en y).

Sistema: en (1, 0): $f'_x = -2a - 6b + 8 = 0$ y $f'_y = 2a + 2b - 4 = 0$, o sea a + 3b = 4 y a + b = 2. Restando: 2b = 2, **b = 1** y **a = 1**.

Hessiano: $f''_{xx} = 2a - 12bx$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2b$. Con a = b = 1, en (1, 0): $H = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, det H = –20 < 0.

Clasificación: det H < 0, así que (1, 0) es un **punto silla**: no hay extremo relativo. El punto silla del gráfico es (1, 0, f(1, 0)) con f(1, 0) = [1 + 0] + [1 – 2] + 8 = 8.

Trampa: "clasifíquelo" no quiere decir que sea extremo: punto silla es una clasificación válida y es la respuesta. Ojo también con perder el 2a de f'_y, que sale de derivar a·2y.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$
define implícitamente una función x = f(y, z) de clase C^1 en un entorno de $(y_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente f(0.95, 0.02) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $x_0 = 1$; $f_y(1, 0) = -1$, $f_z(1, 0) = -3$; f(0.95, 0.02) ≈ 0.99.

Planteo: llamamos $F(x, y, z) = 3zy - \cos(z)x + yx^2$; la ecuación es F = 0 y queremos despejar x en función de (y, z).

Punto: en (y, z) = (1, 0) queda $0 - x + x^2 = 0$, o sea x(x – 1) = 0: x = 0 o x = 1. Como piden $x_0 > 0$, **$x_0 = 1$**, y el punto es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

Derivadas de F: $F'_x = -\cos z + 2xy$, $F'_y = 3z + x^2$, $F'_z = 3y + x \operatorname{sen} z$. En (1, 1, 0): $F'_x = -1 + 2 = 1$, $F'_y = 0 + 1 = 1$, $F'_z = 3 + 0 = 3$.

Hipótesis del TFI: (i) F(1, 1, 0) = 0; (ii) F es suma de productos de polinomios y coseno, así que es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (en particular en un entorno del punto); (iii) $F'_x(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Entonces existe un entorno de (1, 0) y una única x = f(y, z) de clase C^1 ahí, con f(1, 0) = 1 y F(f(y, z), y, z) = 0.

Derivadas de f: $f'_y(1, 0) = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -1/1 = -1$; $f'_z(1, 0) = -\dfrac{F'_z}{F'_x} = -3/1 = -3$.

Aproximación lineal: como f es C^1, es diferenciable en (1, 0) y $f(y, z) \approx f(1, 0) + f'_y(1, 0)(y - 1) + f'_z(1, 0)(z - 0)$. Con (y, z) = (0.95, 0.02): $f(0.95, 0.02) \approx 1 + (-1)(-0.05) + (-3)(0.02) = 1 + 0.05 - 0.06 =$ **0.99**.

Trampa: acá la variable que se despeja es x, así que el denominador es F'_x (no F'_z por costumbre). Y sin descartar x = 0 con la condición $x_0 > 0$ el punto queda mal definido (en x = 0 además $F'_x = -1$, también sirve, pero es otra función).

Ejercicio 4. Sea g(x, y) = f(x + y, x^3y^2) con f(r, s) un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que f(0, 1) = 1 y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (1, –1, g(1, –1)).

Respuesta: $\nabla f(0, 1) = (3, -1)$; g(1, –1) = 1, $\nabla g(1, -1) = (0, 5)$. Plano tangente: z = 1 + 5(y + 1), o sea z = 5y + 6.

∇f con las direccionales: f es C^1, luego diferenciable en (0, 1), así que $f'((0,1), \check{w}) = \nabla f(0,1)\cdot\check{w}$ para todo versor $\check{w}$. Con $\nabla f(0,1) = (a, b)$: por $\check{v}$, $(\sqrt{2}/2)(a + b) = \sqrt{2}$, o sea $a + b = 2$; por $\check{u}$, $(\sqrt{2}/2)(a - b) = 2\sqrt{2}$, o sea $a - b = 4$. Entonces **$\nabla f(0, 1) = (3, -1)$**.
El punto interior: $(x + y, x^3y^2)$ en $(1, -1)$ da $(0, 1\cdot 1) = (0, 1)$ ✓. Entonces $g(1, -1) = f(0, 1) = 1$.
Hipótesis: f ∈ C^1 y la interior es polinómica: g es diferenciable en $(1, -1)$, tiene plano tangente y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (1, –1): $r = x + y$ da $(1, 1)$; $s = x^3y^2$ da $(3x^2y^2, 2x^3y) = (3, -2)$.
Cuenta: $g'_x = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 0$; $g'_y = 3\cdot 1 + (-1)(-2) = 5$. **$\nabla g(1, -1) = (0, 5)$**.
Resultado: $z = 1 + 0\cdot(x - 1) + 5(y + 1)$, es decir **$z = 5y + 6$** (no depende de x).
Trampa: para pasar de derivadas direccionales a gradiente hace falta que f sea diferenciable (acá lo es por ser C^1); sin eso no se puede usar $\nabla f\cdot\check{v}$. Y que g'_x dé 0 no es error: el plano queda paralelo al eje x.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y - 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 - 2y - x + 1 = 0 \ ; \ y - z = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

Respuesta: 1. (1, 2, 1) y (1, 0, –1). 2. En (1, 2, 1): $(1, 2, 1) + \lambda(2, 1, 1)$; en (1, 0, –1): $(1, 0, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Lectura de Γ: $y^2 - 2y - x + 1 = 0$ es $x = (y - 1)^2$, y $y - z = 1$ es $z = y - 1$. Así Γ se parametriza con $y = t$: $\vec{g}(t) = ((t - 1)^2, t, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.
1. Sistema: reemplazando en Σ: $(y - 1)^2 + (y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y - 1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2$ o $y = 0$.
Puntos: $y = 2$: $x = 1$, $z = 1$
$P_1 = (1, 2, 1)$; $y = 0$: $x = 1$, $z = -1$
$P_2 = (1, 0, -1)$. Control en Σ: $1 + 1 + 1 = 3$ en los dos ✓.
2. Tangente: $\vec{g}'(t) = (2(t - 1), 1, 1)$, nunca nulo (segunda componente 1): Γ es regular. P_1 corresponde a $t = 2$ y P_2 a $t = 0$.
En P_1: $\vec{g}'(2) = (2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En P_2: $\vec{g}'(0) = (-2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control con gradientes: con $G_1 = y^2 - 2y - x + 1$ y $G_2 = y - z - 1$: $\nabla G_1 \times \nabla G_2 = (-1, 2y - 2, 0) \times (0, 1, -1) = (2 - 2y, -1, -1)$, que da $(-2, -1, -1) \parallel (2, 1, 1)$ en P_1 y $(2, -1, -1) \parallel (-2, 1, 1)$ en P_2 ✓.
Trampa: la recta pedida es tangente a Γ, no a Σ: el gradiente de Σ no entra en el ítem 2. Y no olvidar la raíz $y - 1 = -1$.

19/10/24, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (2 - \ln(xy), \sqrt{(3 - y^2 + 2y - 4x^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** $D = \{(x, y) : xy > 0,\ 4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$: la elipse cerrada de centro (0, 1), semieje 1 en x y 2 en y, restringida a los cuadrantes 1° y 3° abiertos (dos pedazos). $\text{int } D = \{xy > 0,\ 4x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$. $\partial D = \{4x^2 + (y - 1)^2 = 4,\ xy \geq 0\} \cup \{x = 0, -1 \leq y \leq 3\} \cup \{y = 0, -\sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2\}$. D no es abierto, no es cerrado, es acotado y no es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de sus componentes. La primera pide $xy > 0$ (logaritmo); la segunda, $3 - y^2 + 2y - 4x^2 \geq 0$ (raíz cuadrada).
> **Completar cuadrados:** $3 - y^2 + 2y - 4x^2 = 4 - 4x^2 - (y - 1)^2$, así que la condición es $4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$, o sea $x^2 + (y - 1)^2/4 \leq 1$: la elipse **cerrada** (borde incluido) de centro (0, 1), semieje 1 en x y 2 en y. Corta al eje y en (0, –1) y (0, 3), y al eje x en $(\pm\sqrt{3}/2, 0)$ (con $y = 0$ queda $4x^2 + 1 = 4$).
> **xy > 0:** x e y no nulos y del mismo signo, o sea los cuadrantes 1° y 3° **abiertos** (los ejes quedan afuera). Fijate que ln(xy) no es ln x + ln y: el 3° cuadrante también entra.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0,\ 4x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$. **Gráfico:** dos pedazos de la elipse. El grande, en el 1° cuadrante, limitado por el eje y de 0 a 3 y el eje x de 0 a $\sqrt{3}/2$ (los dos en punteado) y por el arco de elipse de $(\sqrt{3}/2, 0)$ a (0, 3) pasando por (1, 1) (trazo lleno, extremos huecos). El chico, en el 3° cuadrante, entre el eje y de –1 a 0, el eje x de $-\sqrt{3}/2$ a 0 (punteados) y el arco de (0, –1) a $(-\sqrt{3}/2, 0)$ (lleno, extremos huecos). El pedazo chico existe: (–1/2, –1/2) cumple $xy = 1/4 > 0$ y $4 \cdot (1/4) + 9/4 = 13/4 \leq 4$.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : xy > 0,\ 4x^2 + (y - 1)^2 < 4\}$, los mismos dos pedazos sin los arcos.
> **Frontera:** $\partial D = \{4x^2 + (y - 1)^2 = 4,\ xy \geq 0\} \cup \{x = 0, -1 \leq y \leq 3\} \cup \{y = 0, -\sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2\}$: los dos arcos con sus extremos más los dos segmentos de los ejes que quedan dentro de la elipse. Los arcos sin sus extremos son de D; los segmentos de los ejes no.
> **¿Abierto?** No: $P = (1/2, 1 + \sqrt{3})$ está en D ($4 \cdot (1/4) + 3 = 4$ y $xy > 0$), pero toda bola centrada en P contiene puntos $(1/2, 1 + \sqrt{3} + \varepsilon)$ con $4x^2 + (y - 1)^2 > 4$, que no son de D. P es de D y no es interior.
> **¿Cerrado?** No: (0, 1) es punto frontera (los $(\varepsilon, 1)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, 1)$ no) y no pertenece a D porque ahí $xy = 0$. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
> **¿Acotado?** Sí: en D vale $|x| \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 3$, así que $\|(x, y)\| \leq \sqrt{10}$.
> **¿Conexo?** No: (1/2, 1) y (–1/2, –1/2) están en D. Si una curva continua dentro de D los uniera, su primera coordenada sería continua y pasaría de 1/2 a –1/2; por Bolzano habría un punto de la curva con $x = 0$, donde $xy = 0$, y ese punto no es de D. Absurdo: D tiene dos componentes (una por cuadrante).
> **Trampa:** pedir $x > 0$ e $y > 0$ por separado (como si fuera ln x + ln y) pierde el pedazo del 3° cuadrante y lleva a decir, mal, que D es conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(y - 2)^2 + 2x] + \mathbf{b}[(x + 1)^2 - 2y^3] + 8y - 4x$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (0, 1) y clasifíquelo.

> **Respuesta:** a = 1, b = 1. En (0, 1) hay punto silla ($\det H = -20$); no hay extremo. $f(0, 1) = 8$.

Planteo: f es polinómica, C^2 en $\mathbb{R}^2$, así que (0, 1) es crítico si y sólo si $\nabla f(0, 1) = 0$.
Derivadas: $f'_x = 2a + 2b(x + 1) - 4$ (el término 2ax aporta 2a) y $f'_y = 2a(y - 2) - 6by^2 + 8$.
Sistema: en (0, 1): $f'_x = 2a + 2b - 4 = 0$ y $f'_y = -2a - 6b + 8 = 0$, o sea $a + b = 2$ y $a + 3b = 4$. Restando: $2b = 2$, **b = 1** y **a = 1**.
Hessiano: $f''_{xx} = 2b$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2a - 12by$. Con a = b = 1, en (0, 1): $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\det H = -20 < 0$.
Clasificación: $\det H < 0$, así que (0, 1) es un **punto silla**: no hay extremo relativo. El punto silla del gráfico es (0, 1, f(0, 1)) con f(0, 1) = [1 + 0] + [1 − 2] + 8 = 8.
Trampa: "clasifíquelo" no quiere decir que sea extremo: punto silla es una clasificación válida y es la respuesta. Es el Tema 1 con x e y intercambiados, por eso da lo mismo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zx - \cos(z)y + xy^2 = 0$
define implícitamente una función y = f(x, z) de clase C^1 en un entorno de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(x_0, z_0) = y_0 > 0$. Calcule aproximadamente f(0.95, 0.02) mediante una aproximación lineal.

Respuesta: $y_0 = 1$, $\nabla f(1, 0) = (-1, -3)$. f(0.95, 0.02) ≈ 0.99.

Planteo: $F(x, y, z) = 3zx - \cos(z)\, y + xy^2$, queremos y = f(x, z) cerca de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ con $y_0 > 0$.
Punto: $F(1, y, 0) = -y + y^2 = y(y - 1) = 0$ da y = 0 o y = 1; la condición $y_0 > 0$ elige **$y_0 = 1$**. P = (1, 1, 0).
Hipótesis del TFI: (1) F(P) = 0 ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_y = -\cos z + 2xy$, $F_y(P) = -1 + 2 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces y = f(x, z) es C^1 en un entorno de (1, 0), con f(1, 0) = 1.
Derivadas: $F_x = 3z + y^2$, $F_x(P) = 1$. $F_z = 3x + \text{sen}(z)\, y$, $F_z(P) = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_y} = -1$, $f_z = -\dfrac{F_z}{F_y} = -3$.
Aproximación lineal: f es diferenciable en (1, 0), así que $f(x, z) \approx f(1, 0) + f_x \Delta x + f_z \Delta z$, con $\Delta x = 0.95 - 1 = -0.05$ y $\Delta z = 0.02$.
Resultado: f(0.95, 0.02) ≈ 1 + (−1)(−0.05) + (−3)(0.02) = 1 + 0.05 − 0.06 = 0.99.
Trampa: el segundo argumento de f es z, no y: el incremento 0.02 va con f_z. Y sin la condición $y_0 > 0$ hay dos puntos posibles; con $y_0 = 0$ tendrías $F_y = -1$ y otra función distinta.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(x - y, x^2y^3)$ con f(r, s) un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que f(0, 1) = 1 y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (1, 1, g(1, 1)).

Respuesta: $\nabla f(0, 1) = (3, 1)$, g(1, 1) = 1, $\nabla g(1, 1) = (5, 0)$. Plano tangente: z = 5x − 4 (o sea 5x − z = 4).

Planteo: $g(x, y) = f(r(x, y), s(x, y))$ con $r = x - y$, $s = x^2y^3$. En (1, 1) el punto interior es (r, s) = (1 − 1, 1·1) = (0, 1), así que g(1, 1) = f(0, 1) = 1.
Hipótesis: f es C^1 en $\mathbb{R}^2$, luego diferenciable en (0, 1), y entonces $f'((0, 1), \check{w}) = \nabla f(0, 1) \cdot \check{w}$ para todo versor $\check{w}$. Las funciones r y s son polinómicas (C^∞). Así g es diferenciable en (1, 1) y vale la regla de la cadena.
∇f(0, 1) con las derivadas direccionales: llamando $\nabla f(0, 1) = (a, b)$: $(a, b)\cdot(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)(a - b) = \sqrt{2}$, o sea $a - b = 2$; $(a, b)\cdot(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)(a + b) = 2\sqrt{2}$, o sea $a + b = 4$. Sumando: a = 3, b = 1.
∇f(0, 1) = (3, 1).
Jacobiana interior en (1, 1): $r_x = 1$, $r_y = -1$; $s_x = 2xy^3 = 2$, $s_y = 3x^2y^2 = 3$.
Cadena: $g_x(1, 1) = f_r \cdot r_x + f_s \cdot s_x = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = 5$; $g_y(1, 1) = f_r \cdot r_y + f_s \cdot s_y = 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 0$.

Plano tangente: $z = g(1, 1) + g_x(x - 1) + g_y(y - 1) = 1 + 5(x - 1)$, es decir $\mathbf{z = 5x - 4}$.
Trampa: las derivadas de f se evalúan en (0, 1), el punto *interior*, no en (1, 1). Y para usar $f' = \nabla f \cdot \check{v}$ hace falta decir que f es diferenciable (acá sale de ser C^1).

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y + 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 + 2y - x + 1 = 0 \; ; \; z - y = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

Respuesta: 1. (1, 0, 1) y (1, −2, −1). 2. En (1, 0, 1): (1, 0, 1) + λ(2, 1, 1); en (1, −2, −1): (1, −2, −1) + λ(−2, 1, 1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lectura de Γ: $y^2 + 2y - x + 1 = 0$ es $x = (y + 1)^2$, y $z - y = 1$ es $z = y + 1$. Así Γ se parametriza con $y = t$: $\vec{g}(t) = ((t + 1)^2, t, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$, de clase C^1.
1. Sistema: reemplazando en Σ: $(y + 1)^2 + (y + 1)^2 + (y + 1)^2 = 3 \Rightarrow (y + 1)^2 = 1 \Rightarrow y + 1 = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ o $y = -2$.
Puntos: $y = 0$: $x = 1$, $z = 1$
$P_1 = (1, 0, 1)$; $y = -2$: $x = 1$, $z = -1$
$P_2 = (1, -2, -1)$. Control en Σ: $1 + 1 + 1 = 3$ en los dos ✓.
2. Tangente: $\vec{g}'(t) = (2(t + 1), 1, 1)$, nunca nulo (segunda componente 1): Γ es regular. P_1 corresponde a $t = 0$ y P_2 a $t = -2$.
En P_1: $\vec{g}'(0) = (2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
En P_2: $\vec{g}'(-2) = (-2, 1, 1)$; recta $(x, y, z) = (1, -2, -1) + \lambda(-2, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Control con gradientes: con $G_1 = y^2 + 2y - x + 1$ y $G_2 = z - y - 1$: $\nabla G_1 \times \nabla G_2 = (-1, 2y + 2, 0) \times (0, -1, 1) = (2y + 2, 1, 1)$, que da $(2, 1, 1)$ en P_1 y $(-2, 1, 1)$ en P_2 ✓.
Trampa: la recta pedida es tangente a Γ, no a Σ: el gradiente de Σ no entra en el ítem 2. Y no olvidar la raíz negativa de $(y + 1)^2 = 1$.

13/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 4y \le 0$ y $0 \le z \le x$.

> **Respuesta:** $V = 16/3$.
>
> **Planteo:** la base es $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ y en altura $0 \le z \le x$; $V = \iint$ (techo − piso) dxdy = $\iint x\,dxdy$ sobre la parte de la base donde ese intervalo no es vacío.
> **El sólido:** $x^2 + y^2 - 4y \le 0$ equivale a $x^2 + (y-2)^2 \le 4$: disco de centro (0, 2) y radio 2, tangente al eje x en el origen. La condición $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, así que H vive sobre la **mitad derecha** del disco ($x \ge 0$). Es una cuña: el piso es el plano $z = 0$, el techo el plano oblicuo $z = x$ (que contiene al eje y), y los costados la superficie cilíndrica. Sobre el diámetro $x = 0$ la altura es 0, y crece hasta 2 en el punto (2, 2).
> **Coordenadas:** cilíndricas corridas al centro, $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le r \le 2$; $x \ge 0$ equivale a $\cos\theta \ge 0$, o sea $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$; $0 \le z \le r\cos\theta$.
> **Cuenta:** $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^2 r^2\,dr$. Primitivas: sen θ, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ da 2; $\frac{r^3}{3}$, entre 0 y 2 da $\frac{8}{3}$.
>
> **Resultado: $V = \frac{16}{3}$.**
>
> **Control (cartesianas, primero x):** para $y \in [0, 4]$, x va de 0 a $\sqrt{(4y - y^2)}$ (la mitad derecha del disco). $V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{(4y-y^2)}} x\,dx\,dy = \int_0^4 \frac{4y - y^2}{2}\,dy$; primitiva $\frac{1}{2}(2y^2 - \frac{y^3}{3})$, entre 0 y 4: $\frac{1}{2}(32 - \frac{64}{3}) = \frac{16}{3}$ ✓.
> **Trampa:** integrar x sobre el disco entero da 0 por simetría: es la señal de que se metió la mitad $x < 0$, donde $0 \le z \le x$ no tiene puntos.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (3\cos(t), 3\,\text{sen}(t), 3 - 3\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (g(x) + yz, xz + 2x, xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

> **Respuesta:** La circulación es 18π (no depende de g).
>
> **La curva:** $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$, y $z = 3 - 3\cos t = 3 - x$. Γ es la elipse intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ con el plano $x + z = 3$, y es **cerrada**: $\vec{X}(0) = \vec{X}(2\pi) = (3, 0, 0)$. Con t creciente, su proyección sobre el plano xy gira en sentido antihorario.
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (g(x) + yz, xz + 2x, xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, (z + 2) - z) = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$. **No** es de gradientes.
> **Descomposición:** $\vec{f} = (g(x) + yz, xz, xy) + (0, 2x, 0) = \nabla U + \vec{h}$, con $U = G(x) + xyz$ y G una primitiva de g. Control: $\nabla U = (g(x) + yz, xz, xy)$.
> **Parte de gradientes:** U es C^1 y Γ es cerrada: $\oint_\Gamma \nabla U \cdot d\vec{s} = U(\vec{X}(2\pi)) - U(\vec{X}(0)) = 0$, sea cual sea g.
> **El resto:** $\oint_\Gamma \vec{h} \cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma 2x\,dy = \int_0^{2\pi} 2(3\cos t)(3\cos t)\,dt = 18\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = 18\pi$.
> **Control con Stokes:** f es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ: el pedazo del plano $z = 3 - x$ adentro del cilindro, sobre $D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$, con normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 0, 1)$, hacia arriba, compatible con el giro antihorario de Γ vista

desde arriba. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (1, 0, 1)\, dx\, dy = 2 \cdot 9\pi = 18\pi$. ✓
Resultado: 18π.
Trampa: el término 2x de la segunda componente hace que $Q'_x - P'_y = 2$; contestar 0 “porque es cerrada” sólo vale para campos de gradientes.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
$\Sigma : z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 1$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4} \approx 9{,}996$.

Planteo: $z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono con vértice en (0, 0, 4) que abre hacia abajo. Σ es la parte con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 1$: un cuarto de cono entre el vértice y la altura $z = 1$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 4 - r)$.
Dominio D: $z \geq 1$ es $4 - r \geq 1$, o sea $0 \leq r \leq 3$. $x \geq 0$ e $y \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$. $D = [0, 3] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r \cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\, r$. Sólo se anula en el vértice ($r = 0$), un punto que no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\dfrac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 0 y 3 da $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$. Integral en θ: multiplica por $\dfrac{\pi}{2}$. $A = \dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\dfrac{9\sqrt{2}\,\pi}{4}} \approx 9{,}996$.
Control geométrico: el cono completo tiene radio de base 3 y generatriz $g = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = 3\sqrt{2}$; su área lateral es $\pi R g = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\,\pi$, y Σ es la cuarta parte ✓. También: como gráfica $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de disco de radio 3, de área $\dfrac{9\pi}{4}$ ✓.
Trampa: como el cono abre hacia abajo, $z \geq 1$ es $r \leq 3$ (la parte de arriba, cerca del vértice), no $r \geq 3$. Y el área no es la de la proyección: falta el factor $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (x - y\varphi(2xy), 3x - x\varphi(2xy) + y^2)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4y^2 + 8y + x^2 = 0$ contenido en el semiplano $x \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Respuesta: Sentido elegido: de (0, 0) a (0, −2) pasando por (2, −1) (horario). $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -3\pi - 8/3 \approx -12{,}09$. Con el sentido opuesto: $3\pi + 8/3$.

Planteo: $P = x - y\varphi(2xy)$, $Q = 3x - x\varphi(2xy) + y^2$; con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ ambas son C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Rotor escalar: $Q'_x = 3 - \varphi(2xy) - 2xy\, \varphi'(2xy)$ y $P'_y = -\varphi(2xy) - 2xy\, \varphi'(2xy)$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3}$. La parte con φ, $-\varphi(2xy)(y\, dx + x\, dy)$, es un gradiente (de $-\dfrac{1}{2}\Phi(2xy)$ con $\Phi' = \varphi$), por eso se va.
La curva: $4y^2 + 8y + x^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + (y + 1)^2 = 1$: elipse de centro (0, −1), semiejes 2 en x y 1 en y, que pasa por (0, 0) y (0, −2).
Sentido elegido (el gráfico): la media elipse derecha, con la flecha saliendo del origen, bajando por (2, −1) y llegando a (0, −2): **sentido horario**.
Cierre e hipótesis: agrego el segmento S del eje y de (0, −2) a (0, 0). $\Gamma \cup S$ es cerrada, simple, C^1 a trozos, y es el borde de la media elipse $D = \{\dfrac{x^2}{4} + (y + 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$, región regular; $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$.
El borde queda recorrido en sentido horario, así que $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D 3\, dA = -3 \cdot \text{área}(D) = -3 \cdot$

$\frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2} = -3\pi$.

Segmento: S: (0, t), t de −2 a 0. $\vec{f}(0, t) = (-t\varphi(0), t^2)$; con derivada (0, 1), $\int_S = \int_{-2}^{0} t^2\, dt = [\frac{t^3}{3}]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -3\pi - \frac{8}{3} = \mathbf{-3\pi - 8/3} \approx -12{,}09$. Si en el gráfico elegís el otro sentido (de (0, −2) a (0, 0), antihorario) el resultado cambia de signo: 3π + 8/3.

Trampa: el enunciado no fija el sentido, por eso pide el gráfico: sin la flecha dibujada el número no significa nada. Y el segmento se resta con la orientación con la que cerraste.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(x)\vec{g}(x, y)$. con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (2 + 3x\cos(y), -x^2\text{sen}(y))$. Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(1, \pi/2) = (2, -1)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $h(x) = x$; $\vec{f} = (2x + 3x^2\cos y, -x^3 \text{ sen } y)$; potenciales $U(x, y) = x^2 + x^3\cos y + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (h(x)(2 + 3x\cos y), -h(x)x^2 \text{ sen } y)$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

Condición necesaria: $P'_y = -3x\,h(x) \text{ sen } y$; $Q'_x = -\text{sen } y \cdot (2x\,h + x^2 h')$ (regla del producto). Igualando: $x \text{ sen } y \cdot (x\,h' - h) = 0$ para todo (x, y). Con $y = \pi/2$ queda $x(xh' - h) = 0$, o sea **$x\,h'(x) = h(x)$** para $x \neq 0$.

Solución de la EDO: para $x \neq 0$, $(h/x)' = \frac{xh' - h}{x^2} = 0$, así que h/x es constante en cada semirrecta: $h(x) = c_1 x$ para $x > 0$ y $h(x) = c_2 x$ para $x < 0$ (y $h(0) = 0$ por continuidad). Como h es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$h(x) = cx$** en todo $\mathbb{R}$.

Dato: $\vec{f}(1, \pi/2) = h(1) \cdot (2 + 3 \cdot 0, -1 \cdot 1) = (2h(1), -h(1)) = (2, -1) \Rightarrow h(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. **$h(x) = x$**.

Suficiencia: $\vec{f} = (2x + 3x^2\cos y, -x^3 \text{ sen } y)$ cumple $P'_y = -3x^2 \text{ sen } y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes.

Potenciales: $U'_x = 2x + 3x^2\cos y \Rightarrow U = x^2 + x^3\cos y + k(y)$. Derivando en y: $-x^3 \text{ sen } y + k'(y) = -x^3 \text{ sen } y \Rightarrow k' = 0$, $k = K$. Resultado: **$U(x, y) = x^2 + x^3\cos y + K$**, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: la EDO sale dividiendo por x, que no vale en x = 0, y el dato en x = 1 sólo fija la constante de las x positivas. Lo que obliga a que sea la misma recta en todo $\mathbb{R}$ es que h sea derivable en 0. Y “todas” pide la constante K.

13/8/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 6y \le 0$ y $0 \le z \le x$.

> **Respuesta:** $V = 18$.
>
> **Planteo:** la base es $x^2 + y^2 - 6y \le 0$ y en altura $0 \le z \le x$; $V = \iint$ (techo − piso) dxdy = $\iint x\,dxdy$ sobre la parte de la base donde ese intervalo no es vacío.
> **El sólido:** $x^2 + y^2 - 6y \le 0$ equivale a $x^2 + (y-3)^2 \le 9$: disco de centro (0, 3) y radio 3, tangente al eje x en el origen. La condición $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$, así que H vive sobre la **mitad derecha** del disco ($x \ge 0$). Es una cuña: el piso es el plano $z = 0$, el techo el plano oblicuo $z = x$ (que contiene al eje y), y los costados la superficie cilíndrica. Sobre el diámetro $x = 0$ la altura es 0, y crece hasta 3 en el punto (3, 3).
> **Coordenadas:** cilíndricas corridas al centro, $x = r\cos\theta$, $y = 3 + r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$; jacobiano r. Rangos: $0 \le r \le 3$; $x \ge 0$ equivale a $\cos\theta \ge 0$, o sea $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$; $0 \le z \le r\cos\theta$.
> **Cuenta:** $V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^3 r^2\,dr$. Primitivas: sen θ, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ da 2; $\frac{r^3}{3}$, entre 0 y 3 da 9.
> **Resultado: $V = 18$.**
> **Control (cartesianas, primero x):** para $y \in [0, 6]$, x va de 0 a $\sqrt{(6y - y^2)}$ (la mitad derecha del disco). $V = \int_0^6 \int_0^{\sqrt{(6y-y^2)}} x\,dx\,dy = \int_0^6 \frac{6y - y^2}{2}\,dy$; primitiva $\frac{1}{2}(3y^2 - \frac{y^3}{3})$, entre 0 y 6: $\frac{1}{2}(108 - 72) = 18$ ✓.
> **Trampa:** integrar x sobre el disco entero da 0 por simetría: es la señal de que se metió la mitad $x < 0$, donde $0 \le z \le x$ no tiene puntos.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 2 - 2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz - 2y, xz + g(y), xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

> **Respuesta:** La circulación es 8π (no depende de g).
>
> **La curva:** $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, y $z = 2 - 2\cos t = 2 - x$. Γ es la elipse intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $x + z = 2$, y es **cerrada**: $\vec{X}(0) = \vec{X}(2\pi) = (2, 0, 0)$. Con t creciente, su proyección sobre el plano xy gira en sentido antihorario.
> **¿Es de gradientes?** $\vec{f} = (yz - 2y, xz + g(y), xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{rot}\,\vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (x - x, y - y, z - (z - 2)) = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$. **No** es de gradientes: no se puede usar un potencial para todo f.
> **Descomposición:** $\vec{f} = (yz, xz + g(y), xy) + (-2y, 0, 0) = \nabla U + \vec{h}$, con $U = xyz + G(y)$ y G una primitiva de g (existe porque g es continua). Control: $\nabla U = (yz, xz + g(y), xy)$.
> **Parte de gradientes:** U es C^1 y Γ es cerrada, así que $\oint_\Gamma \nabla U \cdot d\vec{s} = U(\vec{X}(2\pi)) - U(\vec{X}(0)) = 0$. Por eso g no importa.
> **El resto:** $\oint_\Gamma \vec{h} \cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma -2y\,dx = \int_0^{2\pi} -2(2\,\mathrm{sen}\,t)(-2\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = 8\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t\,dt = 8\pi$.
> **Control con Stokes:** f es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Tomo Σ: el pedazo del plano $z = 2 - x$ adentro del cilindro, parametrizado por $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$, con normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 0, 1)$, de componente z positiva: es la compatible con Γ girando antihorario vista desde arriba (regla de la mano derecha). $\iint_\Sigma$

rot f · n dS = $\iint_D$ (0, 0, 2) · (1, 0, 1) dx dy = 2·área(D) = 2·4π = 8π. ✓
Resultado: 8π.
Trampa: el −2y rompe la simetría: la tercera componente del rotor es 2, no 0. Ver "casi gradiente" y contestar 0 es el error clásico.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
Σ : $z = 9 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 5$.

Respuesta: $A(\Sigma) = 4\sqrt{2}\,\pi \approx 17{,}77$.

Planteo: $z = 9 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es un cono con vértice en (0, 0, 9) que abre hacia abajo. Σ es la parte con $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 5$: un cuarto de cono entre el vértice y la altura $z = 5$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 9 - r)$.
Dominio D: $z \geq 5$ es $9 - r \geq 5$, o sea $0 \leq r \leq 4$. $x \geq 0$ e $y \geq 0$ dan $0 \leq \theta \leq \pi/2$. $D = [0, 4] \times [0, \pi/2]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1)$, $\vec{X}_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2}\, r$. Sólo se anula en el vértice ($r = 0$), un punto que no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta$. Integral en r: primitiva $\frac{\sqrt{2}\, r^2}{2}$, entre 0 y 4 da $\frac{16\sqrt{2}}{2}$. Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{2}$. $A = \frac{16\sqrt{2}\,\pi}{4}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{4\sqrt{2}\,\pi} \approx 17{,}77$.
Control geométrico: el cono completo tiene radio de base 4 y generatriz $g = \sqrt{(4^2 + 4^2)} = 4\sqrt{2}$; su área lateral es $\pi R g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\,\pi$, y Σ es la cuarta parte ✓. También: como gráfica $dS = \sqrt{2}\, dx\, dy$, y la proyección es un cuarto de disco de radio 4, de área $\frac{16\pi}{4}$ ✓.
Trampa: como el cono abre hacia abajo, $z \geq 5$ es $r \leq 4$ (la parte de arriba, cerca del vértice), no $r \geq 4$. Y el área no es la de la proyección: falta el factor $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (3y - y\varphi(2xy) + x^2,\ y - x\varphi(2xy))$ con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ contenido en el semiplano $y \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Respuesta: Recorriendo el arco de (0, 0) a (−2, 0) por (−1, 2) (antihorario): $\int \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-3\pi - 8/3} \approx -12{,}09$. En el sentido contrario, $3\pi + 8/3$.

La curva: $4x^2 + 8x + y^2 = 0 \Leftrightarrow 4(x + 1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$: elipse de centro (−1, 0), semiejes 1 (en x) y 2 (en y). Con $y \geq 0$ queda la mitad de arriba, que une (0, 0) con (−2, 0) pasando por (−1, 2).
Sentido elegido (el "gráfico"): de (0, 0) a (−2, 0) pasando por (−1, 2), o sea antihorario.
Parametrización: $(-1 + \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
Cerrar la curva: agrego el segmento S de (−2, 0) a (0, 0) sobre el eje x. Arco más S es el borde de la media elipse $D = \{(x + 1)^2 + y^2/4 \leq 1,\ y \geq 0\}$ en sentido **positivo**. D es compacta, con borde cerrado, simple y C^1 a trozos; $\text{área}(D) = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 2}{2} = \pi$.
Hipótesis de Green: $\varphi \in C^1$ y $(x, y) \mapsto 2xy$ es polinomial, así que $\varphi(2xy)$ es C^1; $P = 3y - y\varphi(2xy) + x^2$ y $Q = y - x\varphi(2xy)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$.
Rotor (regla de la cadena): $P'_y = 3 - \varphi(2xy) - y \cdot \varphi'(2xy) \cdot 2x = 3 - \varphi - 2xy\varphi'$; $Q'_x = -\varphi(2xy) - x \cdot \varphi'(2xy) \cdot 2y = -\varphi - 2xy\varphi'$. Restando: $\mathbf{Q'_x - P'_y = -3}$; los términos con φ se cancelan.
Green: $\oint_{\text{arco} \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (-3)\, dA = -3\pi$.

El segmento: $\sigma(t) = (t, 0)$, $-2 \le t \le 0$, $\sigma' = (1, 0)$. Con $y = 0$, $P(t, 0) = t^2$ (los dos términos con φ van multiplicados por y): $\int_S \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{-2}^{0} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}$.

Resultado: $\int_{\text{arco}} \vec{f} \cdot \vec{ds} = -3\pi - \frac{8}{3} \approx -12{,}09$. Si se elige el sentido de $(-2, 0)$ a $(0, 0)$, da **$3\pi + 8/3$**.

Otra mirada: $-\varphi(2xy)(y, x) = \nabla\left(-\frac{1}{2}\Phi(2xy)\right)$ con $\Phi' = \varphi$: es un gradiente, y en los dos extremos del arco $2xy = 0$, así que aporta $\Phi(0) - \Phi(0) = 0$. Queda la circulación de $(3y + x^2, y)$ sobre el arco, que parametrizando da lo mismo.

Trampa: el segmento no da 0: el x^2 de P sobrevive con $y = 0$. Y φ desaparece del segmento porque va multiplicada por y, no porque $\varphi(0)$ sea 0.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(y)\vec{g}(x, y)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (-y^2\text{sen}(x), 2 + 3y\cos(x))$.
Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(\pi/2, 1) = (-1, 2)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

Respuesta: $h(y) = y$; $\vec{f} = (-y^3 \text{ sen } x, 2y + 3y^2 \cos x)$; potenciales $U(x, y) = y^3 \cos x + y^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Planteo: $\vec{f} = (P, Q) = (-h(y)y^2 \text{ sen } x, h(y)(2 + 3y \cos x))$, C^1 en $\mathbb{R}^2$ porque $h \in C^1$. Si $\vec{f} = \nabla U$, U es C^2 y por Schwarz $P'_y = Q'_x$.

Condición necesaria: $P'_y = -\text{sen } x\cdot(y^2h' + 2y\, h)$ (regla del producto, h depende de y); $Q'_x = -3y\, h(y) \text{ sen } x$. Igualando: $y \text{ sen } x\cdot(y\, h' - h) = 0$ para todo (x, y). Con $x = \pi/2$ queda $y(yh' - h) = 0$, o sea **$y\, h'(y) = h(y)$** para $y \neq 0$.

Solución de la EDO: para $y \neq 0$, $(h/y)' = \frac{yh' - h}{y^2} = 0$, así que h/y es constante en cada semirrecta: $h(y) = c_1 y$ para $y > 0$ y $h(y) = c_2 y$ para $y < 0$ ($h(0) = 0$ por continuidad). Como h es derivable en 0, sus derivadas laterales c_1 y c_2 tienen que coincidir: **$h(y) = cy$** en todo $\mathbb{R}$.

Dato: $\vec{f}(\pi/2, 1) = h(1)\cdot(-1\cdot 1, 2 + 3\cdot 0) = (-h(1), 2h(1)) = (-1, 2) \Rightarrow h(1) = 1 \Rightarrow c = 1$. **$h(y) = y$**.

Suficiencia: $\vec{f} = (-y^3 \text{ sen } x, 2y + 3y^2 \cos x)$ cumple $P'_y = -3y^2 \text{ sen } x = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes.

Potenciales: $U'_y = 2y + 3y^2 \cos x \Rightarrow U = y^2 + y^3 \cos x + k(x)$. Derivando en x: $-y^3 \text{ sen } x + k'(x) = -y^3 \text{ sen } x \Rightarrow k = K$. Resultado: **$U(x, y) = y^3 \cos x + y^2 + K$**, $K \in \mathbb{R}$.

Trampa: la EDO vale para $y \neq 0$ y el dato en $y = 1$ sólo fija la constante de las y positivas; la derivabilidad de h en 0 es lo que hace que $h = y$ en todo $\mathbb{R}$. Y “todas” pide la constante K.

6/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ z \geq 1\}$,
suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in H$ es proporcional a la distancia de P al plano xy.

> **Respuesta:** $M = 4\pi k/5$ ($\delta = kz$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$.
> **El cuerpo:** $x^2 + y^2 + 5z^2 = 9$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 3, 3 y $3/\sqrt{5} \approx 1{,}34$. El plano $z = 1$ lo corta en $x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de radio 2). H es el casquete de arriba: entre $z = 1$ y la punta $z = 3/\sqrt{5}$. Cada tajada $z = cte$ es el disco $x^2 + y^2 \leq 9 - 5z^2$.
> **Densidad:** la distancia al plano xy ($z = 0$) es $|z| = z$, porque en H es $z \geq 1$: $\delta = kz$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $1 \leq z \leq 3/\sqrt{5}$, $0 \leq r \leq \sqrt{(9 - 5z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
> **Cuenta (por tajadas):** la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(9 - 5z^2)$. $M = k\pi \int_1^{3/\sqrt{5}} z(9 - 5z^2)\, dz$. Primitiva: $\frac{9z^2}{2} - \frac{5z^4}{4}$. En $z^2 = \frac{9}{5}$: $\frac{81}{10} - \frac{81}{20} = \frac{81}{20}$. En $z = 1$: $\frac{9}{2} - \frac{5}{4} = \frac{65}{20}$. Diferencia: $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{4\pi k}{5}}$.
> **Control (otro orden):** con r afuera: $0 \leq r \leq 2$ (radio de la tapa $z = 1$) y $1 \leq z \leq \sqrt{(\frac{9 - r^2}{5})}$. $M = 2\pi k \int_0^2 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^{\sqrt{((9 - r^2)/5)}} dr = \pi k \int_0^2 r \cdot \frac{4 - r^2}{5}\, dr = \frac{\pi k}{5}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{4\pi k}{5}$ ✓.
> **Trampa:** el casquete termina en $z = 3/\sqrt{5}$, no en $z = 3$ (el 5 achica el semieje z). Y en el orden dz dr, r llega sólo a 2, el radio de la tapa, no a 3.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z)$ a lo largo de la curva $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, siendo $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $\Sigma_2 : z + x^2 = 1$.
Indique en un gráfico la orientación de Γ elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** Con Γ antihoraria vista desde z positivo: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ (con la orientación opuesta, -2π).
>
> **Planteo:** Γ está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, así que es una curva cerrada que se proyecta sobre la circunferencia unitaria del plano xy. $\vec{f} = (-y, x, z)$ no es de gradientes: $\operatorname{rot} \vec{f} = (0, 0, 2) \neq \vec{0}$, así que no hay atajo con potencial.
> **Parametrización y orientación:** $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - \cos^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. **Orientación elegida:** antihoraria vista desde arriba (desde z positivo); en el gráfico la curva pasa, en ese orden, por (1, 0, 0), (0, 1, 1), (−1, 0, 0) y (0, −1, 1). $\vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t \operatorname{sen} t)$.
> **Cuenta directa:** $\vec{f}(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) + z\, z' = 1 + z\, z'$. El término $z\, z'$ es la derivada de $z^2/2$, que vuelve a su valor inicial en una curva cerrada, así que integra 0 (en cuentas: $z\, z' = 2\operatorname{sen}^3 t \cos t$, y $\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^3 t \cos t\, dt = [\operatorname{sen}^4 t/2]_0^{2\pi} = 0$). Queda $\oint = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Tomamos Σ: $z = 1 - x^2$ con (x, y) en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, cuyo borde es Γ. Con la normal $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 0, 1)$, que apunta hacia arriba, el borde queda antihorario visto desde arriba: compatible con la orientación elegida. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (0, 0, 2)$

$\cdot (2x, 0, 1)\, dx\, dy = 2 \cdot \pi = 2\pi$ ✓.

Resultado: $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot \vec{ds} = 2\pi$ con Γ antihoraria vista desde arriba (-2π si se recorre al revés).

Trampa: el enunciado pide indicar la orientación en un gráfico: sin ella el signo no significa nada y el ejercicio queda incompleto. La flecha va sobre la curva en el espacio, no sólo sobre la circunferencia del piso.

Ejercicio 3. Sea D la región del plano contenida en el primer cuadrante limitada por la línea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (2, 0) y los ejes coordenados. Calcule $\iint_D y\, dxdy$.

Respuesta: Línea de campo: $x^2 + 4y^2 = 4$. $D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2\sqrt{(1 - y^2)}\}$. $\iint_D y\, dxdy = 2/3$.

Línea de campo (EDO): $x' = 4y$, $y' = -x$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$. Separando: $4y\, dy = -x\, dx \Rightarrow 2y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + 4y^2 = k$. Por (2, 0): $k = 4$. La línea es la elipse $\mathbf{x^2 + 4y^2 = 4}$, o sea $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Control: $\frac{d}{dt}(x^2 + 4y^2) = 2x \cdot 4y + 8y \cdot (-x) = 0$ ✓.

La región: en el primer cuadrante, la elipse va de (2, 0) a (0, 1); junto con los dos ejes encierra un cuarto de elipse acostado (semieje 2 sobre el eje x, 1 sobre el eje y). $\mathbf{D = \{0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 2\sqrt{(1 - y^2)}\}}$.

Cambio de variables: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$ e $y \ge 0$ piden $\cos\theta \ge 0$ y $\mathrm{sen}\,\theta \ge 0$). Jacobiano: $\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos^2\theta + 2r\,\mathrm{sen}^2\theta = 2r$, así que $dxdy = 2r\, dr\, d\theta$.

Cuenta: $\iint_D y\, dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot 2r\, dr\, d\theta = (\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta)(\int_0^1 2r^2\, dr) = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \cdot [\frac{2r^3}{3}]_0^1 = 1 \cdot \frac{2}{3}$.

Resultado: $\iint_D y\, dxdy = \mathbf{2/3}$.

Control en cartesianas: $\int_0^1 y \cdot 2\sqrt{(1 - y^2)}\, dy$; primitiva $-\frac{2}{3}(1 - y^2)^{3/2}$, entre 0 y 1 da $0 - (-\frac{2}{3}) = 2/3$ ✓.

Trampa: θ va de 0 a π/2, no hasta 2π (es un cuarto de elipse), y el jacobiano es 2r: sin el 2 da 1/3.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \varphi(x - y), 2y + \varphi(x - y), 2z - 1)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0,\ z \ge 0,$

orientada de modo que en el punto (0, 2, 2) el versor normal sea $\check{n} = (0, 0, 1)$.

Dato: el volumen de una bola de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Respuesta: $\Phi = 68\pi/3$ (normal exterior a la semiesfera, la que en (0, 2, 2) vale (0, 0, 1)).

Planteo: completando cuadrados, $x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$: es la esfera de centro C = (0, 2, 0) y radio 2, y $z \ge 0$ deja la semiesfera superior. Está abierta abajo: la cerramos con el disco B: $z = 0$, $x^2 + (y - 2)^2 \le 4$, y usamos Gauss en la media bola H.

Orientación: (0, 2, 2) está en Σ ($0 + 0 + 4 = 4$) y es el polo de arriba; ahí el versor (0, 0, 1) apunta hacia afuera de la esfera. Por continuidad, la orientación pedida es la **exterior** en toda Σ. En B la exterior de H es (0, 0, −1).

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ y $x - y$ es C^∞, así que $\varphi(x - y)$ es C^1 y $\vec{f} = (x + \varphi(x - y), 2y + \varphi(x - y), 2z - 1)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ ∪ B es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia (regla de la cadena): $\partial_x[x + \varphi(x - y)] = 1 + \varphi'(x - y)$; $\partial_y[2y + \varphi(x - y)] = 2 + \varphi'(x - y)\cdot(-1) = 2 - \varphi'(x - y)$; $\partial_z(2z - 1) = 2$. Sumando, $\nabla\cdot\vec{f} = 5$: φ' se cancela.

Triple integral: $\iiint_H 5\ dV = 5\cdot\text{Vol}(\text{media bola de radio } 2) = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = 5\cdot\frac{16\pi}{3} = \frac{80\pi}{3}$.

Base: en $z = 0$ con normal $(0, 0, -1)$: $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -(2z - 1) = -(0 - 1) = 1$. $\Phi_B = 1\cdot\text{área}(B) = 4\pi$. Fijate que φ no aparece: la tercera componente de $\vec{f}$ no la tiene.

Gauss: $\Phi_\Sigma + \Phi_B = \frac{80\pi}{3} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{80\pi}{3} - 4\pi = \frac{68\pi}{3}$.

Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{68\pi}{3}}$.

Trampa: centrar la esfera en el origen (no lo está: el centro es $(0, 2, 0)$, aunque para el volumen no cambia nada, sí para describir B), o derivar $\varphi(x - y)$ respecto de y sin el -1 de la regla de la cadena: entonces φ' no se cancela y el problema parece imposible.

Ejercicio 5. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, donde $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$ y $C = (2, 0)$. Calcule

$\int_\Gamma (x - y^2)\,dx + e^{y^2}\,dy$

con Γ recorrida en el sentido $A \to B \to C$.

Respuesta: $\int_\Gamma (x - y^2)\,dx + e^{y^2}\,dy = -2/3$.

Planteo: $P = x - y^2$, $Q = e^{y^2}$, C^1 en $\mathbb{R}^2$. $Q'_x = 0$, $P'_y = -2y$, $\boldsymbol{Q'_x - P'_y = 2y}$.

Cierre: Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 2)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, de C a A sobre el eje x. $A \to B \to C \to A$ recorre el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 2,\ y/2 \le x \le 2 - y/2\}$ en **sentido horario**.

Hipótesis de Green: D regular, borde cerrado, simple y C^1 a trozos, campo C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} = -\iint_D 2y\ dA$.

Doble integral: $\iint_D 2y\ dA = \int_0^2 2y\,[x]_{y/2}^{2 - y/2}\,dy = \int_0^2 2y(2 - y)\,dy = [2y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$.

Así $\oint_{\Gamma \cup S} = -\frac{8}{3}$.

Segmento: S: $(t, 0)$, t de 2 a 0; $dy = 0$ y $P(t, 0) = t$: $\int_S = \int_2^0 t\,dt = -2$.

Resultado: $\int_\Gamma = -\frac{8}{3} - (-2) = \boldsymbol{-2/3}$.

Control directo: $e^{y^2}\,dy$ es la diferencial de $\int_0^y e^{s^2}\,ds$, y la ordenada vuelve de 0 a 0: aporta 0 aunque no tenga primitiva elemental. Lo otro: en AB ($x = t$, $y = 2t$) $\int_0^1 (t - 4t^2)\,dt = -\frac{5}{6}$; en BC ($x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$) $\int_0^1 (1 + t - 4(1 - t)^2)\,dt = \frac{1}{6}$. Suma $-2/3$ ✓.

Trampa: no intentes integrar e^{y^2} en cada segmento por separado: o usás Green o te das cuenta de que es exacta.

30/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies $\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint_H z \, dx dy dz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H z \, dx \, dy \, dz = \mathbf{8\pi} \approx 25{,}13$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble con eje z que forma 45° con el eje; con $z \geq 0$ queda la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Se cortan donde $z^2 + z^2 = 8$, o sea $z = 2$ y $x^2 + y^2 = 4$: la circunferencia de radio 2 a altura 2. La región limitada sólo por esas dos superficies es el cucurucho de helado: adentro del cono ($z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$) y adentro de la esfera.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, con $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho \cos\varphi = \rho \operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$, y "adentro del cono" es $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$: $\varphi \in [0, \pi/4]$. La esfera es $\rho \leq 2\sqrt{2}$, y θ da toda la vuelta, $\theta \in [0, 2\pi]$. Los límites no dependen entre sí: la región es un rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $z \cdot |J| = \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$, que se separa en producto.
> **Cuenta:** $\iiint_H z \, dV = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi)(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho)$. En ρ: primitiva $\frac{\rho^4}{4}$, da $\frac{(2\sqrt{2})^4}{4} = \frac{64}{4} = 16$. En φ: primitiva $\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En θ: 2π.
> **Resultado:** $\iiint_H z \, dV = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = \mathbf{8\pi} \approx 25{,}13$.
> **Control en cilíndricas:** $r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [r, \sqrt{(8 - r^2)}]$, $|J| = r$. En z: primitiva $\frac{z^2}{2}$, da $\frac{8 - 2r^2}{2} = 4 - r^2$. En r: $\int (4 - r^2) \, r \, dr$, primitiva $2r^2 - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 2 da $8 - 4 = 4$. Por 2π: $2\pi \cdot 4 = 8\pi$ ✓.
> **Si se leyera la otra región:** la parte de la semiesfera que queda afuera del cono ($\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$) también está en $z \geq 0$, pero además la limita el plano $z = 0$. Igual da lo mismo: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, así que la respuesta no depende de la lectura.
> **Trampa:** el jacobiano esférico es $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (no ρ^2 ni $\rho \operatorname{sen}\varphi$); y φ se mide desde el eje z positivo, así que adentro del cono es φ de 0 a $\pi/4$, no de $\pi/4$ a $\pi/2$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = -27/2$. En el otro sentido, 27/2.
> **Planteo:** $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$, y el borde ∂T es cerrado. Como $\vec{h} = \nabla u$ es un campo de gradientes continuo, $\oint_{\partial T} \vec{h} \cdot d\vec{s} = u(\text{final}) - u(\text{inicial}) = \mathbf{0}$. Queda la circulación de $\vec{g}$.
> **El triángulo:** los vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3) están en el plano $\mathbf{x + y + z = 3}$; T es $z = 3 - x - y$ sobre $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$, de área 9/2.
> **Rotor:** $\vec{g} = (P, Q, R) = (xy, yz, xz)$, polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = \mathbf{(0 - y, 0 - z, 0 - x) = (-y, -z, -x)}$.

Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; T es un triángulo plano (regular y orientable) y ∂T es una poligonal cerrada simple, suave a trozos. Uso como superficie el mismo T, que es la más cómoda: su borde es la curva y su normal es constante.
Orientación elegida (el gráfico): recorro (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) → (3, 0, 0). Proyectado sobre xy es (3, 0) → (0, 3) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Con la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta hacia afuera del origen, a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo: $(\text{rot}\,\vec{g}) \cdot \vec{n} = -y - z - x = -(x + y + z)$, que sobre T vale **−3**. $\iint_D (-3)\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} (-3)\,dy\,dx = \int_0^3 -3(3 - x)\,dx = [-9x + \frac{3x^2}{2}]_0^3 = -27 + \frac{27}{2} = \mathbf{-27/2}$.
Resultado: $\oint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + \oint_{\partial T} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-27/2}$ con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3); en el sentido contrario cambia el signo.
Trampa: no hace falta conocer $\vec{h}$: alcanza con que sea de gradientes y continuo en una curva cerrada. Y el rotor no es constante: reemplazá z = 3 − x − y (o usá directamente x + y + z = 3) antes de integrar.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} - y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + x^2 - x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = (e - 1)/2 - 1/6 = e/2 - 2/3 \approx 0{,}692$.

La curva: $y = x - x^2 = x(1 - x)$. En el primer cuadrante es $x \in [0, 1]$: un arco de (0, 0) a (1, 0) que pasa por arriba (vértice (1/2, 1/4)), recorrido con x creciente. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (1, 0) a (0, 0). $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x - x^2\}$ en sentido **horario** (arriba de izquierda a derecha, abajo de vuelta): orientación negativa.
Hipótesis del teorema: $P = xe^{x^2} - y$ y $Q = e^{y^2}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región elemental con borde cerrado, simple y suave a trozos. Con la orientación horaria, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dA$.
Rotor: $Q'_x = 0$, $P'_y = -1$, $Q'_x - P'_y = 1$.
Doble integral: $\iint_D 1\,dA = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/6$. Entonces $\oint_{C \cup C_1} = -1/6$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 1 a 0; dy = 0 y $P(t, 0) = te^{t^2}$: $\int_{C_1} = \int_1^0 te^{t^2}\,dt = [\tfrac{1}{2}e^{t^2}]_1^0 = \tfrac{1}{2} - e/2$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1/6 - (\tfrac{1}{2} - e/2) = \mathbf{(e - 1)/2 - 1/6} = e/2 - 2/3 \approx 0{,}692$.
Control (la otra cara): $\vec{f} = \nabla(\tfrac{1}{2}e^{x^2} + G(y)) + (-y, 0)$ con $G' = e^{y^2}$. La parte gradiente da (e − 1)/2 (el arco empieza y termina en y = 0), y $\int_C -y\,dx = -\int_0^1 (x - x^2)\,dx = -1/6$ ✓.
Trampa: el arco recorrido con x creciente deja la región a la derecha: es horario. Si usás Green con signo +, te da 1/6 + (e − 1)/2 y está mal.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 4 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, 1)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 32/3$ (con $\vec{N} = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)$, la saliente).

Planteo: Σ es la mitad y ≥ 0 del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, cortada abajo por z = 0 y arriba por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$. Va en cilíndricas, con θ y z como parámetros.
Parametrización y dominio: $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$. $y \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \pi$. El techo, escrito en θ: $z \le 4 - (2\cos\theta)^2 = 4(1 - \cos^2\theta) = 4\,\text{sen}^2\theta$. Entonces $\mathbf{D = \{0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le 4\,\text{sen}^2\theta\}}$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-2\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, 0)} = (x, y, 0)$, la normal saliente del cilindro.

Orientación: la segunda componente es $2\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$: es la pedida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f} = (0, 1, 1)$ es constante y $\vec{N}$ no tiene componente z, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = 2\operatorname{sen}\theta$ (la tercera componente de $\vec{f}$ no aporta nada).
Cuenta: $\Phi = \int_0^{\pi} \int_0^{4\operatorname{sen}^2\theta} 2\operatorname{sen}\theta \, dz \, d\theta = \int_0^{\pi} 8\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta$. Con $\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta)$, primitiva $-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$: $[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}]_0^{\pi} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$. $\Phi = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$.
Resultado: $\boldsymbol{\Phi = \frac{32}{3}}$.
Control con otra parametrización: Σ es el gráfico $y = \sqrt{(4 - x^2)}$ sobre $D' = \{-2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$ del plano xz. $\vec{X}_z \times \vec{X}_x = (\frac{x}{\sqrt{(4 - x^2)}}, 1, 0)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 1$, así que $\Phi = \text{área}(D') = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = 2(8 - \frac{8}{3}) = \frac{32}{3}$ ✓ (la parametrización no es C^1 en $x = \pm 2$, que es el borde, pero la integral converge y coincide).
Trampa: el techo hay que escribirlo en θ ($4\operatorname{sen}^2\theta$); poner $z \leq 4 - r^2$ o $z \leq 4$ no tiene sentido sobre el cilindro.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), 2y\varphi(x), 4xz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(x) = 1 - 2x - e^{-2x}$ (da $\nabla\cdot\vec{f} \equiv 0$, así que el flujo por cualquier esfera centrada en el origen es 0, y $\varphi(0) = 0$).

Planteo: llamo B_r a la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$; su frontera es la esfera S_r del enunciado.
Hipótesis de Gauss: φ es C^1, así que $\varphi(x)$, $2y\varphi(x)$ y $4xz$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (no hay singularidades). S_r es una superficie cerrada y suave que encierra el sólido B_r, y con normal exterior vale $\oiint_{S_r} \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma = \iiint_{B_r} \nabla\cdot\vec{f}\, dV$. (Que el flujo sea nulo no depende de la orientación: si da 0 con la exterior, da 0 con la interior.)
Divergencia: $\partial/\partial x(\varphi(x)) = \varphi'(x)$, $\partial/\partial y(2y\varphi(x)) = 2\varphi(x)$, $\partial/\partial z(4xz) = 4x$. Entonces $\nabla\cdot\vec{f} = \varphi'(x) + 2\varphi(x) + 4x$.
Condición suficiente: si $\nabla\cdot\vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, la triple da 0 en toda bola y la condición 1 se cumple para todo $r > 0$. Pido entonces $\boldsymbol{\varphi' + 2\varphi = -4x}$.
EDO lineal: factor integrante e^{2x}: $(\varphi e^{2x})' = \varphi' e^{2x} + 2\varphi e^{2x} = -4xe^{2x}$. Por partes ($u = -4x$, $dv = e^{2x}dx$): $\int -4xe^{2x}\,dx = -2xe^{2x} + \int 2e^{2x}\,dx = -2xe^{2x} + e^{2x} + C$. Entonces $\varphi e^{2x} = -2xe^{2x} + e^{2x} + C$ y $\boldsymbol{\varphi(x) = 1 - 2x + Ce^{-2x}}$.
Condición 2: $\vec{f}(0, 0, 0) = (\varphi(0), 2 \cdot 0 \cdot \varphi(0), 0) = (\varphi(0), 0, 0)$, así que hay que pedir $\varphi(0) = 0$: $1 + C = 0$, $C = -1$.
Resultado: $\boldsymbol{\varphi(x) = 1 - 2x - e^{-2x}}$.
Control: $\varphi' = -2 + 2e^{-2x}$, y $\varphi' + 2\varphi + 4x = -2 + 2e^{-2x} + 2 - 4x - 2e^{-2x} + 4x = 0$ ✓. $\varphi(0) = 1 - 0 - 1 = 0$ ✓, y φ es C^1 (de hecho C^{∞}).
Nota: $\nabla\cdot\vec{f} = 0$ es suficiente pero no necesario. Como la divergencia depende sólo de x, el flujo por S_r se anula para todo r si y sólo si $\varphi' + 2\varphi + 4x$ es una función impar de x. El enunciado pide "una función φ", y la de divergencia nula es la natural.
Trampa: no te olvides de la condición 2: sin ella te queda toda la familia con C libre. Y ojo con $\partial/\partial y(2y\varphi(x))$: es $2\varphi(x)$, no $2y\varphi'(x)$.

30/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies $\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 18$.
Calcule $\iiint_H z \, dx dy dz$.

> **Respuesta:** $\iiint_H z \, dx\, dy\, dz = \dfrac{\mathbf{81\pi}}{\mathbf{2}} \approx 127{,}2$.
>
> **El sólido:** Σ_1: $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono doble con eje z que forma 45° con el eje; con $z \geq 0$ queda la hoja de arriba, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Σ_2 es la esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Se cortan donde $z^2 + z^2 = 18$, o sea $z = 3$ y $x^2 + y^2 = 9$: la circunferencia de radio 3 a altura 3. La región limitada sólo por esas dos superficies es el cucurucho de helado: adentro del cono ($z \geq \sqrt{(x^2 + y^2)}$) y adentro de la esfera.
> **Esféricas:** $x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho \cos\varphi$, con $|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. El cono $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es $\rho \cos\varphi = \rho \operatorname{sen}\varphi$, o sea $\varphi = \pi/4$, y "adentro del cono" es $\cos\varphi \geq \operatorname{sen}\varphi$: $\varphi \in [0, \pi/4]$. La esfera es $\rho \leq 3\sqrt{2}$, y θ da toda la vuelta, $\theta \in [0, 2\pi]$. Los límites no dependen entre sí: la región es un rectángulo en (ρ, φ, θ).
> **Integrando:** $z \cdot |J| = \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$, que se separa en producto.
> **Cuenta:** $\iiint_H z \, dV = (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi)(\int_0^{3\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho)$. En ρ: primitiva $\dfrac{\rho^4}{4}$, da $\dfrac{(3\sqrt{2})^4}{4} = \dfrac{324}{4} = 81$. En φ: primitiva $\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$, entre 0 y $\pi/4$ da $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. En θ: 2π.
> **Resultado:** $\iiint_H z \, dV = 2\pi \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 81 = \dfrac{\mathbf{81\pi}}{\mathbf{2}} \approx 127{,}2$.
> **Control en cilíndricas:** $r \in [0, 3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [r, \sqrt{(18 - r^2)}]$, $|J| = r$. En z: primitiva $\dfrac{z^2}{2}$, da $\dfrac{18 - 2r^2}{2} = 9 - r^2$. En r: $\int (9 - r^2)\, r \, dr$, primitiva $\dfrac{9r^2}{2} - \dfrac{r^4}{4}$, entre 0 y 3 da $\dfrac{81}{2} - \dfrac{81}{4} = \dfrac{81}{4}$. Por 2π: $2\pi \cdot \dfrac{81}{4} = \dfrac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Si se leyera la otra región:** la parte de la semiesfera que queda afuera del cono ($\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$) también está en $z \geq 0$, pero además la limita el plano $z = 0$. Igual da lo mismo: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, así que la respuesta no depende de la lectura.
> **Trampa:** el jacobiano esférico es $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ (no ρ^2 ni $\rho \operatorname{sen}\varphi$); y φ se mide desde el eje z positivo, así que adentro del cono es φ de 0 a $\pi/4$, no de $\pi/4$ a $\pi/2$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xz, yx, yz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

> **Respuesta:** Con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) (antihorario visto desde arriba, normal (1, 1, 1)): $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = 27/2$. En el otro sentido, $-27/2$.
> **Planteo:** $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$, y el borde ∂T es cerrado. Como $\vec{h} = \nabla u$ es un campo de gradientes continuo, $\oint_{\partial T} \vec{h} \cdot d\vec{s} = u(\text{final}) - u(\text{inicial}) = \mathbf{0}$. Queda la circulación de $\vec{g}$.
> **El triángulo:** los vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3) están en el plano **x + y + z = 3**; T es $z = 3 - x - y$ sobre $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$, de área 9/2.

Rotor: $g = (P, Q, R) = (xz, yx, yz)$, polinómico, C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = \mathbf{(z - 0, x - 0, y - 0) = (z, x, y)}$.
Hipótesis de Stokes: $\vec{g}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; T es un triángulo plano (regular y orientable) y ∂T es una poligonal cerrada simple, suave a trozos. Uso como superficie el mismo T, que es la más cómoda: su borde es la curva y su normal es constante.
Orientación elegida (el gráfico): recorro (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3) → (3, 0, 0). Proyectado sobre xy es (3, 0) → (0, 3) → (0, 0), antihorario mirando desde arriba. Con la mano derecha siguiendo ese giro el pulgar apunta hacia afuera del origen, a z positivo: $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$, integrando en dx dy.
Flujo: $(\text{rot}\ \vec{g}) \cdot \vec{n} = z + x + y$, que sobre T vale **3**. $\iint_D 3\ dx\ dy = \int_0^3 \int_0^{3-x} 3\ dy\ dx = \int_0^3 3(3 - x)\ dx = [9x - \frac{3x^2}{2}]_0^3 = 27 - \frac{27}{2} = \mathbf{27/2}$.
Resultado: $\oint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 + \oint_{\partial T} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \mathbf{27/2}$ con el sentido (3, 0, 0) → (0, 3, 0) → (0, 0, 3); en el sentido contrario cambia el signo.
Trampa: $\vec{h}$ no aporta por ser de gradientes y la curva cerrada; no intentes averiguarlo. Y el rotor depende del punto: usá x + y + z = 3 sobre T antes de integrar.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} + y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + 2x^2 - 2x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Respuesta: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1/3 + (e - 1)/2 = e/2 - 1/6 \approx 1{,}192$.

La curva: $y = 2x - 2x^2 = 2x(1 - x)$. En el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) es $x \in [0, 1]$: un arco que va de (0, 0) a (1, 0) pasando por arriba (vértice (1/2, 1/2)), con x creciente. No es cerrada: la cierro.
Cierre: C_1: segmento de (1, 0) a (0, 0). $C \cup C_1$ es el borde de $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x - 2x^2\}$: arriba de izquierda a derecha y abajo de derecha a izquierda, o sea sentido **horario** (orientación negativa).
Hipótesis del teorema: $P = xe^{x^2} + y$ y $Q = e^{y^2}$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$; D es una región elemental (regular) con borde cerrado, simple y suave a trozos. Por la orientación horaria, $\oint = -\iint_D (Q'_x - P'_y)\ dA$.
Rotor: $Q'_x = 0$, $P'_y = 1$, $Q'_x - P'_y = -1$.
Doble integral: $\iint_D (-1)\ dA = -\int_0^1 (2x - 2x^2)\ dx = -[x^2 - 2x^3/3]_0^1 = -1/3$. Con el signo de la orientación: $\oint_{C \cup C_1} = +1/3$.
Segmento: C_1: (t, 0), t de 1 a 0; dy = 0 y $P(t, 0) = te^{t^2}$: $\int_{C_1} = \int_1^0 te^{t^2}\ dt = [\tfrac{1}{2}e^{t^2}]_1^0 = \tfrac{1}{2} - e/2$.
Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1/3 - (\tfrac{1}{2} - e/2) = \mathbf{1/3 + (e - 1)/2} = e/2 - 1/6 \approx 1{,}192$.
Control (la otra cara): $\vec{f} = \nabla(\tfrac{1}{2}e^{x^2} + G(y)) + (y, 0)$, con $G'(y) = e^{y^2}$. La parte gradiente da $\tfrac{1}{2}e^1 - \tfrac{1}{2}e^0 + G(0) - G(0) = (e - 1)/2$, y $\int_C y\ dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\ dx = 1/3$ ✓.
Trampa: e^{y^2} no tiene primitiva elemental, pero $e^{y^2}\ dy$ es exacta (es dG con $G' = e^{y^2}$) y el arco empieza y termina en y = 0: ese término aporta G(0) − G(0) = 0, también si parametrizás. Con Green se ve igual: Q no aporta al rotor y en el segmento dy = 0, así que nunca hace falta integrarla.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, -1)$ a través de Σ.

Respuesta: $\Phi = 36$ (con $\vec{N} = (3 \cos\theta, 3 \operatorname{sen}\theta, 0)$, la saliente).

Planteo: Σ es la mitad $y \geq 0$ del cilindro $x^2 + y^2 = 9$, cortada abajo por z = 0 y arriba por el cilindro parabólico $z = 9 - x^2$. Va en cilíndricas, con θ y z como parámetros.

Parametrización y dominio: $X(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z)$. $y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. El techo, escrito en θ: $z \leq 9 - (3\cos\theta)^2 = 9(1 - \cos^2\theta) = 9\operatorname{sen}^2\theta$. Entonces $\mathbf{D = \{0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq z \leq 9\operatorname{sen}^2\theta\}}$.
Normal: $\vec{X}_\theta = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)} = (x, y, 0)$, la normal saliente del cilindro.
Orientación: la segunda componente es $3\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$: es la pedida, no hay que cambiar el signo.
$\vec{f}\cdot\vec{N}$: $\vec{f} = (0, 1, -1)$ es constante y $\vec{N}$ no tiene componente z, así que $\vec{f}\cdot\vec{N} = 3\operatorname{sen}\theta$ (la tercera componente de $\vec{f}$ no aporta nada).
Cuenta: $\Phi = \int_0^\pi \int_0^{9\operatorname{sen}^2\theta} 3\operatorname{sen}\theta\, dz\, d\theta = \int_0^\pi 27\operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$. Con $\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta)$, primitiva $-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$: $[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}]_0^\pi = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$. $\Phi = 27 \cdot \frac{4}{3} = 36$.
Resultado: $\Phi = 36$.
Control con otra parametrización: Σ es el gráfico $y = \sqrt{(9 - x^2)}$ sobre $D' = \{-3 \leq x \leq 3,\ 0 \leq z \leq 9 - x^2\}$ del plano xz. $\vec{X}_z \times \vec{X}_x = (\frac{x}{\sqrt{(9 - x^2)}}, 1, 0)$, segunda componente $1 > 0$ ✓. $\vec{f}\cdot\vec{N} = 1$, así que $\Phi = \text{área}(D') = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = [9x - \frac{x^3}{3}]_{-3}^{3} = 2(27 - 9) = 36$ ✓ (la parametrización no es C^1 en $x = \pm 3$, que es el borde, pero la integral converge y coincide).
Trampa: el techo hay que escribirlo en θ ($9\operatorname{sen}^2\theta$); poner $z \leq 9 - r^2$ o $z \leq 9$ no tiene sentido sobre el cilindro.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (2x\varphi(y), \varphi(y), 4yz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Respuesta: $\varphi(y) = 1 - 2y - e^{-2y}$ (también sirve $\varphi \equiv 0$, ver la observación).
Divergencia: $\nabla \cdot \vec{f} = \partial(2x\varphi(y))/\partial x + \partial\varphi(y)/\partial y + \partial(4yz)/\partial z = 2\varphi(y) + \varphi'(y) + 4y$.
Gauss: la esfera S_r: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es cerrada, encierra la bola B_r, y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ($\varphi \in C^1$). Con normal exterior, $\Phi(S_r) = \iiint_{B_r} (2\varphi + \varphi' + 4y)\, dV$. La orientación no importa porque se pide flujo 0.
Condición suficiente: si $\nabla \cdot \vec{f} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$, el flujo es 0 para todo $r > 0$. Pedimos entonces $\varphi' + 2\varphi = -4y$.
EDO lineal: factor integrante e^{2y}: $(\varphi\, e^{2y})' = -4y\, e^{2y}$. Por partes ($u = -4y$, $dv = e^{2y}\, dy$): $\int -4y\, e^{2y}\, dy = -2y\, e^{2y} + \int 2e^{2y}\, dy = -2y\, e^{2y} + e^{2y} + C$. Dividiendo por e^{2y}: $\varphi(y) = 1 - 2y + C\, e^{-2y}$.
Condición 2: $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, \varphi(0), 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$.
Resultado: $\varphi(y) = 1 - 2y - e^{-2y}$. Control: $\varphi' = -2 + 2e^{-2y}$ y $\varphi' + 2\varphi = -2 + 2e^{-2y} + 2 - 4y - 2e^{-2y} = -4y$ ✓; $\varphi(0) = 0$ ✓; φ es C^1 ✓.
Observación: $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ alcanza, pero no es necesario: basta que $\iiint_{B_r} \operatorname{div}\vec{f}\, dV = 0$ para todo r. Por ejemplo $\varphi \equiv 0$ también cumple las dos condiciones (queda $\operatorname{div}\vec{f} = 4y$, impar en y, que integra 0 en toda bola centrada en el origen). El enunciado pide "una" φ: cualquiera de las dos vale bien justificada; la de la EDO es la que busca el ejercicio.
Trampa: la condición 2 sólo involucra la segunda componente: la primera y la tercera ya son 0 en el origen para cualquier φ.

10/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcular el volumen de la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 - 4y \le z \le 5 + 2x^2 + y^2\}$.

> **Respuesta:** $V = 81\pi/2$ ($\approx 127{,}23$).
>
> **Planteo:** H está entre un piso, $z = 3x^2 + 2y^2 - 4y$, y un techo, $z = 5 + 2x^2 + y^2$ (dos paraboloides que abren hacia arriba). Sobre cada punto (x, y) hay sólido sólo donde piso $\le$ techo, así que $V = \iint_D$ (techo − piso) dxdy, con D la sombra de H en el plano xy.
> **Dónde se cortan (la proyección):** techo − piso $= 5 + 2x^2 + y^2 - 3x^2 - 2y^2 + 4y = 5 - x^2 - y^2 + 4y$. Completando cuadrados, $-(y^2 - 4y) = -(y - 2)^2 + 4$, así que techo − piso $= 9 - x^2 - (y - 2)^2$. Eso es ≥ 0 si y sólo si $x^2 + (y - 2)^2 \le 9$: **D es el disco de centro $(0, 2)$ y radio 3**. Los paraboloides se cortan en una curva que se proyecta sobre la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 9$; afuera del disco el piso queda por encima del techo y no hay sólido. H es un cuerpo acotado con forma de lente, con el piso abajo y el techo arriba.
> **Coordenadas:** cilíndricas con el eje corrido a la recta $x = 0$, $y = 2$: $x = r\cos\theta$, $y = 2 + r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$. La traslación no cambia el jacobiano: $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, z)$ tiene determinante $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.
> Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 3$ (el disco D) y, en z, de piso a techo; integrando primero en z queda la altura techo − piso $= 9 - r^2$.
> **Cuenta:** $V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$. Primitiva en r: $\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}$, entre 0 y 3: $\frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4}$. La integral en θ da 2π.
> **Resultado: $V = \dfrac{81\pi}{2}$** $\approx 127{,}23$.
> **Control (cartesianas, otro orden):** con $u = y - 2$ la altura es $9 - u^2 - x^2$ sobre $u^2 + x^2 \le 9$. Primero en x, entre $\pm\sqrt{9 - u^2}$: $2(9 - u^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(9 - u^2)^{3/2} = \frac{4}{3}(9 - u^2)^{3/2}$. Después en u, con $u = 3\operatorname{sen} t$: $\frac{4}{3}\cdot 81 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = 108 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{81\pi}{2}$ ✓.
> **Trampa:** usar polares centradas en el origen con $r \le 3$ (el disco está corrido a $(0, 2)$), o integrar sólo el techo como si el piso fuera $z = 0$.

Ejercicio 2. Considere la familia de curvas $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Halle la curva Γ que pasa por el punto $(-1, 0)$ y es ortogonal a las curvas de la familia $\mathscr{F}$.
b) Sea D la región encerrada por Γ y Γ^*, donde Γ^* es la curva de ecuación $y = -3$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{-x^3} - y^2, \cos(y^5) + xy)$ a lo largo de ∂D. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

> **Respuesta:** a) Γ: $y = 1 - x^2$. b) Con ∂D en sentido antihorario: $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s}$ = **$-224/5$** $= -44{,}8$ (en sentido horario, $224/5$).

a) EDO de la familia: derivando $\frac{x^2}{2} + (y-1)^2 = c$ respecto de x (c desaparece): $x + 2(y-1)y' = 0$, o sea $y' = -\frac{x}{2(y-1)}$.

EDO de las ortogonales: pendiente inversa y opuesta: $\mathbf{y' = \frac{2(y-1)}{x}}$.

Resolución: es de variables separables. Para $x \neq 0$ e $y \neq 1$: $\frac{dy}{y-1} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1| = 2\ln|x| + k \Rightarrow y - 1 = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$.

Condición inicial: por $(-1, 0)$: $-1 = K$. **Γ: $y = 1 - x^2$.** Control: la parábola entera cumple $xy' = 2(y-1)$ (los dos lados valen $-2x^2$), y su tangente $(1, -2x)$ es paralela a $\nabla(\frac{x^2}{2} + (y-1)^2) = (x, 2(y-1)) = (x, -2x^2) = x(1, -2x)$: corta a cada elipse de la familia en ángulo recto ✓.

b) La región: $1 - x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm 2$. $D = \{(x, y) : -2 \le x \le 2, -3 \le y \le 1 - x^2\}$, compacta, con borde cerrado y simple formado por el segmento de $y = -3$ y el arco de parábola.

Orientación elegida (el "gráfico"): sentido **antihorario**: por $y = -3$ de $(-2, -3)$ a $(2, -3)$, y por la parábola de $(2, -3)$ a $(-2, -3)$ pasando por el vértice $(0, 1)$.

Hipótesis de Green: $P = e^{-x^3} - y^2$ y $Q = \cos(y^5) + xy$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Parametrizar no sirve: e^{-x^3} y $\cos(y^5)$ no tienen primitiva elemental.

Rotor: $Q'_x = y$, $P'_y = -2y$, así que $\mathbf{Q'_x - P'_y = 3y}$.

Cuenta: $\oint^+ \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 3y\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{1-x^2} 3y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} [\frac{3y^2}{2}]_{-3}^{1-x^2} dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{2} ((1-x^2)^2 - 9)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-2}^{2} (x^4 - 2x^2 - 8)\,dx = \frac{3}{2}[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 8x]_{-2}^{2} = \frac{3}{2}\cdot 2(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16) = 3\cdot(-\frac{224}{15}) = -\frac{224}{5}$.

Resultado: antihorario, $\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \mathbf{-224/5} = -44{,}8$.

Trampa: en a), para las ortogonales se invierte *y* se cambia el signo de la pendiente; usar la misma pendiente da otra vez la familia. En b), P'_y de $-y^2$ es $-2y$ y el rotor queda $y + 2y = 3y$.

Ejercicio 3.

Sea Σ la superficie definida por

$\Sigma : y + x^2 = 4,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le x.$

Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (-1, x, y^2)$ a través de Σ, orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa.

Respuesta: $\Phi = -8/3$ (con $\vec{N} = (2x, 1, 0)$).

Planteo: $y + x^2 = 4$ es el cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ (generatrices paralelas al eje z). $y \ge 0$ da $-2 \le x \le 2$, pero $0 \le z \le x$ sólo tiene puntos si $x \ge 0$: queda $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le x$.

Parametrización: $\vec{X}(x, z) = (x, 4 - x^2, z)$, $D = \{0 \le x \le 2, 0 \le z \le x\}$.

Normal: $\vec{X}_x = (1, -2x, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_z = (-2x, -1, 0)$.

Orientación: esa tiene primera componente $-2x \le 0$, es la opuesta. **Cambio el orden**: $\vec{N} = \vec{X}_z \times \vec{X}_x = (2x, 1, 0)$, con primera componente $2x \ge 0$ en D ✓ (vale 0 sólo en $x = 0$, por eso el enunciado dice "no negativa").

Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (-1, x, (4 - x^2)^2)$; $\vec{f}\cdot\vec{N} = -2x + x + 0 = -x$.

Cuenta: $\Phi = \int_0^2 \int_0^x (-x)\,dz\,dx = -\int_0^2 x^2\,dx = -[\frac{x^3}{3}]_0^2 = -\frac{8}{3}$.

Resultado: $\Phi = \mathbf{-8/3}$.

Control con Gauss: $\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ y $\vec{f}$ es C^1. Sólido $W = \{0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - x^2, 0 \le z \le x\}$; en

Σ su normal saliente es (2x, 1, 0), la pedida. Caras: y = 0 ($-\vec{j}$): $\vec{f}\cdot(-\vec{j}) = -x$, $\int_0^2 \int_0^x -x\, dz\, dx = -\frac{8}{3}$; z = 0 ($-\vec{k}$): $-y^2$; z = x (normal saliente (–1, 0, 1)): $1 + y^2$. Esas dos juntas dan $\iint_D 1\, dA = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$ (la cara x = 0 se reduce a un segmento). Gauss: $\Phi - \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 0$, $\Phi = -\frac{8}{3}$ ✓.

Trampa: tomar x entre –2 y 2 (por y ≥ 0) sin ver que z ≤ x corta la mitad con x < 0.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - e^z, 2xy, 2z - xe^z)$. Calcule $\int_C \vec{f}.d\vec{s}$, con
$C : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 1,\ y \geq 0,$
orientada de modo tal que la coordenada z resulte creciente.

Respuesta: $\vec{f} = \nabla U$ con $U = xy^2 - xe^z + z^2$; C va de (2, 0, –1) a (–2, 0, 3); $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2e^3 + 8 + 2/e \approx 48{,}91$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $\vec{f} = (P, Q, R) = (y^2 - e^z, 2xy, 2z - xe^z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. $\text{rot}\, \vec{f} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 0, -e^z + e^z, 2y - 2y) = \vec{0}$. $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, así que $\vec{f}$ es de gradientes.

Potencial: $U'_x = y^2 - e^z \Rightarrow U = xy^2 - xe^z + a(y, z)$. $U'_y = 2xy + a'_y = 2xy \Rightarrow a = b(z)$. $U'_z = -xe^z + b'(z) = 2z - xe^z \Rightarrow b = z^2$. $U = xy^2 - xe^z + z^2$.

La curva: cilindro $x^2 + y^2 = 4$ cortado por el plano z = 1 – x, con y ≥ 0: media elipse. $\vec{X}(t) = (2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 1 - 2\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$ ($y = 2 \operatorname{sen} t \geq 0$). Como $z'(t) = 2 \operatorname{sen} t \geq 0$, z crece con t: el sentido pedido es el de t creciente, de $\vec{X}(0) = (2, 0, -1)$ a $\vec{X}(\pi) = (-2, 0, 3)$.

Cuenta: $U(-2, 0, 3) = 0 + 2e^3 + 9$; $U(2, 0, -1) = 0 - 2e^{-1} + 1$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2e^3 + 9 - 1 + 2e^{-1} = \mathbf{2e^3 + 8 + \frac{2}{e}} \approx 48{,}91$.

Trampa: C es un arco abierto (no la elipse entera), así que no da 0: hay que identificar bien cuál extremo es el inicial. El de z menor es (2, 0, –1).

Ejercicio 5. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y + \varphi(z), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 - z = 0,\ z \leq 9.$
Indique en un gráfico la orientación considerada para la superficie.

Respuesta: Con la normal exterior al sólido (tercera componente negativa): $\Phi = 81\pi/2$. Con la orientación opuesta (hacia arriba): $\Phi = -81\pi/2$.

Planteo: Σ: $z = x^2 + y^2$, z ≤ 9, es un paraboloide circular abierto por arriba (borde: la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en z = 9). Como φ no se conoce, conviene Gauss: cerramos con la tapa T: z = 9, $x^2 + y^2 \leq 9$, y trabajamos en $H = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$.

Orientación elegida (gráfico): tomo en Σ la normal **exterior a H**, la que apunta hacia afuera del paraboloide y hacia abajo (tercera componente negativa); en el dibujo, las flechas salen del "vaso" por la pared. Con esa orientación, Σ ∪ T con la tapa hacia arriba es la frontera de H con normal saliente.

Hipótesis del teorema: $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \vec{f} = (x, y + \varphi(z), z)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Σ ∪ T es cerrada, suave a trozos, y acota H.

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{f} = 1 + \partial_y(y + \varphi(z)) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ (φ(z) no depende de y).

Triple integral: en cilíndricas, $H = \{0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 3,\ r^2 \leq z \leq 9\}$. $\iiint_H 3\, dV = 3\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = 3\cdot 2\pi\left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^3 = 6\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{243\pi}{2}$.

Tapa: en z = 9 con normal (0, 0, 1): $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = z = 9$, área 9π, $\Phi_T = 81\pi$.

Resultado: $\Phi_\Sigma = \frac{243\pi}{2} - 81\pi = \mathbf{\frac{81\pi}{2}}$ con la normal exterior. Si se elige la normal hacia arriba (hacia el eje z), el flujo es $\mathbf{-\frac{81\pi}{2}}$.

Control directo: con $\vec{N} = (-2x, -2y, 1)$ (hacia arriba): $\vec{f}\cdot\vec{N} = -2x^2 - 2y^2 - 2y\varphi(z) + z$, con $z = x^2 + y^2$. Como $\varphi(z) = \varphi(r^2)$ no depende de θ, el término $-2y\varphi$ es impar en y y se anula sobre el disco. Queda $\iint(-x^2 - y^2)\,dA = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\,dr\,d\theta = -\frac{81\pi}{2}$ ✓ (y con la exterior, $+\frac{81\pi}{2}$).

Trampa: el enunciado deja elegir la orientación pero hay que decirla (y dibujarla): el número sin orientación no vale. Y no olvidarse de restar la tapa.

2/7/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = 6x^2y - x^3y - x^2y^2$ en la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
y clasifíquelos.

> **Respuesta:** En D hay un único punto crítico, (3, 3/2), y es un máximo local con f(3, 3/2) = 81/4.
>
> **Planteo:** f es polinómica y D es abierto, así que los candidatos en D son los puntos de D con $\nabla f = 0$.
> **Derivadas:** $f_x = 12xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(12 - 3x - 2y)$; $f_y = 6x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(6 - x - 2y)$.
> **Sistema en D:** como $x > 0$ e $y > 0$, $xy \neq 0$ y $x^2 \neq 0$; queda $3x + 2y = 12$ y $x + 2y = 6$. Restando: $2x = 6$, $x = 3$, y entonces $y = 3/2$. **Punto: (3, 3/2)**, que está en D. (Fuera de D, ∇f también se anula en todo el eje $x = 0$ y en (6, 0), pero no pertenecen a D y no se analizan.)
> **Derivadas segundas:** $f_{xx} = 12y - 6xy - 2y^2$, $f_{xy} = 12x - 3x^2 - 4xy$, $f_{yy} = -2x^2$.
> **Criterio del hessiano:** f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si $\det H = 0$ el criterio no decide.
> **En (3, 3/2):** $f_{xx} = 18 - 27 - 9/2 = -27/2$; $f_{xy} = 36 - 27 - 18 = -9$; $f_{yy} = -18$. $\det H = (-27/2)(-18) - 81 = 243 - 81 = 162 > 0$ y $f_{xx} < 0$: **máximo local**.
> **Valor:** $f = x^2y(6 - x - y) = 9 \cdot (3/2) \cdot (3/2) =$ **81/4**.
> **Trampa:** dividir por x o por y sin decir por qué se puede. Acá se puede justamente porque D excluye los ejes; si el dominio fuera $\mathbb{R}^2$, habría que estudiar aparte la recta $x = 0$ de puntos críticos (no aislados), donde el hessiano tiene det = 0.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$f(x, y) = \sqrt{(x + y)}\ \ln(2 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x + y \geq 0, x^2 + y^2 < 2\}$: medio disco abierto de radio $\sqrt{2}$ con el diámetro sobre $y = -x$ incluido, salvo sus extremos (1, –1) y (–1, 1). No es abierto, no es cerrado, es conexo (y acotado). b) $N_0 = \{x + y = 0, x^2 + y^2 < 2\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$: el diámetro abierto de (–1, 1) a (1, –1) más la semicircunferencia de radio 1 del lado $x + y \geq 0$, con sus extremos $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2)$.
>
> **a) Condiciones:** $\sqrt{(x + y)}$ pide $x + y \geq 0$; $\ln(2 - x^2 - y^2)$ pide $2 - x^2 - y^2 > 0$, o sea $x^2 + y^2 < 2$.
> **D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x^2 + y^2 < 2\}$: el semiplano cerrado por encima de la recta $y = -x$ intersecado con el disco abierto de centro el origen y radio $\sqrt{2}$. La recta corta a la circunferencia en (1, –1) y (–1, 1).
> **Gráfico:** el medio disco del lado del 1° cuadrante; el diámetro sobre $y = -x$ en trazo lleno (pertenece), la semicircunferencia en punteado (no pertenece) y los puntos (1, –1) y (–1, 1) huecos.
> **¿Abierto?** No: $(0, 0) \in D$ ($x + y = 0$ y $0 < 2$), pero toda bola centrada en el origen contiene puntos $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ con $x + y < 0$, que no son de D.
> **¿Cerrado?** No: (1, 1) es punto frontera (los $(1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ están en D) y no es de D porque $x^2 + y^2 = 2$.
> **¿Conexo?** Sí: el semiplano y el disco son convexos, su intersección también; y un convexo es arcoconexo porque el segmento entre dos puntos cualesquiera queda adentro. (Además es acotado,

pero no compacto por no ser cerrado.)

b) Planteo: $N_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}$. En D los dos factores están definidos, y un producto vale 0 si y sólo si se anula alguno de los factores.

Primer factor: $\sqrt{(x + y)} = 0 \iff x + y = 0$. Dentro de D es el diámetro $\{y = -x, x^2 + y^2 < 2\}$, de (–1, 1) a (1, –1) sin los extremos.

Segundo factor: $\ln(2 - x^2 - y^2) = 0 \iff 2 - x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$, pero sólo los puntos con $x + y \geq 0$ (tienen que ser de D): la semicircunferencia de radio 1 del lado del 1° cuadrante, de $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ a $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ pasando por (1, 0) y (0, 1), con los extremos incluidos (caen justo sobre el diámetro).

Resultado: $N_0 = \{x + y = 0, x^2 + y^2 < 2\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, x + y \geq 0\}$. Gráfico: el diámetro y, apoyada sobre él, la semicircunferencia de radio 1.

Trampa: dibujar la circunferencia unitaria entera (la mitad con $x + y < 0$ no está en D) u olvidarse del diámetro, que también es nivel 0 porque ahí se anula la raíz.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$, la ecuación
$e^{y+z} + xz^2 + y = 1$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1. Encuentre los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 1), \check{v}) = 0$.

Respuesta: $\nabla f(1, 1) = (-1/2, -3/2)$. $f'((1, 1), \check{v}) = 0$ para $\check{v} = \pm(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$.

Planteo: $F(x, y, z) = e^{y+z} + xz^2 + y - 1$, $P = (1, -1, 1)$, queremos $y = f(x, z)$. Ojo: el dominio de f es el plano (x, z), y el punto (1, 1) del enunciado es (x_0, z_0).

Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = e^0 + 1 - 1 - 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) La variable que se despeja es y: $F_y = e^{y+z} + 1$, $F_y(P) = 1 + 1 = 2 \neq 0$ ✓. Entonces $y = f(x, z)$ es C^1 en un entorno de (1, 1), con $f(1, 1) = -1$.

Derivadas: $F_x = z^2$, $F_x(P) = 1$. $F_z = e^{y+z} + 2xz$, $F_z(P) = 1 + 2 = 3$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_y} = -1/2$, $f_z = -\dfrac{F_z}{F_y} = -3/2$. **$\nabla f(1, 1) = (-1/2, -3/2)$**, paralelo a (1, 3).

Derivada direccional: f es C^1, luego diferenciable, y $f'((1, 1), \check{v}) = \nabla f(1, 1) \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-a/2 - 3b/2 = 0$, o sea $a = -3b$. Con $a^2 + b^2 = 1$: $10b^2 = 1$.

Resultado: $\check{v} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$ y $\check{v} = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.

Trampa: el gradiente de f tiene componentes en x y en z (no en y, que es la variable dependiente). Si derivás respecto de y estás calculando otra cosa.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
Sabiendo que $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$ es el polinomio de Taylor de orden 1 de g en (0, 2, 0), halle la aproximación lineal de f alrededor del punto (1, 1).

Respuesta: $f(1, 1) = 8$, $\nabla f(1, 1) = (-1, 5)$. $L(x, y) = 8 - (x - 1) + 5(y - 1) = -x + 5y + 4$.

Datos de g: el polinomio de Taylor de orden 1 en (0, 2, 0) es $g(0, 2, 0) + \nabla g(0, 2, 0) \cdot (u, v - 2, w)$. Con $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$: $g(0, 2, 0) = p(0, 2, 0) = 4 + 4 = 8$ y **$\nabla g(0, 2, 0) = (-1, 2, -1)$**.

El punto interior: $(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ en (1, 1) da (0, 2, 0) ✓, así que $f(1, 1) = 8$.

Hipótesis: $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y la función interior es polinómica, así que f es C^1, diferenciable en (1, 1), y su aproximación lineal es $L(x, y) = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1)$.

Jacobiana interior en (1, 1): $u = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (2, -2)$; $v = x + y$ da (1, 1); $w = x - y$ da (1, –1).

Cuenta: $f'_x = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -1$; $f'_y = (-1)(-2) + 2 \cdot 1 + (-1)(-1) = 5$. **$\nabla f(1, 1) = (-1, 5)$**.

Resultado: $L(x, y) = 8 - (x - 1) + 5(y - 1)$, o desarrollado, $-x + 5y + 4$.

> **Trampa:** $g(0, 2, 0)$ no es el término independiente 4: hay que evaluar p en el punto (el $2v$ aporta 4 más). Lo mismo pasa con cualquier Taylor que venga desarrollado y no en potencias de $(v - 2)$.

Ejercicio 5. Halle los puntos P de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie

$\vec{X} = (uv, u + v, u - v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

en $Q = (1, 2, 0)$.

> **Respuesta:** $P_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y $P_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Planos tangentes: $-x + y = \sqrt{2}$ y $-x + y = -\sqrt{2}$ (ambos paralelos a $-x + y = 1$, el tangente en Q).
>
> **Paso 1, el parámetro de Q:** $\vec{X}(u, v) = (1, 2, 0)$ pide $u + v = 2$, $u - v = 0$, de donde $u = v = 1$, y se comprueba $uv = 1$ ✓.
> **Paso 2, normal en Q:** $\vec{X}_u = (v, 1, 1) = (1, 1, 1)$, $\vec{X}_v = (u, 1, -1) = (1, 1, -1)$ en $(1, 1)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot(-1) - 1\cdot1, 1\cdot1 - 1\cdot(-1), 1\cdot1 - 1\cdot1) = (-2, 2, 0) \neq \vec{0}$, así que Q es punto regular y el plano tangente existe; su normal es $\vec{n} = (-1, 1, 0)$. Plano tangente en Q: $-(x - 1) + (y - 2) = 0$, o sea $-x + y = 1$.
> **Paso 3, normal de la esfera:** Σ es el conjunto de nivel 1 de $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, que es C^1 con $\nabla G = (2x, 2y, 2z) \neq \vec{0}$ sobre Σ (el origen no está en Σ). Entonces la normal en $P = (x, y, z)$ es $\nabla G(P) = 2P$.
> **Paso 4, paralelismo:** $P = \lambda(-1, 1, 0)$ con $|P| = 1$: $2\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Quedan **$P_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$** y **$P_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$**.
> **Planos:** en P_1, $-(x + 1/\sqrt{2}) + (y - 1/\sqrt{2}) = 0$, o sea $-x + y = \sqrt{2}$; en P_2, $-x + y = -\sqrt{2}$. Ninguno coincide con $-x + y = 1$, así que son paralelos de verdad.
> **Trampa:** son **dos** puntos (antípodas). Quedarse sólo con λ positivo pierde la mitad de la respuesta.

2/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las superficies de ecuaciones
$\Sigma_1 : 3x^2 + 3y^2 - z = 5$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 - z = -3$.
Suponga que la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al eje z.

> **Respuesta:** $M = 64\pi k/3$ ($\delta = k(x^2 + y^2)$, $k > 0$).
>
> **Planteo:** $M = \iiint_H \delta \, dV$, con H la región acotada entre Σ_1 y Σ_2.
> **Las superficies:** Σ_1: $z = 3(x^2 + y^2) - 5$ es un paraboloide que abre hacia arriba con vértice $(0, 0, -5)$. Σ_2: $z = x^2 + y^2 + 3$ es otro paraboloide hacia arriba con vértice $(0, 0, 3)$, más abierto que Σ_1.
> **Dónde se cortan:** $3(x^2 + y^2) - 5 = x^2 + y^2 + 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, a altura $z = 7$. Es la circunferencia de radio 2 en el plano $z = 7$. Para $x^2 + y^2 < 4$ vale $3(x^2 + y^2) - 5 < x^2 + y^2 + 3$ (porque $2(x^2 + y^2) < 8$), así que Σ_1 va abajo y Σ_2 arriba. H es la región encerrada: proyección el disco $x^2 + y^2 \le 4$, piso Σ_1, techo Σ_2.
> **Densidad:** la distancia de (x, y, z) al eje z es $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, su cuadrado es $x^2 + y^2$: $\delta = k(x^2 + y^2) = kr^2$.
> **Coordenadas:** cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r ($dV = r\,dz\,dr\,d\theta$). Rangos: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$, $3r^2 - 5 \le z \le r^2 + 3$.
> **Cuenta:** $M = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{3r^2-5}^{r^2+3} r^2 \cdot r \, dz\,dr\,d\theta$. En z: $r^3 \cdot [(r^2 + 3) - (3r^2 - 5)] = r^3(8 - 2r^2)$. En r: primitiva $2r^4 - \frac{r^6}{3}$, entre 0 y 2: $32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$. En θ: 2π.
>
> **Resultado:** $\mathbf{M = \frac{64\pi k}{3}}$.
>
> **Control (orden dr dz):** por tajadas $z = cte$, la integral en r de $2\pi r^3$ da $\frac{\pi r^4}{2}$. Para $-5 \le z \le 3$ sólo manda Σ_1: $0 \le r^2 \le \frac{z+5}{3}$, y da $\int_{-5}^{3} \frac{\pi}{2}(\frac{z+5}{3})^2 \, dz = \frac{256\pi}{27}$. Para $3 \le z \le 7$ es una corona: $z - 3 \le r^2 \le \frac{z+5}{3}$, y da $\frac{320\pi}{27}$. Suma: $\frac{576\pi}{27} = \frac{64\pi}{3}$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje z al cuadrado es $x^2 + y^2$, no $x^2 + y^2 + z^2$ (eso es al origen). Y no te olvides del jacobiano r: el integrando queda r^3, no r^2.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

> **Respuesta:** $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 7/3$.
>
> **Planteo:** $P = \varphi(y) + y^2$, $Q = x\varphi'(y) + xy$. Como $\varphi \in C^2$, φ' es C^1 y P, Q son C^1 en $\mathbb{R}^2$ (por eso piden C^2 y no C^1).
> **Rotor escalar:** $Q'_x = \varphi'(y) + y$, $P'_y = \varphi'(y) + 2y$, $\mathbf{Q'_x - P'_y = -y}$. No es de gradientes, pero φ' se cancela.
> **Cierre:** Γ va de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ y de B a $C = (2, 0)$. Agrego S, el segmento de C a A sobre el eje x. A $\to$ B $\to$ C $\to$ A sube, baja y vuelve por abajo hacia la izquierda: es el borde del triángulo $D = \{0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - y\}$ en **sentido horario**.
> **Hipótesis de Green:** D es regular, su borde es cerrado, simple y C^1 a trozos, $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^2 \supset D$; por ser horario, $\oint_{\Gamma \cup S} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\iint_D (-y)\,dA = \iint_D y \, dA$.

Doble integral: $\iint_D y\,dA = \int_0^1 y\,[x]_y^{2-y}\,dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\,dy = [y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Segmento: S: (t, 0), t de 2 a 0, derivada (1, 0); P(t, 0) = φ(0) + 0 = 1, así que $\int_S = \int_2^0 1\,dt = -2$. Acá se usa el dato φ(0) = 1.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - (-2) =$ **7/3**.

Control: (φ(y), xφ′(y)) = ∇(xφ(y)), que de A a C aporta 2φ(0) − 0 = 2. Lo que queda, $\int y^2\,dx + xy\,dy$: en AB (x = y = t) es $\int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}$; en BC (x = 1 + t, y = 1 − t) es $\int_0^1 (-2t + 2t^2)\,dt = -\frac{1}{3}$. Total $2 + \frac{1}{3} =$ 7/3 ✓.

Trampa: A → B → C → A es horario. Y sobre el eje x no te olvides de φ(0): el segmento no da 0.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Respuesta: Con normal hacia arriba ($\vec{N} = (2x, 2y, 1)$): Φ = 9π/4. Con la opuesta, −9π/4.

Planteo: Σ: $z = 9 - x^2 - y^2$, paraboloide con vértice (0, 0, 9) que abre hacia abajo. En el primer octante: x, y ≥ 0 y z ≥ 0, o sea $x^2 + y^2 \le 9$. Es un gráfico sobre D = cuarto de disco de radio 3 (x, y ≥ 0). $\vec{X}(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$, (x, y) ∈ D.

Normal: $\vec{X}_x = (1, 0, -2x)$, $\vec{X}_y = (0, 1, -2y)$, $\vec{X}_x \times \vec{X}_y = (2x, 2y, 1)$.

Orientación elegida: la de $\vec{N} = (2x, 2y, 1)$: tercera componente 1 > 0, normal hacia arriba, que en el paraboloide es hacia afuera del sólido que encierra con los planos coordenados. En el gráfico: el cuarto de paraboloide con flechitas que en el vértice (0, 0, 9) apuntan según $\vec{k}$ y en el borde, por ejemplo en (3, 0, 0), según (6, 0, 1) (casi horizontales, hacia afuera).

Producto escalar: $\vec{f}(\vec{X}) = (2yz, -2xz, 1)$; $\vec{f}\cdot\vec{N} = 4xyz - 4xyz + 1 = 1$. Las dos primeras componentes se cancelan solas.

Cuenta: $\Phi = \iint_D 1\,dx\,dy =$ área de D. En polares: $\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot[\frac{r^2}{2}]_0^3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{2} = \frac{9\pi}{4}$.

Resultado: con la normal hacia arriba, Φ = **9π/4** (con la orientación opuesta sería −9π/4).

Control con Gauss: $\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ ($\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$). Cierro con los tres planos coordenados, normales salientes $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$. En x = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{i}) = -2yz$, $\int_0^3\int_0^{9-y^2} -2yz\,dz\,dy = -\int_0^3 y(9 - y^2)^2\,dy$ (primitiva de $y(9 - y^2)^2$: $-\frac{(9 - y^2)^3}{6}$) $= -\frac{729}{6} = -\frac{243}{2}$. En y = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{j}) = 2xz$, por simetría $+\frac{243}{2}$. En z = 0: $\vec{f}\cdot(-\vec{k}) = -1$, da −9π/4. Gauss: Φ − 9π/4 = 0, así que Φ = 9π/4 ✓.

Trampa: el enunciado no fija la orientación y por eso pide el gráfico: si no la indicás, el signo no está justificado.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial

$\vec{X} = (t\cos\frac{\pi t}{2}, t\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{2}, t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$

que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1.

Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz - e^y, 2z + xy)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a t ∈ [−1, 0], de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1). Con $U = xyz + x^3 - e^y + z^2$, la circulación es U(B) − U(A) = 0 − (−e) = e.

El arco: $\|\dot{X}(t)\|^2 = t^2\cos^2(\pi t/2) + t^2\text{sen}^2(\pi t/2) + (t+1)^2 = 2t^2 + 2t + 1$. Estar en la bola cerrada de radio 1 es $2t^2 + 2t + 1 \le 1 \Leftrightarrow 2t(t+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 0$. Extremos: $\vec{X}(-1) = (-\cos(-\pi/2), -\text{sen}(-\pi/2), 0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{X}(0) = (0, 0, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (0, 1, 0) a B = (0, 0, 1).

¿Es de gradientes? $\vec{f} = (yz + 3x^2, xz - e^y, 2z + xy)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = x - x = 0$; $P'_z - R'_x = y - y = 0$; $Q'_x - P'_y = z - z = 0$. rot $\vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.

Potencial: $U'_x = yz + 3x^2 \Rightarrow U = xyz + x^3 + h(y, z)$. $U'_y = xz + h'_y = xz - e^y \Rightarrow h = -e^y + k(z)$. $U'_z = xy + k'(z) = 2z + xy \Rightarrow k = z^2$. **$U = xyz + x^3 - e^y + z^2$.**

Circulación: $U(B) = 0 + 0 - e^0 + 1 = 0$; $U(A) = 0 + 0 - e + 0 = -e$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - (-e) =$ **e**.

Trampa: el recorte da $t \in [-1, 0]$ (no $[0, 1]$): la desigualdad $2t(t+1) \le 0$ se cumple entre las raíces. Y en $\vec{X}(-1)$, $\text{sen}(-\pi/2) = -1$, así que $y = (-1)(-1) = 1$.

Ejercicio 5. Sean C la línea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto (0, 0) y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x\,dxdy$.

Respuesta: C: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ (circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2). $\iint_D x\,dxdy = -8\pi$.

Línea de campo (EDO): $x' = -y$, $y' = x + 2$, así que $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{-y}$. Separando: $y\,dy = -(x+2)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{(x+2)^2}{2} + c \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = k$. Por (0, 0): k = 4. **C: $(x+2)^2 + y^2 = 4$**. Control: $\frac{d}{dt}[(x+2)^2 + y^2] = 2(x+2)(-y) + 2y(x+2) = 0$ ✓. (El campo se anula en (−2, 0), el centro: ahí no pasa ninguna línea de campo, pero no molesta porque lo que se integra es x sobre D, no el campo.)

La región: C es la circunferencia de centro (−2, 0) y radio 2; está toda en el semiplano $x \le 0$ y toca al eje y sólo en el origen. D es el disco **$D = \{(x+2)^2 + y^2 \le 4\}$**.

Cambio de variables: polares centradas en el centro, $x = -2 + r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, con $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Es una traslación seguida de polares: jacobiano $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$.

Cuenta: $\iint_D x\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = -2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr + \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \int_0^2 r^2\,dr$. Primero: $-2 \cdot 2\pi \cdot [\frac{r^2}{2}]_0^2 = -2 \cdot 2\pi \cdot 2 = -8\pi$. Segundo: $[\text{sen}\,\theta]_0^{2\pi} = 0$, se anula.

Resultado: $\iint_D x\,dxdy =$ **-8π**. Da negativo, y está bien: D está entero en $x \le 0$. (Es $\bar{x} \cdot$ área $= (-2) \cdot 4\pi$.)

Control con polares en el origen: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ es $x^2 + y^2 = -4x$, o sea $r = -4\cos\theta$, que pide $\cos\theta \le 0$: $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{-4\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta \cdot \frac{(-4\cos\theta)^3}{3}\,d\theta = -\frac{64}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = -8\pi$ ✓.

Trampa: con polares en el origen, θ no va de 0 a 2π ni r hasta 2: el disco no contiene al origen en su interior. Y no hay que tachar el signo: el resultado negativo es correcto.

3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado y/o conexo.

> **Respuesta:** $h(x, y) = 9x(y - x^2)$. $A = \{x = 0\} \cup \{y = x^2\}$ (eje y más parábola): cerrado, no abierto, conexo. $B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$ (arriba de la parábola a la derecha del eje y, abajo a la izquierda): abierto, no cerrado, no conexo.
>
> **Derivadas:** $f(x, y) = 3xy - x^3$ es polinómica; $f'_x = 3y - 3x^2$ y $f'_y = 3x$. Entonces $h(x, y) = (3y - 3x^2)(3x) =$ **$9x(y - x^2)$**, continua en $\mathbb{R}^2$.
> **A:** $h = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = x^2$. **$A = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = x^2\}$**: el eje y entero y la parábola $y = x^2$ (vértice en el origen), que se cortan sólo en (0, 0). Gráfico: las dos curvas en trazo lleno.
> **B:** $h > 0 \Leftrightarrow x$ e $y - x^2$ tienen el mismo signo: ($x > 0$ y $y > x^2$) o ($x < 0$ y $y < x^2$). **$B = \{x > 0, y > x^2\} \cup \{x < 0, y < x^2\}$**. Gráfico: en el semiplano derecho, la zona de arriba de la rama derecha de la parábola (entre el eje y y la parábola); en el izquierdo, la zona de abajo de la rama izquierda (incluye todo el tercer cuadrante). Bordes punteados: el eje y y la parábola.
> **A, ¿cerrado?** Sí: $A = h^{-1}(\{0\})$ con h continua y $\{0\}$ cerrado. (Directo: si $(x_n, y_n) \in A$ tiende a (a, b), $h(a, b) = \lim h(x_n, y_n) = 0$.)
> **A, ¿abierto?** No: $(0, 1) \in A$, pero en cualquier entorno está $(\varepsilon, 1)$ con $0 < \varepsilon < 1$, y $h(\varepsilon, 1) = 9\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \neq 0$. Ningún punto de A es interior: es unión de dos curvas.
> **A, ¿conexo?** Sí: el eje y es conexo (una recta) y la parábola también (imagen de la curva continua (t, t^2), $t \in \mathbb{R}$). Comparten el origen, y la unión de dos conexos con un punto en común es conexa: cualquier punto de una se une con cualquiera de la otra pasando por (0, 0).
> **B, ¿abierto?** Sí: $B = h^{-1}((0, +\infty))$ con h continua y $(0, +\infty)$ abierto. (Directo: si $h(P) > 0$, por continuidad $h > 0$ en todo un entorno de P.)
> **B, ¿cerrado?** No: $(1, 1) \notin B$ ($h = 0$), pero $(1, 1 + 1/n) \in B$ ($h = 9/n > 0$) y tiende a (1, 1). (Otra forma: B no es $\emptyset$ ni $\mathbb{R}^2$, y en $\mathbb{R}^2$ los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son esos dos.)
> **B, ¿conexo?** No: en B nunca es $x = 0$, así que $B \subset \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$, dos semiplanos abiertos disjuntos, y B tiene puntos en los dos, (1, 2) y (–1, 0). (Con caminos: una curva en B de (1, 2) a (–1, 0) tendría que cruzar $x = 0$, donde $h = 0$.) Cada una de las dos piezas, por separado, sí es conexa.
> **Trampa:** olvidarse del factor x que viene de f'_y y quedarse sólo con la parábola. Y B no es "el interior de la parábola": en el semiplano izquierdo es la parte de abajo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación
$z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$
en un entorno del punto (1, 1). Calcular mediante una aproximación lineal el valor de h(2.01, 0.97), siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

> **Respuesta:** $z_0 = 0$; $\nabla f(1, 1) = (-2, 0)$; $h(2, 1) = 0$, $\nabla h(2, 1) = (-2, 4)$; $h(2.01, 0.97) \approx -0.14$.
>
> **Planteo:** $F(u, v, z) = z^3u + zv^2 + u^2 - 1$.
> **Punto:** en $(u, v) = (1, 1)$: $z^3 + z + 1 - 1 = z(z^2 + 1) = 0$; como $z^2 + 1 > 0$, la única raíz real es **$z_0 = 0$**. Punto (1, 1, 0).
> **Derivadas de F:** $F'_u = z^3 + 2u$, $F'_v = 2zv$, $F'_z = 3z^2u + v^2$. En (1, 1, 0): $F'_u = 2$, $F'_v = 0$, $F'_z = 0 + 1 = 1$.

Hipótesis del TFI: (i) $F(1, 1, 0) = 0$; (ii) F es polinómica, C^1 en $\mathbb{R}^3$; (iii) $F'_z(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Entonces $z = f(u, v)$ es C^1 en un entorno de $(1, 1)$, con $f(1, 1) = 0$, $f_u(1, 1) = -2/1 = -2$ y $f_v(1, 1) = -0/1 = 0$.
Dónde centrar h: necesitamos (x, y) cerca de $(2.01, 0.97)$ con $(x - y^2, x^2 - 3y) = (1, 1)$. De la primera, $x = 1 + y^2$; en la segunda, $(1 + y^2)^2 - 3y = 1$, o sea $y^4 + 2y^2 - 3y = y(y - 1)(y^2 + y + 3) = 0$: $y = 0$ ($x = 1$) o $y = 1$ ($x = 2$). El que está cerca es **(2, 1)**, y $h(2, 1) = f(1, 1) = 0$.
Regla de la cadena: f es diferenciable en $(1, 1)$ y la interior es polinómica, así que h es diferenciable en $(2, 1)$. Con $U = x - y^2$, $V = x^2 - 3y$: $U_x = 1$, $U_y = -2y = -2$, $V_x = 2x = 4$, $V_y = -3$. $h_x(2, 1) = (-2)\cdot 1 + 0\cdot 4 = -2$; $h_y(2, 1) = (-2)(-2) + 0\cdot(-3) = 4$.
Aproximación lineal: $h(x, y) \approx 0 - 2(x - 2) + 4(y - 1)$. Con $(2.01, 0.97)$: $-2(0.01) + 4(-0.03) = -0.02 - 0.12 =$ **-0.14**.
Trampa: el enunciado no da z_0 ni el punto donde centrar h: los dos hay que deducirlos (y justificar que $z_0 = 0$ es la única opción). No centres en $(2.01, 0.97)$ ni en $(1, 1)$.

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie
$\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$
en $A = (1, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto $(0, -1, 2)$ es tangente a la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Respuesta: $y_0 = 2$, r_0: $\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$; Π: $2y + z = 0$; $r_0 \cap \Pi = \{(6, -11/2, 11)\}$.

Paso 1, el punto A: $A \in \Sigma$ pide $2\cdot 1^2 + 1\cdot y_0 - y_0^2 = 0$, o sea $y_0^2 - y_0 - 2 = 0$, $y_0 = 2$ o $y_0 = -1$. Como Σ exige $y > 0$, **$y_0 = 2$** y $A = (1, 2, 1)$.
Paso 2, recta normal: $G(x, y, z) = 2z^2 + xy - y^2$ es C^1; $\nabla G = (y, x - 2y, 4z)$, y en A: $\nabla G(A) = (2, -3, 4) \neq \vec{0}$. Entonces r_0: **$\vec{X} = (1, 2, 1) + t(2, -3, 4)$**, $t \in \mathbb{R}$.
Paso 3, parámetros de (0, –1, 2): $u^2 + v = 0$, $uv = -1$, $u^2 + v^2 = 2$. De la primera $v = -u^2$, y en la segunda $-u^3 = -1$, $u = 1$ (única raíz real), $v = -1$; se comprueba $u^2 + v^2 = 2$ ✓.
Paso 4, plano tangente Π: $\vec{X}_u = (2u, v, 2u) = (2, -1, 2)$, $\vec{X}_v = (1, u, 2v) = (1, 1, -2)$. $\vec{N} = ((-1)(-2) - 2\cdot 1, 2\cdot 1 - 2\cdot(-2), 2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = (0, 6, 3) \neq \vec{0}$ (punto regular), proporcional a $(0, 2, 1)$. Π: $2(y + 1) + (z - 2) = 0$, o sea **$2y + z = 0$**.
Paso 5, intersección: reemplazo r_0 en Π: $2(2 - 3t) + (1 + 4t) = 5 - 2t = 0$, $t = 5/2$. Punto: $(1 + 5, 2 - 15/2, 1 + 10) =$ **$(6, -11/2, 11)$**. Control: $2(-11/2) + 11 = 0$ ✓. Como r_0 no es paralela a Π ($\nabla G(A) \cdot (0, 2, 1) = -2 \neq 0$), la intersección es ese único punto.
Trampa: la condición $y > 0$ está para descartar $y_0 = -1$; si no la usás tenés dos rectas y dos respuestas. Y la componente z de $\vec{X}_u$ es $2u$ (de $u^2 + v^2$), no 0.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Respuesta: $A = (1, -1)$, con $f(A) = 1$. $Hf(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = -12 < 0$: punto silla, no hay extremo relativo.

Planteo: f es C^2 en $\mathbb{R}^2$ (abierto). Su polinomio de Taylor de orden 2 en $A = (a, b)$ es $p_2(x, y) = f(A) + \nabla f(A)\cdot(x - a, y - b) + \tfrac{1}{2}(x - a, y - b)\, Hf(A)\, (x - a, y - b)^t$, y por construcción tiene, en A, el mismo valor, el mismo gradiente y el mismo hessiano que f. Entonces $\nabla p_2(A) = \nabla f(A)$ y $Hp_2 = Hf(A)$.
Hallar A: como A es crítico, $\nabla f(A) = 0$, o sea $\nabla p_2(A) = 0$. Con $\nabla p_2 = (2x + 4y + 2, 4x + 2y - 2)$: el sistema

$2x + 4y = -2$, $4x + 2y = 2$ equivale a $x + 2y = -1$, $2x + y = 1$. De la primera $x = -1 - 2y$; en la segunda, $-2 - 4y + y = 1$, $y = -1$ y $x = 1$. Como el sistema tiene determinante $2\cdot 2 - 4\cdot 4 = -12 \neq 0$, la solución es única: **A = (1, –1)**.

Valor: $f(A) = p_2(1, -1) = 1 - 4 + 2 + 1 + 2 - 1 = 1$.

Hessiano: $Hf(A) = Hp_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 4 - 16 = -12 < 0$. **Criterio que se usa:** si f es C^2 en un entorno de un punto crítico P (abierto), con H el hessiano en P: $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) > 0$ da mínimo relativo; $\det H > 0$ y $f''_{xx}(P) < 0$, máximo relativo; $\det H < 0$, punto silla (no hay extremo); $\det H = 0$ no decide.

Conclusión: $\det Hf(A) < 0$, así que A = (1, –1) es un **punto silla**: f **no** tiene extremo relativo en A (aunque $f(A) = 1$ y $\nabla f(A) = 0$).

Trampa: p_2 está desarrollado en potencias de x e y, no de $(x - a, y - b)$: A no es el origen ni sale de mirar los coeficientes. Se encuentra pidiendo $\nabla p_2(A) = 0$, que es lo que traduce "A es punto crítico de f".

Ejercicio 5. Considere el campo escalar

$f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0$. $\}$

Determine todas las direcciones para las cuales la derivada direccional de f es nula en el origen.

Respuesta: $\check{u} = (1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. En el resto, $f'((0, 0), \check{u}) = a^2/b \neq 0$ (con $\check{u} = (a, b)$, $b \neq 0$).

Planteo: la derivada direccional en A = (0, 0) según el versor $\check{u} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$, sale por definición: $f'(A, \check{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t}$. Como f tiene dos fórmulas, primero fijate cuál corresponde a los puntos (ta, tb): eso depende de si tb es cero, o sea de si b = 0.

Caso b ≠ 0: para $t \neq 0$ es $tb \neq 0$, así que $f(ta, tb) = \frac{t^2a^2}{tb} = t\cdot\frac{a^2}{b}$. El cociente incremental queda $(t\cdot a^2/b - 0)/t = a^2/b$, que no depende de t: $f'(A, \check{u}) = \frac{a^2}{b}$.

Caso b = 0 ($\check{u} = (1, 0)$ o $(-1, 0)$): los puntos (ta, 0) están sobre el eje x, donde f vale 0 por definición. El cociente es $(0 - 0)/t = 0$ y $f'(A, \check{u}) = 0$.

Derivada en cada dirección: $f'(A, \check{u}) = a^2/b$ si $b \neq 0$ y 0 si b = 0 (existe en toda dirección).

Planteo: buscamos los versores $\check{u} = (a, b)$ con $f'(A, \check{u}) = 0$.

Si b = 0: la derivada vale 0 siempre, así que sirven $\check{u} = (1, 0)$ y $\check{u} = (-1, 0)$.

Si b ≠ 0: $a^2/b = 0 \Leftrightarrow a = 0$, y con $a^2 + b^2 = 1$ queda $b = \pm 1$: $\check{u} = (0, 1)$ y $\check{u} = (0, -1)$.

Resultado: son exactamente cuatro direcciones, las de los ejes: **$\check{u}$ = (1, 0), (–1, 0), (0, 1), (0, –1)**. En cualquier otra dirección $f'(A, \check{u}) = a^2/b \neq 0$ (positiva si $b > 0$, negativa si $b < 0$).

Trampa: no uses $f'(A, \check{u}) = \nabla f(A)\cdot\check{u}$. Como $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, esa fórmula daría 0 en todas las direcciones, y en realidad, por ejemplo, $f'(A, (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)) = (1/2)/(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 \neq 0$. La fórmula del gradiente vale sólo si f es diferenciable, y esta f ni siquiera es continua en el origen: sobre la parábola $y = x^2$ ($x \neq 0$) vale $f = x^2/x^2 = 1$, que no tiende a $f(0, 0) = 0$. Otro error típico es olvidarse del caso b = 0 (ahí se usa la segunda fórmula) y perder las direcciones $(\pm 1, 0)$.

1/6/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ax^2 + by^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = x^2 + xy - x - y^2 - 2y + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

> **Respuesta:** $a = -1$, $b = 1$. En (1, 1) no hay extremo relativo: $\det Hf(1, 1) = -1 < 0$, es punto silla ($f(1, 1) = 1$).
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** como g es C^2, su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1) tiene el mismo valor, las mismas derivadas primeras y las mismas derivadas segundas que g en ese punto. Así que todo lo que necesitamos de g lo sacamos derivando p_2 y evaluando en (1, 1).
> **Datos de g:** $g(1, 1) = p_2(1, 1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 2 + 3 = 1$. $\nabla p_2 = (2x + y - 1, x - 2y - 2)$, así que $\nabla g(1, 1) = (2, -3)$. $Hp_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (constante), así que $Hg(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
> **Punto crítico:** $f = g + ax^2 + by^3$ es C^2 (suma de C^2). $\nabla f(1, 1) = \nabla g(1, 1) + (2a \cdot 1, 3b \cdot 1^2) = (2 + 2a, -3 + 3b) = \vec{0}$, así que **$a = -1$** y **$b = 1$**.
> **Hessiano de f:** $Hf(1, 1) = Hg(1, 1) + \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 6b \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 1 \\ 1 & -2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det = 0 \cdot 4 - 1 = -1 < 0$.
> **Conclusión:** $\det Hf < 0$, así que (1, 1) es un **punto silla**: **no hay extremo relativo**. (El valor ahí es $f(1, 1) = g(1, 1) - 1 + 1 = 1$, pero no es extremo.)
> **Trampa:** la derivada segunda de by^3 es $6by$ y se evalúa en $y = 1$; no te quedes con 3b. Y que f''_{xx} dé 0 no importa: el determinante es negativo y eso ya alcanza para decir silla.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x + y), \sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x + y > 0, x^2 + 4y^2 \le 4\}$: la elipse cerrada $x^2/4 + y^2 \le 1$ cortada por el semiplano abierto $x + y > 0$. $\text{int } D = \{x + y > 0, x^2 + 4y^2 < 4\}$. $\partial D = \{x^2 + 4y^2 = 4, x + y \ge 0\} \cup \{y = -x, -2/\sqrt{5} \le x \le 2/\sqrt{5}\}$. b) D no es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de las componentes. El ln pide $x + y > 0$; la raíz pide $x^2 + 4y^2 \le 4$, o sea $x^2/4 + y^2 \le 1$: elipse cerrada centrada en el origen, semieje 2 en x y 1 en y.
> **Cortes de la recta $y = -x$ con la elipse:** reemplazando queda $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5}$: puntos $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ ($2/\sqrt{5} \approx 0{,}89$).
> **a) D** = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, x^2 + 4y^2 \le 4\}$: la parte de la elipse que queda estrictamente del lado $x + y > 0$ de la recta (contiene a (2, 0) y (0, 1)). **Gráfico:** el arco de elipse de $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ a $(2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ pasando por (0, 1) y (2, 0) en trazo lleno; la cuerda sobre $y = -x$ en punteado; los dos extremos huecos.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : x + y > 0, x^2 + 4y^2 < 4\}$ (sin el arco).
> **Frontera:** $\partial D = \{x^2 + 4y^2 = 4, x + y \ge 0\} \cup \{y = -x, -2/\sqrt{5} \le x \le 2/\sqrt{5}\}$: el arco con sus extremos más la cuerda. El arco sin los extremos está en D; la cuerda no.

b) ¿Abierto? No: $(2, 0) \in D$ (está sobre el borde de la elipse y cumple $x + y > 0$), y toda bola centrada ahí tiene puntos $(2 + \varepsilon, 0)$ afuera de la elipse.
¿Cerrado? No: $(0, 0)$ es punto frontera (los puntos $(\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ no) y no es de D porque anula el argumento del ln. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
¿Acotado? Sí: $x^2 + y^2 \le x^2 + 4y^2 \le 4$, así que $\|(x, y)\| \le 2$ en todo D.
¿Conexo? Sí: la elipse llena y el semiplano son convexos, su intersección es convexa, y todo convexo es arcoconexo (el segmento que une dos puntos queda adentro).
Trampa: el borde de la elipse entra (la raíz admite 0) y la recta no (el ln no admite 0). Por eso D no es ni abierto ni cerrado: no son opuestos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(1, 2)$. Calcule mediante una aproximación lineal $f(1.1, 1.95)$.

Respuesta: $z_0 = -3$, $\nabla f = (4, -1)$. $f(1.1, 1.95) \approx -2.55$.

Planteo: $F(x, y, z) = (x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z)$. El enunciado da sólo el punto $(1, 2)$ del dominio de f: el z_0 hay que buscarlo.
Punto: en $(x, y) = (1, 2)$ queda $0 \cdot z + \ln(4 + z) = 0$, o sea $4 + z = 1$, $\mathbf{z_0 = -3}$. $P = (1, 2, -3)$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0$ por construcción ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{2x + y + z > 0\}$ y P está ahí $(2 + 2 - 3 = 1 > 0)$ ✓. (3) $F_z = (x^2 - 1) + \dfrac{1}{2x + y + z}$, $F_z(P) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $(1, 2)$, con $f(1, 2) = -3$.
Derivadas: $F_x = 2xz + \dfrac{2}{2x + y + z}$, $F_x(P) = -6 + 2 = -4$. $F_y = \dfrac{1}{2x + y + z}$, $F_y(P) = 1$. $f_x = -F_x/F_z = 4$, $f_y = -F_y/F_z = -1$.
Aproximación lineal: f es diferenciable en $(1, 2)$, así que $f(x, y) \approx f(1, 2) + f_x\Delta x + f_y\Delta y$, con $\Delta x = 1.1 - 1 = 0.1$, $\Delta y = 1.95 - 2 = -0.05$.
Resultado: $f(1.1, 1.95) \approx -3 + 4(0.1) + (-1)(-0.05) = -3 + 0.4 + 0.05 = -2.55$.
Trampa: no saltees el cálculo de z_0 (ni el chequeo de que el argumento del ln es positivo): sin el punto en $\mathbb{R}^3$ no podés evaluar ninguna derivada. Y fijate el signo del incremento negativo.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $2x - 3y = 1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en el punto $(2, 1)$;
b) la derivada direccional de f en $(2, 1)$ en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(2, 1)$.

Respuesta: $\nabla f(2, 1) = (-4, 6)$.

Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en $(2, 1)$, y vale la fórmula $f'((2, 1), \check{v}) = \nabla f(2, 1) \cdot \check{v}$.
Gradiente ⊥ curva de nivel: si $g(t)$ es una parametrización de la curva de nivel $f = 2$ con $g(0) = (2, 1)$, entonces $f(g(t)) = 2$ para todo t; derivando con la regla de la cadena, $\nabla f(2, 1) \cdot g'(0) = 0$. O sea $\nabla f(2, 1)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel.
Dirección de la recta: La recta $2x - 3y = 1$ pasa por $(2, 1)$ (se verifica reemplazando) y su normal es $(2, -3)$; un director es $(3, 2)$. Entonces $\nabla f(2, 1) = \lambda(2, -3)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
Uso de la derivada direccional: $f'((2, 1), \check{v}) = \lambda(2, -3) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (2 - 3)\lambda/\sqrt{2} = -\lambda/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, de donde $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Resultado: $\nabla f(2, 1) = (-4, 6)$. Control: $(-4, 6) \cdot (3, 2) = 0$ ✓ y $(-4 + 6)/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ✓.
Trampa: el director de la recta, $(3, 2)$, no es el gradiente: el gradiente es la normal de la recta. Además λ puede salir negativo; no lo fuerces a positivo.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$x^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en $(1, 1, 1)$ con el plano tangente a Σ en $(1, 1, 2)$.

Respuesta: Recta: $(1, 1, 1) + \lambda(-3, -1, 2)$; plano tangente: $2x + 2y - z = 2$; se cortan en **$(7/10, 9/10, 6/5)$**.

Planteo: $F_1 = x^2 - xy + z - 1$ y $F_2 = xy + z^2 - 2$; $(1, 1, 1)$ cumple las dos ($1 - 1 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2$).
Tangente a Γ: $\nabla F_1 = (2x - y, -x, 1) \to (1, -1, 1)$; $\nabla F_2 = (y, x, 2z) \to (1, 1, 2)$. Son C^1 y no paralelos (curva regular en el punto). $\vec{T} = (1, -1, 1) \times (1, 1, 2) = ((-1)\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot 1 - 1\cdot 2, 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1) = (-3, -1, 2)$. Recta tangente: $(x, y, z) = (1 - 3\lambda, 1 - \lambda, 1 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Parámetros del punto en Σ: $u + v = 1$ y $u - v = 1 \Rightarrow u = 1, v = 0$; control: $2\cdot 1^2 + 2\cdot 0^2 = 2$ ✓.
Normal a Σ: $\vec{X}_u = (1, 1, 4u) \to (1, 1, 4)$; $\vec{X}_v = (1, -1, 4v) \to (1, -1, 0)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1\cdot 0 - 4\cdot(-1), 4\cdot 1 - 1\cdot 0, 1\cdot(-1) - 1\cdot 1) = (4, 4, -2) \parallel (2, 2, -1)$, no nulo: Σ es regular ahí.
Plano tangente: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea **$2x + 2y - z = 2$**. Control: $x^2 + y^2 = 2u^2 + 2v^2 = z$, así que Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, cuyo plano tangente en $(1, 1)$ es $z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$, el mismo.
Corte: $2(1 - 3\lambda) + 2(1 - \lambda) - (1 + 2\lambda) = 3 - 10\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1/10$.
Resultado: $(1 - 3/10, 1 - 1/10, 1 + 2/10) =$ **$(7/10, 9/10, 6/5)$**.
Trampa: evaluar $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ en $(1, 1)$ (las coordenadas x, y del punto) en lugar de en $(u, v) = (1, 0)$.

1/6/24, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x - y), \sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

> **Respuesta:** a) $D = \{(x, y) : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$: la elipse cerrada $x^2 + y^2/4 \leq 1$ cortada por el semiplano abierto $x - y > 0$. $\text{int } D = \{x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 < 4\}$. $\partial D = \{4x^2 + y^2 = 4,\ x - y \geq 0\} \cup \{y = x,\ -2/\sqrt{5} \leq x \leq 2/\sqrt{5}\}$. b) D no es abierto, no es cerrado, es acotado y es conexo.
>
> **Condiciones:** el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de las componentes. El ln pide $x - y > 0$; la raíz pide $4x^2 + y^2 \leq 4$, o sea $x^2 + y^2/4 \leq 1$: elipse cerrada centrada en el origen, semieje 1 en x y 2 en y.
> **Cortes de la recta y = x con la elipse:** reemplazando queda $5x^2 = 4$, $x = \pm 2/\sqrt{5}$: puntos $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ $(2/\sqrt{5} \approx 0{,}89)$.
> **a) D** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\}$: la parte de la elipse que queda estrictamente del lado $x - y > 0$ de la recta (contiene a (1, 0) y (0, –2)). **Gráfico:** el arco de elipse de $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ a $(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ pasando por (1, 0) y (0, –2) en trazo lleno; la cuerda sobre y = x en punteado; los dos extremos huecos.
> **Interior:** $\text{int } D = \{(x, y) : x - y > 0,\ 4x^2 + y^2 < 4\}$ (sin el arco).
> **Frontera:** $\partial D = \{4x^2 + y^2 = 4,\ x - y \geq 0\} \cup \{y = x,\ -2/\sqrt{5} \leq x \leq 2/\sqrt{5}\}$: el arco con sus extremos más la cuerda. El arco sin los extremos está en D; la cuerda no.
> **b) ¿Abierto?** No: $(0, -2) \in D$ (está sobre el borde de la elipse y cumple $x - y > 0$), y toda bola centrada ahí tiene puntos $(0, -2 - \varepsilon)$ afuera de la elipse.
> **¿Cerrado?** No: (0, 0) es punto frontera (los puntos $(\varepsilon, -\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ chico están en D y los $(-\varepsilon, \varepsilon)$ no) y no es de D porque anula el argumento del ln. Un cerrado tiene que contener a toda su frontera.
> **¿Acotado?** Sí: $x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 4$, así que $\|(x, y)\| \leq 2$ en todo D.
> **¿Conexo?** Sí: la elipse llena y el semiplano son convexos, su intersección es convexa, y todo convexo es arcoconexo (el segmento que une dos puntos queda adentro).
> **Trampa:** el borde de la elipse entra (la raíz admite 0) y la recta no (el ln no admite 0). Por eso D no es ni abierto ni cerrado: no son opuestos.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ay^2 + bx^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = y^2 + xy - y - x^2 - 2x + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

> **Respuesta:** $a = -1$, $b = 1$. En (1, 1) no hay extremo relativo: $\det Hf(1, 1) = -1 < 0$, es punto silla $(f(1, 1) = 1)$.
>
> **Qué da el polinomio de Taylor:** como g es C^2, su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1) tiene el mismo valor, las mismas derivadas primeras y las mismas derivadas segundas que g en ese punto. Así que todo lo que necesitamos de g lo sacamos derivando p_2 y evaluando en (1, 1).
> **Datos de g:** $g(1, 1) = p_2(1, 1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 2 + 3 = 1$. $\nabla p_2 = (y - 2x - 2, 2y + x - 1)$, así que $\nabla g(1, 1) =$

(−3, 2). $Hp_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (constante), así que $Hg(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Punto crítico: $f = g + ay^2 + bx^3$ es C^2 (suma de C^2). $\nabla f(1, 1) = \nabla g(1, 1) + (3b\cdot 1^2, 2a\cdot 1) = (-3 + 3b, 2 + 2a) = \vec{0}$, así que **a = −1** y **b = 1**.

Hessiano de f: $Hf(1, 1) = Hg(1, 1) + \begin{pmatrix} 6b\cdot 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 & 1 \\ 1 & 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = 4\cdot 0 - 1 = -1 < 0$.

Conclusión: $\det Hf < 0$, así que (1, 1) es un **punto silla**: **no hay extremo relativo**. (El valor ahí es $f(1, 1) = g(1, 1) - 1 + 1 = 1$, pero no es extremo.)

Trampa: la derivada segunda de bx^3 es $6bx$ y se evalúa en $x = 1$; no te quedes con $3b$. Y que f''_{yy} dé 0 no importa: el determinante es negativo y eso ya alcanza para decir silla.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$(y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z) = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (2, 1). Calcule mediante una aproximación lineal $f(1.95, 1.1)$.

Respuesta: $z_0 = -3$, $\nabla f = (-1, 4)$. $f(1.95, 1.1) \approx -2.55$.

Planteo: $F(x, y, z) = (y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z)$. El enunciado da sólo el punto (2, 1) del dominio de f: el z_0 hay que buscarlo.

Punto: en $(x, y) = (2, 1)$ queda $0\cdot z + \ln(4 + z) = 0$, o sea $4 + z = 1$, **$z_0 = -3$**. $P = (2, 1, -3)$.

Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0$ por construcción ✓. (2) F es C^1 en el abierto $\{2y + x + z > 0\}$ y P está ahí $(2 + 2 - 3 = 1 > 0)$ ✓. (3) $F_z = (y^2 - 1) + \dfrac{1}{2y + x + z}$, $F_z(P) = 0 + 1 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de (2, 1), con $f(2, 1) = -3$.

Derivadas: $F_x = \dfrac{1}{2y + x + z}$, $F_x(P) = 1$. $F_y = 2yz + \dfrac{2}{2y + x + z}$, $F_y(P) = -6 + 2 = -4$. $f_x = -F_x/F_z = -1$, $f_y = -F_y/F_z = 4$.

Aproximación lineal: f es diferenciable en (2, 1), así que $f(x, y) \approx f(2, 1) + f_x\Delta x + f_y\Delta y$, con $\Delta x = 1.95 - 2 = -0.05$, $\Delta y = 1.1 - 1 = 0.1$.

Resultado: $f(1.95, 1.1) \approx -3 + (-1)(-0.05) + 4(0.1) = -3 + 0.05 + 0.4 = -2.55$.

Trampa: no saltees el cálculo de z_0 (ni el chequeo de que el argumento del ln es positivo): sin el punto en $\mathbb{R}^3$ no podés evaluar ninguna derivada. Y fijate el signo del incremento negativo.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 tal que:

a) la recta de ecuación $3x - 2y = -1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = -2$ en el punto (1, 2);

b) la derivada direccional de f en (1, 2) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $-\sqrt{2}$.

Calcule $\nabla f(1, 2)$.

Respuesta: $\nabla f(1, 2) = (-6, 4)$.

Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en (1, 2), y vale la fórmula $f'((1, 2), \check{v}) = \nabla f(1, 2) \cdot \check{v}$.

Gradiente ⊥ curva de nivel: si $g(t)$ es una parametrización de la curva de nivel $f = -2$ con $g(0) = (1, 2)$, entonces $f(g(t)) = -2$ para todo t; derivando con la regla de la cadena, $\nabla f(1, 2) \cdot g'(0) = 0$. O sea $\nabla f(1, 2)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel.

Dirección de la recta: La recta $3x - 2y = -1$ pasa por (1, 2) (se verifica reemplazando) y su normal es (3, −2); un director es (2, 3). Entonces $\nabla f(1, 2) = \lambda(3, -2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uso de la derivada direccional: $f'((1, 2), \check{v}) = \lambda(3, -2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (3 - 2)\lambda/\sqrt{2} = \lambda/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, de

donde **$\lambda = -2$**.

Resultado: $\nabla f(1, 2) = (-6, 4)$. Control: $(-6, 4) \cdot (2, 3) = 0$ ✓ y $(-6 + 4)/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ ✓.

Trampa: el director de la recta, $(2, 3)$, no es el gradiente: el gradiente es la normal de la recta. Además λ puede salir negativo; no lo fuerces a positivo.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones

$y^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$

y Σ la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, v - u, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Halle la intersección de la recta tangente a Γ en $(1, 1, 1)$ con el plano tangente a Σ en $(1, 1, 2)$.

Respuesta: Recta: $(1, 1, 1) + \lambda(1, 3, -2)$; plano tangente: $2x + 2y - z = 2$; se cortan en **$(9/10, 7/10, 6/5)$**.

Planteo: $F_1 = y^2 - xy + z - 1$ y $F_2 = xy + z^2 - 2$; $(1, 1, 1)$ cumple las dos $(1 - 1 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2)$.

Tangente a Γ: $\nabla F_1 = (-y, 2y - x, 1) \to (-1, 1, 1)$; $\nabla F_2 = (y, x, 2z) \to (1, 1, 2)$. Son C^1 y no paralelos (curva regular en el punto). $\vec{T} = (-1, 1, 1) \times (1, 1, 2) = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (1, 3, -2)$. Recta tangente: $(x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + 3\lambda, 1 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Parámetros del punto en Σ: $u + v = 1$ y $v - u = 1 \Rightarrow u = 0$, $v = 1$; control: $2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 = 2$ ✓.

Normal a Σ: $\vec{X}_u = (1, -1, 4u) \to (1, -1, 0)$; $\vec{X}_v = (1, 1, 4v) \to (1, 1, 4)$. $\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = ((-1) \cdot 4 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = (-4, -4, 2) \parallel (2, 2, -1)$, no nulo: Σ es regular ahí.

Plano tangente: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, o sea **$2x + 2y - z = 2$**. Control: $(u + v)^2 + (v - u)^2 = 2u^2 + 2v^2 = z$, así que Σ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con el mismo plano tangente en $(1, 1, 2)$.

Corte: $2(1 + \lambda) + 2(1 + 3\lambda) - (1 - 2\lambda) = 3 + 10\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -1/10$.

Resultado: $(1 - 1/10, 1 - 3/10, 1 + 2/10) =$ **$(9/10, 7/10, 6/5)$**.

Trampa: evaluar $\vec{X}_u$ y $\vec{X}_v$ en $(1, 1)$ en lugar de en $(u, v) = (0, 1)$; o derivar mal $y^2 - xy$ respecto de y (es $2y - x$).

13/5/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

> **Respuesta:** $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, y fuera del origen $f'_x = \operatorname{sen} y\ (3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$, $f'_y = x[(x^2 + 3y^2) \cos y - 6y \operatorname{sen} y]/(x^2 + 3y^2)^2$: existen en todo punto. f no es continua en (0, 0): por $y = mx$ el límite es $m/(1 + 3m^2)$ (0 por $y = 0$, 1/4 por $y = x$).
>
> **Parciales fuera del origen:** si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, en un entorno de ese punto que no contiene al origen $f = x \operatorname{sen} y/(x^2 + 3y^2)$, cociente de funciones C^1 con denominador distinto de 0 ($x^2 + 3y^2 = 0$ sólo en el origen). Ahí las parciales existen y salen con la regla del cociente: $f'_x = [\operatorname{sen} y\ (x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 2x]/(x^2 + 3y^2)^2 = \operatorname{sen} y\ (3y^2 - x^2)/(x^2 + 3y^2)^2$ y $f'_y = [x \cos y\ (x^2 + 3y^2) - x \operatorname{sen} y \cdot 6y]/(x^2 + 3y^2)^2$.
> **Parciales en el origen (por definición, no con las fórmulas):** $f(h, 0) = h \operatorname{sen} 0/h^2 = 0$ y $f(0, k) = 0 \cdot \operatorname{sen} k/(3k^2) = 0$. Entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} (f(h, 0) - f(0, 0))/h = \lim 0/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k\to 0} (f(0, k) - f(0, 0))/k = 0$. **Existen en todo punto.**
> **Continuidad en (0, 0):** $f(0, 0) = 0$; busco dos caminos con límites distintos. Sobre la recta $y = mx$, con $x \neq 0$: $f(x, mx) = x \operatorname{sen}(mx)/((1 + 3m^2)x^2) = \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + 3m^2} \to m/(1 + 3m^2)$, porque $\operatorname{sen}(mx)/x \to m$.
> **Dos caminos:** por $y = 0$ ($m = 0$) el límite es 0 y por $y = x$ ($m = 1$) es 1/4. Dan distinto, así que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y **f no es continua en (0, 0)**.
> **Trampa:** en $\mathbb{R}^2$ la existencia de las derivadas parciales no implica continuidad (este ejercicio es justamente el contraejemplo). Y no calcules las parciales en el origen reemplazando (0, 0) en las fórmulas de afuera: ahí no valen (ni siquiera están definidas), tenés que ir al cociente incremental.

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, −4) y la dirección en la cual este valor se produce.

> **Respuesta:** $\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$. Máxima derivada direccional: $\sqrt{109}/4$, en la dirección $\check{v} = (10, -3)/\sqrt{109}$.
>
> **Punto interior:** $\vec{g}(2, 1) = (2 - 1^2, -2 \cdot 2 \cdot 1) = (1, -4)$: justo el punto donde se pide la derivada de f.
> **Qué dice p_1:** $p_1(x, y) = h(2, 1) + h_x(2, 1)(x - 2) + h_y(2, 1)(y - 1)$. Como es lineal, sus coeficientes son las derivadas: **$\nabla h(2, 1) = (4, -2)$** (y $h(2, 1) = p_1(2, 1) = 7$).
> **Hipótesis:** f es C^1, luego diferenciable en (1, −4); $\vec{g}$ es polinómica. Vale la cadena: $\nabla h(2, 1) = \nabla f(1, -4) \cdot D\vec{g}(2, 1)$.
> **Jacobiana:** $D\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$, y en (2, 1) da $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, con determinante $-4 - 4 = -8 \neq 0$: el sistema tiene solución única.
> **Sistema:** con $\nabla f(1, -4) = (a, b)$: $(a, b) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = (a - 2b, -2a - 4b) = (4, -2)$. De la primera, $a = 4 +$

2b; en la segunda, $-8 - 4b - 4b = -2$, así que $b = -3/4$ y $a = 5/2$. **$\nabla f(1, -4) = (5/2, -3/4)$**.
Máximo: f diferenciable, entonces $f'((1, -4), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v} \leq \|\nabla f\|$, con igualdad en la dirección de ∇f. $\|\nabla f\| = \sqrt{(25/4 + 9/16)} = \sqrt{(109/16)} = $ **$\sqrt{109}/4$**, y la dirección es **$\check{v} = (5/2, -3/4)/(\sqrt{109}/4) = (10, -3)/\sqrt{109}$**.
Trampa: el 1 de p_1 no es $h(2, 1)$ (es 7): p_1 está escrito en x, y sin centrar. Y en el producto va el gradiente (fila) a la izquierda de la jacobiana; si lo ponés a la derecha te queda otro sistema y otro ∇f.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización
$\vec{X} = (2u^2, u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto $(-1, -1, 1)$.

Respuesta: r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$. Plano tangente: $x + y - z = -3$. Hay un único punto de intersección: $(-10/7, 1/7, 12/7)$.
Σ_2 en cartesianas: $\vec{X} = (2u^2, u, v)$ dice $y = u$, $x = 2u^2$ y z libre: Σ_2 es el cilindro $x = 2y^2$.
El punto: con $y = 1$, $x_0 = 2 \cdot 1^2 = 2$ y, de Σ_1, $z_0 = 1 - x_0 + y^2 = 1 - 2 + 1 = 0$. $P = (2, 1, 0)$.
Parametrización de C: con $y = t$, $x = 2t^2$ y $z = 1 - x + y^2 = 1 - t^2$. $\vec{g}(t) = (2t^2, t, 1 - t^2)$, de clase C^1, con $\vec{g}(1) = P$.
Tangente: $\vec{g}'(t) = (4t, 1, -2t)$, $\vec{g}'(1) = (4, 1, -2) \neq \vec{0}$. Control: $\nabla(x - y^2 + z) = (1, -2y, 1) = (1, -2, 1)$ y $\nabla(x - 2y^2) = (1, -4y, 0) = (1, -4, 0)$ en P; su producto vectorial es $(4, 1, -2)$ ✓. Entonces r_0: $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(4, 1, -2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Plano tangente a $xyz = 1$ en $(-1, -1, 1)$: el punto está en la superficie ($(-1)(-1)(1) = 1$ ✓); $H = xyz$ es C^1 y $\nabla H = (yz, xz, xy) = (-1, -1, 1) \neq \vec{0}$. Plano: $-(x + 1) - (y + 1) + (z - 1) = 0$, o sea $x + y - z = -3$.
¿Cuántos puntos? $(4, 1, -2) \cdot (1, 1, -1) = 7 \neq 0$: r_0 no es paralela al plano, así que lo corta en exactamente un punto.
Cuenta: $(2 + 4\lambda) + (1 + \lambda) - (-2\lambda) = -3$, $3 + 7\lambda = -3$, $\lambda = -6/7$.
Resultado: el único punto es **$(-10/7, 1/7, 12/7)$**. Control: $-10/7 + 1/7 - 12/7 = -21/7 = -3$ ✓.
Trampa: "todos los puntos" no quiere decir que haya varios: hay que justificar que es uno solo mirando el producto escalar de la dirección con la normal. Si diera 0, habría que ver si la recta está contenida en el plano (infinitos puntos) o es paralela sin tocarlo (ninguno).

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$.
Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Respuesta: Puntos críticos: $(0, 1)$, punto silla (no hay extremo); $(2, 1)$, mínimo local (con valor $f(2, 1) = 4$).

Dominio: f está definida y es C^∞ en el abierto $\{(x, y): y \neq 0\}$; los extremos locales están entre los puntos con $\nabla f = 0$.
Derivadas: $f_x = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, $f_y = 4y - 4/y^2$.
Sistema: $f_x = 0$ da $x = 0$ o $x = 2$. $f_y = 0$ da $4y^3 = 4$, $y^3 = 1$, $y = 1$ (única raíz real: $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ y $y^2 + y + 1 > 0$). **Puntos: $(0, 1)$ y $(2, 1)$.**
Derivadas segundas: $f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 4 + 8/y^3$.
Criterio del hessiano: f es de clase C^2 en un entorno de cada punto crítico, así que con $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$: si $\det H > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $\det H > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo local; si $\det H < 0$, punto silla; si

det H = 0 el criterio no decide.

(0, 1): $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, det = −72 < 0: **punto silla**, no hay extremo (f(0, 1) = 8).

(2, 1): $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, det = 72 > 0 y $f_{xx} = 6 > 0$: **mínimo local**, f(2, 1) = 2 + 4 + 8 − 12 + 2 = 4.

Trampa: el término 4/y deriva a $-4/y^2$ y otra vez a $+8/y^3$; un signo mal ahí cambia f_{yy}. Y el mínimo es sólo local: cuando $y \to 0^-$, $4/y \to -\infty$.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función w = f(u, v) de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$.
Sea C es la curva de ecuación
C : f(x + y, 2x − y) = 1.
Halle la recta normal a C en el punto (1, −1).

Respuesta: $F'_w(0, 3, 1) = 6 \neq 0$, $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$. $\nabla\varphi(1, -1) = (-3/2, 0)$. Recta normal a C en (1, −1): (x, y) = (1, −1) + t(1, 0), es decir y = −1.

Planteo: $F(u, v, w) = ve^{uw} + 2vw - 9$. Primero el TFI para f, después la curva C como conjunto de nivel 1 de φ(x, y) = f(x + y, 2x − y).
Hipótesis del TFI: (1) $F(0, 3, 1) = 3e^0 + 6 - 9 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$. (3) $F'_w = uve^{uw} + 2v \to 0 + 6 = 6 \neq 0$ ✓. Entonces w = f(u, v) existe y es C^1 en un entorno de (0, 3), con f(0, 3) = 1.
Derivadas de f: $F'_u = vwe^{uw} \to 3$; $F'_v = e^{uw} + 2w \to 3$. $f'_u(0, 3) = -3/6 = -1/2$ y $f'_v(0, 3) = -1/2$.
El punto está en C: (x + y, 2x − y) en (1, −1) da (0, 3), y f(0, 3) = 1 ✓.
Regla de la cadena: la función interna (x + y, 2x − y) es lineal (diferenciable) y f es diferenciable en (0, 3), así que φ es diferenciable en (1, −1) (de hecho C^1 en un entorno) con $\nabla\varphi(1, -1) = (f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2,\ f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot (-1)) = (-1/2 - 1, -1/2 + 1/2) =$ **(−3/2, 0)**.
Normal a C: C es el conjunto de nivel φ = 1, con φ de clase C^1 y $\nabla\varphi(1, -1) \neq \vec{0}$; entonces cerca de (1, −1) C es una curva regular y $\nabla\varphi(1, -1)$ es perpendicular a ella. La recta normal tiene dirección (−3/2, 0) ∥ (1, 0): **(x, y) = (1, −1) + t(1, 0)**, t ∈ ℝ, o sea **y = −1**. (La recta tangente es x = 1.)
Trampa: la normal de la curva es $\nabla\varphi$ en (x, y) = (1, −1), no $\nabla f(0, 3)$: hay que pasar por la jacobiana de (x + y, 2x − y). Usar $\nabla f(0, 3) = (-1/2, -1/2)$ directamente da la recta y + 1 = x − 1, que está mal.

11/5/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización $\vec{X} = (t^2, 0, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

> **Respuesta:** 1. Un solo punto: $P = \Gamma(0) = (0, 0, 1)$. 2. Plano tangente a Σ en P: $x - y + 2z = 2$.
>
> **1) Planteo:** un punto de Γ es $(t^2, 0, 1 + t)$; está en Σ si $F(t^2, 0, 1 + t) = 0$ con $F(x, y, z) = x^2y + xz - e^y + z^2$.
> **Cuenta:** con $y = 0$, $x^2y = 0$ y $e^0 = 1$: $t^2(1 + t) - 1 + (1 + t)^2 = t^3 + t^2 - 1 + 1 + 2t + t^2 = t^3 + 2t^2 + 2t = t(t^2 + 2t + 2)$.
> **Raíces:** $t = 0$, y $t^2 + 2t + 2 = 0$ no tiene raíces reales (discriminante $4 - 8 = -4 < 0$). Único punto: **$P = (0, 0, 1)$**. Control: $F(0, 0, 1) = 0 + 0 - 1 + 1 = 0$ ✓.
> **2) Hipótesis:** F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomio más exponencial) y Σ es su conjunto de nivel 0; si $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, el plano tangente en P tiene normal $\nabla F(P)$.
> **Gradiente:** $\nabla F = (2xy + z, x^2 - e^y, x + 2z)$; en $(0, 0, 1)$: $\nabla F(P) = (1, -1, 2) \neq \vec{0}$.
> **Plano:** $1\cdot(x - 0) - 1\cdot(y - 0) + 2(z - 1) = 0$, o sea **$x - y + 2z = 2$**.
> **Trampa:** e^y en $y = 0$ vale 1, no 0; si lo ponés en 0 te queda $t^3 + 2t^2 + 2t + 1$ y aparecen raíces que no existen. Y la cuadrática sin raíces reales hay que justificarla con el discriminante, no descartarla en silencio.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

> **Respuesta:** Puntos críticos $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. En $(0, 0)$ hay punto silla ($\det H = -36$). En $(-1, 1)$ hay mínimo relativo ($\det H = 36$, $f''_{xx} = 6$), de valor $f(-1, 1) = -1$.
>
> **Planteo:** f es polinómica, así que es C^2 en todo $\mathbb{R}^2$. Por eso un extremo relativo sólo puede estar donde $\nabla f = \vec{0}$, y en cada punto crítico decide el hessiano: $\det H > 0$ y $f''_{xx} > 0$ da mínimo; $\det H > 0$ y $f''_{xx} < 0$ da máximo; $\det H < 0$ da punto silla; $\det H = 0$ no decide.
> **Puntos críticos:** $f'_x = 6x + 6y$, $f'_y = 6x + 6y^2$. De $f'_x = 0$ sale $x = -y$; reemplazando en $f'_y = 0$: $-6y + 6y^2 = 6y(y - 1) = 0$, o sea $y = 0$ o $y = 1$. Puntos críticos: **$(0, 0)$** y **$(-1, 1)$**.
> **Hessiano:** $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 12y$, así que $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix}$ y $\det H = 72y - 36$.
> **En $(0, 0)$:** $\det H = -36 < 0$: **punto silla**, no hay extremo ($f(0, 0) = 0$).
> **En $(-1, 1)$:** $\det H = 72 - 36 = 36 > 0$ y $f''_{xx} = 6 > 0$: **mínimo relativo**, de valor $f(-1, 1) = 3 - 6 + 2 =$ **-1**.
> **Trampa:** en $6y^2 - 6y = 0$ no dividas por y, factorizá: si simplificás perdés el origen. Y con $\det H < 0$ el signo de f''_{xx} no importa: es silla igual.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0, 1)$ se anula.

> **Respuesta:** $\nabla f(0, 1) = (-2, -1)$. La derivada direccional se anula en $\check{v} = \pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Planteo: $F(x, y, z) = 2xy - \cos(x)\, z + yz^2$, $P = (0, 1, 1)$, queremos $z = f(x, y)$ con $f(0, 1) = 1$.
Hipótesis del TFI: (1) $F(P) = 0 - 1 + 1 = 0$ ✓. (2) F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓. (3) $F_z = -\cos x + 2yz$, $F_z(P) = -1 + 2 = 1 \neq 0$ ✓. Entonces $z = f(x, y)$ es C^1 en un entorno de $(0, 1)$, con $f(0, 1) = 1$. (Hace falta fijar $f(0, 1) = 1$ porque $F(0, 1, z) = z^2 - z$ se anula también en $z = 0$: por ese otro punto pasa otra función implícita distinta.)
Derivadas: $F_x = 2y + \operatorname{sen}(x)\, z$, $F_x(P) = 2$. $F_y = 2x + z^2$, $F_y(P) = 1$. $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = -2$, $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -1$. **$\nabla f(0, 1) = (-2, -1)$**.
Derivada direccional: f es diferenciable en $(0, 1)$ y $f'((0, 1), \check{v}) = \nabla f \cdot \check{v}$. Con $\check{v} = (a, b)$: $-2a - b = 0$, $b = -2a$; con $a^2 + b^2 = 1$, $5a^2 = 1$.
Resultado: $\check{v} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ y $\check{v} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
Trampa: la derivada de $-\cos(x)\, z$ respecto de x es $+\operatorname{sen}(x)\, z$ (el menos se cancela con el de la derivada del coseno); acá vale 0 en $x = 0$, pero en otro punto ese signo te cuesta el ejercicio.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(ye^x, x + 2y)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r, s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en $(1, 2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0, 1))$.

Respuesta: $g(0, 1) = -3$, $\nabla g(0, 1) = (-1, -4)$. Plano tangente: $x + 4y + z = 1$. Recta normal: $(x, y, z) = (0, 1, -3) + t(1, 4, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Punto interior: en $(x, y) = (0, 1)$ es $(r, s) = (y\, e^x, x + 2y) = (1, 2)$.
Qué dice L: la aproximación lineal de f en $(1, 2)$ es $L(r, s) = f(1, 2) + f_r(1, 2)(r - 1) + f_s(1, 2)(s - 2)$. Comparando con $1 + 2r - 3s$: **$f(1, 2) = L(1, 2) = 1 + 2 - 6 = -3$** y **$\nabla f(1, 2) = (2, -3)$** (los coeficientes de r y s).
Hipótesis: f es C^1, por lo tanto diferenciable en $(1, 2)$; la interior $(y\, e^x, x + 2y)$ es C^∞. Entonces g es diferenciable en $(0, 1)$ y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en $(0, 1)$: $r_x = y\, e^x = 1$, $r_y = e^x = 1$; $s_x = 1$, $s_y = 2$.
Cadena: $g_x(0, 1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -1$; $g_y(0, 1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -4$. Y $g(0, 1) = f(1, 2) = -3$.
Plano tangente: $z = -3 - 1 \cdot (x - 0) - 4(y - 1) = 1 - x - 4y$, o sea **$x + 4y + z = 1$**.
Recta normal: un normal al gráfico es $(g_x, g_y, -1) = (-1, -4, -1) \parallel (1, 4, 1)$; por el punto $(0, 1, -3)$: **$(x, y, z) = (0, 1, -3) + t(1, 4, 1)$**, $t \in \mathbb{R}$.
Trampa: $f(1, 2)$ no es 1 (el término independiente de L): hay que evaluar L en $(1, 2)$. Lo mismo al revés: $\nabla f(1, 2)$ son los coeficientes de r y s, no hace falta reescribir L centrada.

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2 + 2y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

estudie la continuidad f en $(0, 0)$ y la existencia de $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$.

Respuesta: f no es continua en $(0, 0)$ (por $y = 0$ el límite es 0 y por $y = x$ es 1). Existen $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$.

Continuidad: f es continua en $(0, 0)$ si y sólo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe y vale $f(0, 0) = 0$.

Dos caminos: por el eje x ($y = 0$, $x \neq 0$): $f(x, 0) = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{x^2} = 0 \to 0$. Por la recta $y = x$ ($x \neq 0$): $f(x, x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \to 1$, por el límite notable $\operatorname{sen} u / u \to 1$ con $u = 3x^2 \to 0$.

Conclusión: dos caminos que llegan al origen dan límites diferentes (0 y 1), así que el límite doble **no**

existe y f **no es continua** en (0, 0). (En general, por y = mx se obtiene $3m/(1 + 2m^2)$, que cambia con m.)

Derivadas parciales por definición: para $h \neq 0$, $f(h, 0) = \text{sen } 0/h^2 = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$. Igual, $f(0, k) = \text{sen } 0/(2k^2) = 0$ para $k \neq 0$ y $f'_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$.

Resultado: f no es continua en el origen, pero existen $f'_x(0, 0) = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$.

Trampa: las parciales en el origen no se sacan derivando la fórmula y reemplazando (0, 0), porque esa fórmula no vale ahí: se hacen por definición. Y que existan las parciales no dice nada sobre la continuidad: sólo miran a f sobre los ejes, donde acá vale 0.

5/3/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea C la curva definida por las ecuaciones
$9x^2 + y^2 - z = 0 \wedge z + 4y = 5$
y sea $\vec{f}(x, y, z) = (\alpha(x^2) - y, 2x, z^2 + 2x)$ con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Elija una orientación para C, indíquela claramente en un gráfico y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva.

> **Respuesta:** Recorriendo C en sentido antihorario visto desde arriba: circulación -15π. En sentido horario, 15π.
>
> **Planteo:** C es cerrada (paraboloide $z = 9x^2 + y^2$ cortado por un plano) y hay que elegir el sentido. Teorema del rotor con la porción de plano que encierra.
> **La curva:** del plano, $z = 5 - 4y$. En el paraboloide: $9x^2 + y^2 = 5 - 4y \Rightarrow 9x^2 + (y + 2)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$. C se proyecta en una elipse de centro $(0, -2)$ y semiejes 1 (en x) y 3 (en y); su área es $\pi \cdot 1 \cdot 3 = 3\pi$.
> **Superficie elegida:** $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 5 - 4y)$, $(x, y) \in D = \{x^2 + (y + 2)^2/9 \le 1\}$. $\vec{\Sigma}_x \times \vec{\Sigma}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, -4) = (0, 4, 1)$, hacia arriba.
> **Hipótesis del teorema:** $\alpha \in C^1 \Rightarrow \alpha(x^2)$ es C^1 y $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; Σ plana, regular y orientable; C cerrada, simple y suave.
> **Sentido elegido (lo que va en el gráfico):** antihorario visto desde arriba: $x = \cos t$, $y = -2 + 3 \operatorname{sen} t$, $z = 5 - 4y = 13 - 12 \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$. En el dibujo: el paraboloide, el plano $z + 4y = 5$ cortándolo, la elipse con su punto más alto $(0, -5, 25)$ y el más bajo $(0, 1, 1)$, con flechas antihorarias vistas desde arriba y la normal $(0, 4, 1)$ hacia arriba.
> **Orientación compatible:** regla de la mano derecha: con los dedos de la mano derecha curvados en el sentido en que se recorre C, el pulgar marca hacia dónde tiene que apuntar $\vec{n}$ (dicho de otro modo: caminando por C con la cabeza del lado de $\vec{n}$, la superficie te queda a la izquierda). Antihoraria desde arriba $\Rightarrow \vec{n}$ hacia arriba, $\vec{n} \parallel (0, 4, 1)$.
> **Rotor:** $P = \alpha(x^2) - y$, $Q = 2x$, $R = z^2 + 2x$: $\operatorname{rot} \vec{f} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P) = (0 - 0, 0 - 2, 2 - (-1)) = (0, -2, 3)$. $\alpha(x^2)$ depende sólo de x: no aporta.
> **Flujo del rotor:** $\iint_D (0, -2, 3) \cdot (0, 4, 1)\, dxdy = \iint_D (-8 + 3)\, dxdy = -5 \cdot 3\pi = -15\pi$. (Área de D con polares elípticas $x = r\cos\theta$, $y = -2 + 3r\operatorname{sen}\theta$, jacobiano $3r$: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$.)
> **Resultado:** circulación = **-15π** en sentido antihorario visto desde arriba (15π en el otro).
> **Control (circulación directa):** $\alpha(x^2)dx$ y z^2dz son exactas; queda $\oint -y\, dx + 2x\, dy + 2x\, dz$, y sobre C $dz = -4dy$: $\oint -y\, dx - 6x\, dy$, y por Green en D (con C antihoraria): $\iint_D [\partial_x(-6x) - \partial_y(-y)]\, dxdy = \iint_D (-6 + 1)\, dxdy = -5 \cdot 3\pi = -15\pi$ ✓.
> **Trampa:** la componente -2 del rotor no se puede ignorar: la normal del plano tiene segunda componente 4 y aporta -8. Mirar sólo la tercera daría 9π.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea de campo de $\vec{f}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por el punto $(2, 0)$. Calcule $\int_\Gamma y^3\, dx + xy^2\, dy$.
Indique en un gráfico la orientación elegida.

Respuesta: Γ: $x^2/4 + y^2 = 1$. Orientación elegida antihoraria: $\oint_\Gamma y^3\,dx + xy^2\,dy = -\pi$. (Siguiendo el sentido del campo, que es horario, da π.)

Línea de campo: $\vec{f} = (4y, -x)$. Donde $y \neq 0$ la línea es un gráfico con $y' = \dfrac{-x}{4y}$, EDO de variables separables: $4y\,dy = -x\,dx \Rightarrow 2y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + c \Rightarrow \mathbf{x^2 + 4y^2 = K}$. Por (2, 0): K = 4. Control que vale también en (2, 0): $\nabla(x^2 + 4y^2) \cdot \vec{f} = (2x, 8y) \cdot (4y, -x) = 8xy - 8xy = 0$, o sea $\vec{f}$ es tangente a las curvas de nivel de $x^2 + 4y^2$, sin excepción de puntos (el único cero de $\vec{f}$ es el origen, que no está en la curva). Γ es la elipse $\dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}} \mathbf{+ y^2 = 1}$, cerrada.

Sentido del campo: $r(t) = (2\cos t, -\operatorname{sen} t)$ cumple $r'(t) = (-2\operatorname{sen} t, -\cos t) = \dfrac{1}{2}\vec{f}(r(t))$, así que el campo recorre la elipse en sentido horario (en (2, 0) apunta hacia abajo).

Orientación elegida (el gráfico): tomo Γ en **sentido antihorario** (en (2, 0) la flecha hacia arriba), que es la positiva para Green.

Hipótesis de Green: $P = y^3$, $Q = xy^2$, C^1 en $\mathbb{R}^2$; $D = \{x^2/4 + y^2 \leq 1\}$ es regular y Γ es su borde, cerrado, simple, C^1, orientado positivamente. $Q'_x = y^2$, $P'_y = 3y^2$, $Q'_x - P'_y = -2y^2$.

Doble integral: $x = 2r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, jacobiano $2r$. $\iint_D y^2\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot 2r\,dr\,d\theta = \dfrac{2}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \dfrac{1}{2}\cdot\pi = \dfrac{\pi}{2}$. Entonces $\oint_\Gamma = -2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = -\pi$.

Cara directa: con $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, el integrando es $\operatorname{sen}^3 t\,(-2\operatorname{sen} t) + 2\cos t\operatorname{sen}^2 t\cos t = -2\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t$, y $\int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}^4 t + 2\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t)\,dt = -\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = -\pi$ ✓.

Resultado: antihoraria, $\oint_\Gamma y^3\,dx + xy^2\,dy = \mathbf{-\pi}$; si la orientás según el campo (horaria) da $\boldsymbol{\pi}$.

Trampa: la línea de campo sale de $y' = f_2/f_1$ (tangente paralela a $\vec{f}$); pedir $\vec{f} \cdot (1, y') = 0$ da las trayectorias ortogonales. Y en polares elípticas el jacobiano es $2r$.

Ejercicio 3. Sea H el sólido definido por $2x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ y $z \geq \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$. Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xz, -yz, e^{xy})$ a través de la frontera de H orientada de modo tal que las normales apunten hacia el exterior de H.

Respuesta: $\nabla\cdot\vec{f} = z$; flujo saliente = 12π.

En la foto el exponente de e se ve borroso; se leyó e^{xy}. El resultado es el mismo para cualquier exponente que no dependa de z.

Planteo: H está debajo del elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 = 12$ y encima del cono elíptico $z = \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$. ∂H es cerrada y suave a trozos (trozo de elipsoide + trozo de cono con vértice en el origen) y se pide normal exterior.

Hipótesis de Gauss: $\vec{f} = (2xz, -yz, e^{xy})$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ (polinomios y una exponencial), así que $\oiint_{\partial H} \vec{f}\cdot\check{n}\,d\sigma = \iiint_H \nabla\cdot\vec{f}\,dV$.

Divergencia: $\partial/\partial x(2xz) = 2z$, $\partial/\partial y(-yz) = -z$, $\partial/\partial z(e^{xy}) = 0$. $\mathbf{\nabla\cdot\vec{f} = z}$.

Proyección: igualando z^2: $12 - 2x^2 - y^2 = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. La proyección de H sobre el plano xy es el disco D de radio 2.

Cuenta: integrando primero en z, con primitiva $z^2/2$: $\iiint_H z\,dV = \iint_D \dfrac{1}{2}[z^2]_{\sqrt{(x^2 + 2y^2)}}^{\sqrt{(12 - 2x^2 - y^2)}}\,dA = \iint_D \dfrac{1}{2}(12 - 3(x^2 + y^2))\,dA$. En polares: $\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2)\,r\,dr\,d\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi[6r^2 - \dfrac{3}{4}r^4]_0^2 = \pi(24 - 12) = 12\pi$.

Resultado: flujo saliente = 12π.
Trampa: el flujo directo es un infierno (e^{xy} sobre un cono y un elipsoide); con Gauss la exponencial desaparece porque no depende de z.

Ejercicio 4. Sea Γ el arco de la curva
$\vec{X} = (\cos(\frac{\pi t}{4}), \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{4}), t - 1),\ t \in \mathbb{R}$
contenido en la bola cerrada de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{y^2} + 2z,\ 2xye^{y^2} - y^2,\ 2x)$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

Respuesta: Γ corresponde a $t \in [0, 2]$, de A = (1, 0, −1) a B = (0, 1, 1). Con $U = xe^{y^2} - y^3/3 + 2xz$, la circulación es U(B) − U(A) = −1/3 − (−1) = 2/3.

El enunciado escribe $\vec{f}(x, y)$, pero el campo tiene tres componentes y depende de z: se toma $\vec{f}(x, y, z)$. **El arco:** $\|\vec{X}(t)\|^2 = \cos^2(\pi t/4) + \operatorname{sen}^2(\pi t/4) + (t-1)^2 = 1 + (t-1)^2$. Estar en la bola cerrada de radio $\sqrt{2}$ es $1 + (t-1)^2 \le 2 \Leftrightarrow |t-1| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 2$. Extremos: $\vec{X}(0) = (1, 0, -1)$ y $\vec{X}(2) = (\cos(\pi/2), \operatorname{sen}(\pi/2), 1) = (0, 1, 1)$. Según la parametrización, Γ va de A = (1, 0, −1) a B = (0, 1, 1).
¿Es de gradientes? $\vec{f} = (e^{y^2} + 2z,\ 2xye^{y^2} - y^2,\ 2x)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. $R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0$; $P'_z - R'_x = 2 - 2 = 0$; $Q'_x - P'_y = 2ye^{y^2} - 2ye^{y^2} = 0$. $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$: es de gradientes.
Potencial: $U'_z = 2x \Rightarrow U = 2xz + h(x, y)$. $U'_x = 2z + h'_x = e^{y^2} + 2z \Rightarrow h = xe^{y^2} + k(y)$. $U'_y = 2xye^{y^2} + k'(y) = 2xye^{y^2} - y^2 \Rightarrow k = -y^3/3$. **$U = xe^{y^2} - y^3/3 + 2xz$.**
Circulación: $U(B) = 0 - 1/3 + 0 = -1/3$; $U(A) = 1 \cdot e^0 - 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$. $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -1/3 - (-1) =$ **2/3**.
Trampa: el recorte por la bola sale de la tercera coordenada (las dos primeras siempre suman 1): $|t - 1| \le 1$. Y al evaluar U(A) no olvidar el 2xz = −2.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ cuyos puntos satisfacen: $0 \le y \le x,\ z \le 4$. Calcule el área de Σ.

Respuesta: $A(\Sigma) = \dfrac{\pi(17\sqrt{17} - 1)}{48} \approx 4{,}52$.

Planteo: $z - x^2 - y^2 = 0$ es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, con vértice en el origen y abierto hacia arriba. Σ es la parte con $0 \le y \le x$ y $z \le 4$. $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\|\, dr\, d\theta$.
Parametrización: $\vec{X}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$.
Dominio D: $z \le 4$ es $r^2 \le 4$, o sea $0 \le r \le 2$. $0 \le y \le x$ obliga a $x \ge 0$ (porque $x \ge y \ge 0$), y en polares es $0 \le \operatorname{sen}\theta \le \cos\theta$, o sea $0 \le \theta \le \pi/4$. $D = [0, 2] \times [0, \pi/4]$.
Vector normal: $\vec{X}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r)$, $\vec{X}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$. $\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$. $\|\vec{X}_r \times \vec{X}_\theta\| = \sqrt{(4r^4 + r^2)} = r\sqrt{(1 + 4r^2)}$ ($r \ge 0$). Sólo se anula en r = 0, un punto que no aporta área.
Cuenta: $A = \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r\sqrt{(1 + 4r^2)}\, dr\, d\theta$. Integral en r: con $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r\, dr$, primitiva $\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}$; entre 0 y 2 da $\dfrac{17^{3/2} - 1}{12} = \dfrac{17\sqrt{17} - 1}{12}$. Integral en θ: multiplica por $\frac{\pi}{4}$.
Resultado: $A(\Sigma) = \dfrac{\boldsymbol{\pi(17\sqrt{17} - 1)}}{\boldsymbol{48}} \approx 4{,}52$.
Control (cartesianas): como gráfica, $dS = \sqrt{(1 + 4x^2 + 4y^2)}\, dx\, dy$ sobre el triángulo curvo $0 \le y \le \sqrt{2}$, $y \le x \le \sqrt{(4 - y^2)}$ (integrado en orden dx dy); integrado numéricamente da lo mismo ✓.
Trampa: $0 \le y \le x$ no es el primer cuadrante: es el octavo de plano entre el eje x y la recta y = x, $\theta \in [0, \pi/4]$. Con θ hasta π/2 la respuesta da el doble.

29/2/24 (libre)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Decida, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

> **Respuesta:** f no es continua en (0, 0): por $y = mx$ vale $m/(2 + m^2)$ (0 por $y = 0$, 1/3 por $y = x$). Por lo tanto no es diferenciable en el origen. Las parciales en el origen existen y valen 0.
>
> **Continuidad, planteo:** $f(0, 0) = 0$. Busco dos caminos con límites distintos.
> **Rectas $y = mx$ ($x \neq 0$):** $f(x, mx) = mx^2/(2x^2 + m^2x^2) = m/(2 + m^2)$. Sobre cada recta f es constante, así que el límite por esa recta es $m/(2 + m^2)$.
> **Dos caminos:** por $y = 0$ vale 0; por $y = x$ vale 1/3. Como son distintos, **no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y f no es continua en (0, 0)**.
> **Diferenciabilidad:** diferenciable implica continua; por el contrarrecíproco, **f no es diferenciable en el origen**.
> **Las parciales sí existen:** $f(h, 0) = 0$ y $f(0, k) = 0$, entonces $f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} 0/h = 0$ y $f'_y(0, 0) = 0$. Es el ejemplo típico de que tener parciales no alcanza ni siquiera para la continuidad.
> **Trampa:** no cortes después de ver que las parciales existen para escribir el plano tangente $z = 0$: el gráfico no tiene plano tangente en el origen. Y un único camino nunca prueba que el límite existe.

Ejercicio 2. Sean C la curva plana de ecuación $2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x = 6$ y $f(x, y) = xy - y^2$. Halla la derivada direccional de f en (1, –1) en la dirección tangente a C en el punto (1, 2) orientada hacia y^+.

> **Respuesta:** Versor tangente: $(-3/5, 4/5)$. $f'((1, -1), \check{v}) = 3$.
>
> **Ojo con los dos puntos:** la dirección se toma de C en (1, 2), pero la derivada de f se calcula en (1, –1). Son puntos distintos y así está el enunciado.
> **C cerca de (1, 2):** C es el conjunto de nivel 6 de $F(x, y) = 2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x$. (1, 2) está en C: $4 + \ln 1 + 2 = 6$ ✓. F es C^1 donde $x^2 + y^2 > 4$, que es un abierto que contiene a (1, 2) (ahí $x^2 + y^2 - 4 = 1$).
> **Gradiente de F:** $F_x = 2y + 2x/(x^2 + y^2 - 4) + 2$, $F_y = 2x + 2y/(x^2 + y^2 - 4)$. En (1, 2): $F_x = 4 + 2 + 2 = 8$, $F_y = 2 + 4 = 6$. $\nabla F(1, 2) = (8, 6) \neq \vec{0}$, así que por el teorema de la función implícita C es una curva regular cerca de (1, 2) y su tangente es perpendicular a $(8, 6) \parallel (4, 3)$.
> **Versor tangente orientado hacia y^+:** los perpendiculares a (4, 3) son $\pm(3, -4)$; el que tiene componente y positiva es $(-3, 4)$. Normalizado: $\check{v} = (-3/5, 4/5)$.
> **Derivada de f:** $f(x, y) = xy - y^2$ es polinómica, luego diferenciable, y $f'(P, \check{v}) = \nabla f(P) \cdot \check{v}$. $\nabla f = (y, x - 2y)$, en (1, –1) vale (–1, 3). Entonces $f'((1, -1), \check{v}) = (-1)(-3/5) + 3 \cdot (4/5) = 3/5 + 12/5 = \mathbf{3}$.
> **Trampa:** la derivada direccional se hace con un **versor** (dividir por 5) y con la orientación pedida: con $(3, -4)/5$ daría –3.

Ejercicio 3. Sea f un campo escalar de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto (3, –1) es $p(u, v) = -1 - 3v + uv + u^2 - 3v^2$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y - xy)$ en el punto $(2, 1, g(2, 1))$.

Respuesta: $g(2, 1) = 5$, $\nabla g(2, 1) = (14, -16)$. Plano tangente: $z = 5 + 14(x - 2) - 16(y - 1)$, o sea $14x - 16y - z = 7$.

Datos de f: el Taylor de orden 2 en $(3, -1)$ coincide con f en valor y derivadas (hasta orden 2) en ese punto. Como está desarrollado, se evalúa y se deriva: $f(3, -1) = p(3, -1) = -1 + 3 - 3 + 9 - 3 = 5$; $p'_u = v + 2u \to -1 + 6 = 5$; $p'_v = -3 + u - 6v \to -3 + 3 + 6 = 6$. **$\nabla f(3, -1) = (5, 6)$**.
El punto interior: $(x^2 - y^2, y - xy)$ en $(2, 1)$ da $(4 - 1, 1 - 2) = (3, -1)$ ✓. Entonces $g(2, 1) = 5$.
Hipótesis: f es C^2 (en particular diferenciable) y la interior es polinómica: g es diferenciable en $(2, 1)$, tiene plano tangente y vale la regla de la cadena.
Jacobiana interior en (2, 1): $u = x^2 - y^2$ da $(2x, -2y) = (4, -2)$; $v = y - xy$ da $(-y, 1 - x) = (-1, -1)$.
Cuenta: $g'_x = 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) = 14$; $g'_y = 5 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) = -16$.
Resultado: $z = 5 + 14(x - 2) - 16(y - 1)$, es decir **$14x - 16y - z = 7$**. Control: $28 - 16 - 5 = 7$ ✓.
Trampa: no leas $f'_u(3, -1)$ como el coeficiente de u en p (que es 0): eso sería la derivada en el origen. Primero derivás p, después evaluás en $(3, -1)$.

Ejercicio 4. Demuestre que el sistema
$\{ x - yz - \cos(yz) = 0 \; ; \; x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3 = 0 \}$
define una curva regular C en un entorno del punto $P = (1, 0, 2)$, y halle la intersección de la recta tangente a C en P con el plano de ecuación $2y - x + z = 5$.

Respuesta: C es regular cerca de P ($\partial(F_1, F_2)/\partial(y, z) = -2 \neq 0$). Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, -4)$; corta al plano en $(-1, -1, 6)$.

P está en C: $F_1(P) = 1 - 0 - \cos 0 = 0$ y $F_2(P) = 1 + 0 + 2 - 0 - 3 = 0$ ✓.
Hipótesis del teorema (TFI para sistemas): $F_1 = x - yz - \cos(yz)$ y $F_2 = x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3$ son C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (polinomios y coseno). Gradientes: $\nabla F_1 = (1, -z + z\,\mathrm{sen}(yz), -y + y\,\mathrm{sen}(yz))$, que en P vale $(1, -2, 0)$; $\nabla F_2 = (2x + z, 3y^2 - z^2, x - 2yz)$, que en P vale $(4, -4, 1)$. El jacobiano respecto de (y, z) en P es $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$.
Conclusión: existen un entorno de $x = 1$ y funciones $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ de clase C^1, con $\varphi(1) = 0$ y $\psi(1) = 2$, tales que cerca de P las soluciones del sistema son exactamente los puntos $(x, \varphi(x), \psi(x))$. Esa parametrización es C^1 y su derivada $(1, \varphi', \psi')$ nunca es nula: **C es una curva regular en un entorno de P**.
Vector tangente: $\vec{T} = \nabla F_1(P) \times \nabla F_2(P) = (1, -2, 0) \times (4, -4, 1) = ((-2) \cdot 1 - 0 \cdot (-4), 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 4) = (-2, -1, 4)$, que es paralelo a $(2, 1, -4)$. Control derivando el sistema respecto de x en P: $1 - 2\varphi' = 0$ y $4 - 4\varphi' + \psi' = 0$ dan $\varphi'(1) = 1/2$ y $\psi'(1) = -2$, o sea $(1, 1/2, -2) \parallel (2, 1, -4)$ ✓.
Recta tangente: $(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, -4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Corte con $2y - x + z = 5$: $(2, 1, -4) \cdot (-1, 2, 1) = -4 \neq 0$, hay un único punto. Reemplazando: $2\lambda - (1 + 2\lambda) + (2 - 4\lambda) = 5$, o sea $1 - 4\lambda = 5$ y $\lambda = -1$.
Resultado: $(-1, -1, 6)$. Control: $-2 + 1 + 6 = 5$ ✓.
Trampa: “demuestre que define una curva regular” no se contesta con el producto vectorial suelto: hay que nombrar el teorema, decir que F_1 y F_2 son C^1, que P cumple el sistema y que un menor 2×2 del jacobiano es no nulo (equivalente a que los gradientes no sean paralelos). Y al derivar cos(yz) va la regla de la cadena: su gradiente es $-\mathrm{sen}(yz) \cdot (0, z, y)$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ y determine en qué puntos del disco se producen dichos extremos absolutos. .

Respuesta: Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; mínimo absoluto $-\sqrt{2}$ en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Existencia (Weierstrass): el disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es cerrado (contiene su borde) y acotado, o sea compacto, y f es continua (polinomio). Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos en D.
Interior: $\nabla f = (1, 1) \neq \vec{0}$ en todo punto, así que no hay puntos críticos en el interior: los extremos tienen que estar en la frontera $x^2 + y^2 = 1$.
Regularidad de la restricción: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\nabla g = (2x, 2y)$, que sólo se anula en (0, 0), que no está en la circunferencia. Vale Lagrange en todos sus puntos.
Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$ da $1 = 2\lambda x$ y $1 = 2\lambda y$. Tiene que ser $\lambda \neq 0$, así que $x = y = 1/(2\lambda)$. Reemplazando en $x^2 + y^2 = 1$: $2x^2 = 1$, $x = \pm\sqrt{2}/2$. Candidatos $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. La circunferencia es una curva cerrada, sin puntas de tramo que agregar.
Comparación: $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ y $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$.
Resultado: máximo absoluto **$\sqrt{2}$** en **$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$**; mínimo absoluto **$-\sqrt{2}$** en **$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$**.
Control: con $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ queda $f = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$, que recorre $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ✓.
Trampa: “∇f nunca se anula, entonces no hay extremos” está mal: eso sólo descarta el interior. Por Weierstrass los extremos existen, y están en el borde.

27/2/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y - 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** D es el triángulo de vértices (0, 0), (–1, 3) y (5, 15). M = 90k (k > 0 la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** la distancia de (x, y) al eje x es |y|. En D vale $y \geq 3|x| \geq 0$, así que |y| = y y la densidad es δ(x, y) = ky, con k > 0. $M = \iint_D ky\,dx\,dy$.
> **La región (dibujo):** $y \geq 3|x|$ es lo que queda por encima de una V con vértice en el origen, formada por las semirrectas $y = 3x$ ($x \geq 0$) e $y = -3x$ ($x \leq 0$). $y - 2x \leq 5$ es el semiplano debajo de la recta $y = 2x + 5$ (pendiente 2, ordenada al origen 5). Como esa recta es menos empinada que la rama de la V hacia la que sube, termina cortando las dos ramas y cierra un triángulo. Intersecciones: con la rama derecha $y = 3x$, $3x = 2x + 5$ da x = 5, punto (5, 15); con la rama izquierda $y = -3x$, $-3x = 2x + 5$ da x = –1, punto (–1, 3). D es el triángulo de vértices (0, 0), (–1, 3) y (5, 15): el origen abajo y el lado de arriba sobre la recta.
> **Límites (tipo I, partiendo en x = 0 porque el piso cambia de fórmula):** $x \in [-1, 0]$: el piso es la rama $y = -3x$ y el techo la recta, $-3x \leq y \leq 2x + 5$. $x \in [0, 5]$: el piso es $y = 3x$, $3x \leq y \leq 2x + 5$.
> **Integral en y:** primitiva $\frac{y^2}{2}$. En los dos tramos da lo mismo, porque $(-3x)^2 = (3x)^2$: $\frac{(2x + 5)^2 - 9x^2}{2} = \frac{-5x^2 + 20x + 25}{2}$.
> **Integral en x:** primitiva $F(x) = \frac{1}{2}(-\frac{5x^3}{3} + 10x^2 + 25x)$. Tramo izquierdo: $F(0) - F(-1) = 0 - \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + 10 - 25) = \frac{20}{3}$. Tramo derecho: $F(5) - F(0) = \frac{1}{2}(-\frac{625}{3} + 250 + 125) = \frac{250}{3}$. Suma: $\frac{270}{3} = 90$.
> **Resultado:** $M = k \cdot 90 =$ **90k**.
> **Control en el otro orden (dx dy):** ahora hay que partir en y = 3, donde el borde izquierdo pasa de la V a la recta. $y \in [0, 3]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre las dos ramas de la V), $y \in [3, 15]$: $\frac{y - 5}{2} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre la recta y la rama derecha). $\int_0^3 y \cdot \frac{2y}{3}\,dy = [\frac{2y^3}{9}]_0^3 = 6$ y $\int_3^{15} \frac{15y - y^2}{6}\,dy = [\frac{5y^2}{4} - \frac{y^3}{18}]_3^{15} = \frac{375}{4} - \frac{39}{4} = 84$. Total 90 ✓.
> **Control geométrico:** el área del triángulo es $\frac{1}{2}|5 \cdot 3 - 15 \cdot (-1)| = 15$ y la ordenada del baricentro es $\frac{0 + 3 + 15}{3} = 6$, así que $\iint_D y\,dA = 15 \cdot 6 = 90$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje x es |y|, no |x|. Y en el orden dy dx el piso es –3x a la izquierda del origen y 3x a la derecha. Escribir 3x en todo el intervalo no deja nada afuera: agrega un triángulo que no es parte de D (el de vértices (0, 0), (–1, –3) y (–1, 3), debajo de la rama $y = -3x$), donde además |y| = –y. En esta cuenta el número no cambia sólo de casualidad: ∬ y sobre ese triángulo da 0 porque es simétrico respecto del eje x. La región queda mal descripta igual, y con la densidad bien puesta (k|y|) daría otra masa.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 3 - 4\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi$.
>
> **Planteo:** no conocemos g, así que no se puede integrar $\vec{f}$ de forma directa: hay que separar la parte que es gradiente.
> **Descomposición:** sea G una primitiva de g ($G' = g$, y $G \in C^2$ porque $g \in C^1$). Entonces $\nabla(x^3y^2z^2 + G(x)) = (3x^2y^2z^2 + g(x), 2x^3yz^2, 2x^3y^2z)$, así que $\vec{f} = \nabla\psi + (0, -x, 0)$ con $\psi = x^3y^2z^2 + G(x)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$.
> **La parte de gradientes:** la curva es cerrada, $\vec{\alpha}(0) = (2, 0, -1) = \vec{\alpha}(2\pi)$, y $\vec{\alpha}$ es C^1, así que $\oint_C \nabla\psi \cdot d\vec{s} = \psi(\vec{\alpha}(2\pi)) - \psi(\vec{\alpha}(0)) = 0$.
> **El resto:** $\oint_C (0, -x, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -x(t)\, y'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -(2\cos t)(2\cos t)\, dt = -4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -4\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\mathrm{rot}(0, -x, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 3 - 2x$ (porque $z = 3 - 4\cos t = 3 - 2x$), sobre el disco $x^2 + y^2 \le 4$. La parametrización recorre la proyección en sentido antihorario, que es compatible con la normal hacia arriba $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -(\text{área del disco}) = -4\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -4\pi}$.
> **Trampa:** $\vec{f}$ no es de gradientes ($\mathrm{rot}\,\vec{f} = (0, 0, -1) \neq \vec{0}$), así que no da 0 por ser curva cerrada: sólo se anula la parte que sí es gradiente.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, 2x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 4\pi + 12$ con la normal saliente $\vec{N} = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$; con la entrante, $-(4\pi + 12)$.
>
> **Planteo:** Σ es un cuarto de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ (primer cuadrante) entre $z = 0$ y $z = 2$. No es cerrada y el enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y dibujarla.
> **Gráfico y orientación elegida:** dibujá el cuarto de cilindro de radio 2 entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, con los bordes verticales sobre los planos xz e yz. Elegimos la normal **saliente**: flechas horizontales que salen de la pared alejándose del eje z.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, con $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) y $0 \le z \le 2$. $\vec{X}_\theta = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)}$.
> **Orientación:** $\vec{N} = (x, y, 0)$ apunta desde el eje z hacia afuera (por ejemplo en $\theta = 0$ da $(2, 0, 0)$ en el punto $(2, 0, z)$): coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (x + y, 2x + y, xz^2)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (2\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 4\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2z^2\cos\theta)$. Como $\vec{N}$ no tiene componente z, xz^2 no aporta. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (2\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot 2\cos\theta + (4\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 4\cos^2\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 8\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\theta = 4 + 12\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 4 + 6\,\mathrm{sen}\,2\theta$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4 + 6\,\mathrm{sen}\,2\theta)\, dz\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (4 + 6\,\mathrm{sen}\,2\theta)\, d\theta = 2[4\theta - 3\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = 2[(2\pi + 3) - (0 - 3)] = 2(2\pi + 6) = 4\pi + 12$.
> **Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 4\pi + 12}$** con la normal saliente (con la entrante, $\Phi = -(4\pi + 12)$).
> **Control con Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Cerramos con el techo, el piso y las caras $x = 0$ e $y = 0$; V es el cuarto de cilindro macizo. $\mathrm{div}\,\vec{f} = 1 + 1 + 2xz = 2 + 2xz$. $\iiint_V (2 + 2xz)\, dV = 2\cdot\mathrm{vol}(V) + 2(\iint x\, dA)(\int_0^2 z\, dz) = 2\cdot 2\pi + 2\cdot\frac{8}{3}\cdot 2 = 4\pi + \frac{32}{3}$ ($\mathrm{vol}(V) = \frac{\pi\cdot 4}{4}\cdot 2 = 2\pi$ y $\iint x\, dA$ sobre el cuarto de disco $= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\cos\theta\, dr$

$d\theta = \frac{8}{3}$). Tapas con normal saliente: techo $z = 2$, $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = 4x$, flujo $4\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}$; piso $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = -xz^2 = 0$; cara $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -y$, flujo $\int_0^2 \int_0^2 -y\, dy\, dz = -4$; cara $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -2x$, flujo $\int_0^2 \int_0^2 -2x\, dx\, dz = -8$. $\Phi_\Sigma = 4\pi + \frac{32}{3} - \frac{32}{3} - 0 + 4 + 8 = 4\pi + 12$ ✓.

Trampa: el cuarto del primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$; y el producto mixto sen θ cos θ se integra fácil como ½ sen 2θ. Sin el dibujo de la orientación el ejercicio no está completo.

Ejercicio 4. Calcule
$\iiint_H z\, dx\, dy\, dz$,
donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Respuesta: $\iiint_H z\, dxdydz = 13\pi/4$.

Planteo: integrar z sobre $H = \{x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

El cuerpo: $x^2 + y^2 + 5z^2 = 9$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 3, 3 y $3/\sqrt{5} \approx 1{,}34$. Como $1 < 3/\sqrt{5}$, los planos $z = 0$ y $z = 1$ lo cortan los dos: H es una rodaja con base el disco $x^2 + y^2 \leq 9$ (radio 3) en $z = 0$, tapa el disco $x^2 + y^2 \leq 4$ (radio 2) en $z = 1$, y costado el elipsoide. Cada tajada $z =$ cte es el disco $x^2 + y^2 \leq 9 - 5z^2$.

Coordenadas: cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq r \leq \sqrt{(9 - 5z^2)}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Cuenta (por tajadas): la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(9 - 5z^2)$. Queda $\pi\int_0^1 z(9 - 5z^2)\, dz$. Primitiva $\frac{9z^2}{2} - \frac{5z^4}{4}$, entre 0 y 1: $\frac{9}{2} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$.

Resultado: $\iiint_H z\, dV = \frac{13\pi}{4}$.

Control (orden dz dr): acá el techo cambia: para $0 \leq r \leq 2$ el techo es el plano $z = 1$; para $2 \leq r \leq 3$ es el elipsoide $z = \sqrt{(\frac{9 - r^2}{5})}$. $2\pi[\int_0^2 r\cdot\frac{1}{2}\, dr + \int_2^3 r\cdot\frac{9 - r^2}{10}\, dr] = 2\pi[1 + \frac{1}{10}(\frac{81}{4} - 14)] = 2\pi(1 + \frac{5}{8}) = \frac{13\pi}{4}$ ✓.

Trampa: si integrás primero en z, no podés poner un solo techo: hay que partir en $r = 2$. Por tajadas $z =$ cte no hace falta partir nada, por eso conviene ese orden.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (2, 0) y está contenida en el semiplano $x \geq 1$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-\pi y\,\text{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las ordenadas sean crecientes.

Respuesta: C: $x^2 + 4y^2 = 4$ con $x \geq 1$, de $(1, -\sqrt{3}/2)$ a $(1, \sqrt{3}/2)$. $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\sqrt{3}$.

Línea de campo: una línea de campo $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ cumple $x' = 4y$, $y' = -x$. Donde $y \neq 0$ se puede escribir $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$, de variables separables: $4y\, dy = -x\, dx \Rightarrow 2y^2 = -x^2/2 + c \Rightarrow x^2 + 4y^2 = K$. Como en (2, 0) es $y = 0$ (ahí la tangente es vertical), conviene confirmarlo sobre el sistema: $\frac{d}{ds}(x^2 + 4y^2) = 2x\cdot 4y + 8y\cdot(-x) = 0$, así que $x^2 + 4y^2$ es constante a lo largo de toda línea de campo, también al cruzar $y = 0$.

Por (2, 0): K = 4, o sea la elipse $\mathbf{x^2 + 4y^2 = 4}$ ($x^2/4 + y^2 = 1$). Con $x \geq 1$: $4y^2 = 4 - x^2 \leq 3$, y $\in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$, y es el arco derecho, que pasa por (2, 0). Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (2\cos t, \text{sen}\, t)$, $t \in [-\pi/3, \pi/3]$ (x

$= 2\cos t \geq 1 \Leftrightarrow |t| \leq \pi/3$).

Orientación: ordenadas crecientes: t creciente, de A = (1, $-\sqrt{3}/2$) a B = (1, $\sqrt{3}/2$).

¿$\vec{f}$ es de gradientes? P = $-\pi y \operatorname{sen}(\pi x)$ y Q = $\cos(\pi x)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) = Q'_x$. Potencial: $\phi = y\cos(\pi x)$ ($\phi'_x = -\pi y \operatorname{sen}(\pi x)$, $\phi'_y = \cos(\pi x)$ ✓).

Cuenta: $\cos(\pi) = -1$, así que $\phi(B) = (\sqrt{3}/2)(-1) = -\sqrt{3}/2$ y $\phi(A) = (-\sqrt{3}/2)(-1) = \sqrt{3}/2$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = -\sqrt{3}$.

Trampa: la línea de campo es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, no la circunferencia: los coeficientes 4 y 1 de $\vec{g}$ la estiran. Y ojo con $\cos(\pi \cdot 1) = -1$, que da vuelta el signo.

27/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y + 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

> **Respuesta:** D es el triángulo de vértices (0, 0), (−5, 15) y (1, 3). M = 90k (k > 0 la constante de proporcionalidad).
>
> **Planteo:** la distancia de (x, y) al eje x es |y|. En D vale $y \geq 3|x| \geq 0$, así que |y| = y y la densidad es δ(x, y) = ky, con k > 0. $M = \iint_D ky\,dx\,dy$.
> **La región (dibujo):** $y \geq 3|x|$ es lo que queda por encima de una V con vértice en el origen, formada por las semirrectas $y = 3x$ ($x \geq 0$) e $y = -3x$ ($x \leq 0$). $y + 2x \leq 5$ es el semiplano debajo de la recta $y = 5 - 2x$ (pendiente −2, ordenada al origen 5). Como esa recta es menos empinada que la rama de la V hacia la que sube, termina cortando las dos ramas y cierra un triángulo. Intersecciones: con la rama derecha $y = 3x$, $3x = 5 - 2x$ da $x = 1$, punto (1, 3); con la rama izquierda $y = -3x$, $-3x = 5 - 2x$ da $x = -5$, punto (−5, 15). D es el triángulo de vértices (0, 0), (−5, 15) y (1, 3): el origen abajo y el lado de arriba sobre la recta.
> **Límites (tipo I, partiendo en x = 0 porque el piso cambia de fórmula):** $x \in [-5, 0]$: el piso es la rama $y = -3x$ y el techo la recta, $-3x \leq y \leq 5 - 2x$. $x \in [0, 1]$: el piso es $y = 3x$, $3x \leq y \leq 5 - 2x$.
> **Integral en y:** primitiva $\frac{y^2}{2}$. En los dos tramos da lo mismo, porque $(-3x)^2 = (3x)^2$: $\frac{(5 - 2x)^2 - 9x^2}{2} = \frac{-5x^2 - 20x + 25}{2}$.
> **Integral en x:** primitiva $F(x) = \frac{1}{2}(-\frac{5x^3}{3} - 10x^2 + 25x)$. Tramo izquierdo: $F(0) - F(-5) = 0 - \frac{1}{2}(\frac{625}{3} - 250 - 125) = \frac{250}{3}$. Tramo derecho: $F(1) - F(0) = \frac{1}{2}(-\frac{5}{3} - 10 + 25) = \frac{20}{3}$. Suma: $\frac{270}{3} = 90$.
> **Resultado:** $M = k \cdot 90 =$ **90k**.
> **Control en el otro orden (dx dy):** ahora hay que partir en y = 3, donde el borde derecho pasa de la V a la recta. $y \in [0, 3]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{y}{3}$ (entre las dos ramas de la V), $y \in [3, 15]$: $-\frac{y}{3} \leq x \leq \frac{5 - y}{2}$ (entre la rama izquierda y la recta). $\int_0^3 y \cdot \frac{2y}{3}\,dy = 6$ y $\int_3^{15} \frac{15y - y^2}{6}\,dy = 84$. Total 90 ✓. Además es el reflejo $x \to -x$ de la región del tema 1, y la densidad y no cambia con ese reflejo: la masa tenía que dar igual.
> **Control geométrico:** el área del triángulo es $\frac{1}{2}|(-5) \cdot 3 - 15 \cdot 1| = 15$ y la ordenada del baricentro es $\frac{0 + 3 + 15}{3} = 6$, así que $\iint_D y\,dA = 15 \cdot 6 = 90$ ✓.
> **Trampa:** la distancia al eje x es |y|, no |x|. Y en el orden dy dx el piso es $-3x$ a la izquierda del origen y $3x$ a la derecha. Escribir $3x$ en todo el intervalo no deja nada afuera: agrega un triángulo que no es parte de D (el de vértices (0, 0), (−5, −15) y (−5, 15), debajo de la rama $y = -3x$), donde además $|y| = -y$. En esta cuenta el número no cambia sólo de casualidad: $\iint y$ sobre ese triángulo da 0 porque es simétrico respecto del eje x. La región queda mal descripta igual, y con la densidad bien puesta (k|y|) daría otra masa.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2 - x, 2x^3y^2z + g(z))$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), 4 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

> **Respuesta:** $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi$.
>
> **Planteo:** no conocemos g, así que no se puede integrar $\vec{f}$ de forma directa: hay que separar la parte que es gradiente.
> **Descomposición:** sea G una primitiva de g ($G' = g$, y $G \in C^2$ porque $g \in C^1$). Entonces $\nabla(x^3y^2z^2 + G(z)) = (3x^2y^2z^2, 2x^3yz^2, 2x^3y^2z + g(z))$, así que $\vec{f} = \nabla\psi + (0, -x, 0)$ con $\psi = x^3y^2z^2 + G(z)$ de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$.
> **La parte de gradientes:** la curva es cerrada, $\vec{\alpha}(0) = (3, 0, -2) = \vec{\alpha}(2\pi)$, y $\vec{\alpha}$ es C^1, así que $\oint_C \nabla\psi \cdot d\vec{s} = \psi(\vec{\alpha}(2\pi)) - \psi(\vec{\alpha}(0)) = 0$.
> **El resto:** $\oint_C (0, -x, 0) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} -x(t)\, y'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -(3\cos t)(3\cos t)\, dt = -9\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -9\pi$.
> **Control con el teorema del rotor:** $\operatorname{rot}(0, -x, 0) = (0, 0, -1)$. La curva está en el plano $z = 4 - 2x$ (porque $z = 4 - 6\cos t = 4 - 2x$), sobre el disco $x^2 + y^2 \le 9$. La parametrización recorre la proyección en sentido antihorario, que es compatible con la normal hacia arriba $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2, 0, 1)$. $\iint (0, 0, -1) \cdot (2, 0, 1)\, dx\, dy = -(\text{área del disco}) = -9\pi$ ✓.
> **Resultado:** $\boldsymbol{\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -9\pi}$.
> **Trampa:** $\vec{f}$ no es de gradientes ($\operatorname{rot}\vec{f} = (0, 0, -1) \neq \vec{0}$), así que no da 0 por ser curva cerrada: sólo se anula la parte que sí es gradiente.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + 2y, x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

> **Respuesta:** $\Phi = 9\pi + 27$ con la normal saliente $\vec{N} = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)$; con la entrante, $-(9\pi + 27)$.
>
> **Planteo:** Σ es un cuarto de la pared del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (primer cuadrante) entre $z = 0$ y $z = 2$. No es cerrada y el enunciado no fija la orientación: hay que elegirla y dibujarla.
> **Gráfico y orientación elegida:** dibujá el cuarto de cilindro de radio 3 entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, con los bordes verticales sobre los planos xz e yz. Elegimos la normal **saliente**: flechas horizontales que salen de la pared alejándose del eje z.
> **Parametrización:** $\vec{X}(\theta, z) = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, z)$, con $0 \le \theta \le \pi/2$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) y $0 \le z \le 2$. $\vec{X}_\theta = (-3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta, 0)$, $\vec{X}_z = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\vec{N} = \vec{X}_\theta \times \vec{X}_z = (3\cos\theta, 3\operatorname{sen}\theta, 0)}$.
> **Orientación:** $\vec{N} = (x, y, 0)$ apunta desde el eje z hacia afuera (por ejemplo en $\theta = 0$ da $(3, 0, 0)$ en el punto $(3, 0, z)$): coincide con la elegida, no hay que cambiar el signo.
> **$\vec{f}\cdot\vec{N}$:** $\vec{f} = (x + 2y, x + y, xz^2)$, sobre Σ $\vec{f}(\vec{X}) = (3\cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta, 3z^2\cos\theta)$. Como $\vec{N}$ no tiene componente z, xz^2 no aporta. $\vec{f}\cdot\vec{N} = (3\cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta)\cdot 3\cos\theta + (3\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\cdot 3\operatorname{sen}\theta = 9\cos^2\theta + 18\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta = 9 + 27\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta$.
> **Cuenta:** $\Phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta)\, dz\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (9 + \frac{27}{2}\operatorname{sen}2\theta)\, d\theta = 2[9\theta - \frac{27}{4}\cos2\theta]_0^{\pi/2}$
> $= 2[(\frac{9\pi}{2} + \frac{27}{4}) + \frac{27}{4}] = 9\pi + 27$.
> **Resultado: $\boldsymbol{\Phi = 9\pi + 27}$** con la normal saliente (con la entrante, $\Phi = -(9\pi + 27)$).
> **Control con Gauss:** $\vec{f}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$. Cerramos con el techo, el piso y las caras $x = 0$ e $y = 0$; V es el cuarto

de cilindro macizo. div f = 1 + 1 + 2xz = 2 + 2xz. $\iiint_V (2 + 2xz)\, dV = 2\cdot\text{vol}(V) + 2(\iint x\, dA)(\int_0^2 z\, dz) = 2\cdot \frac{9\pi}{2} + 2\cdot 9\cdot 2 = 9\pi + 36$ ($\text{vol}(V) = \frac{9\pi}{4}\cdot 2$ y $\iint x\, dA$ sobre el cuarto de disco $= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = 9$). Tapas con normal saliente: techo $z = 2$, $\vec{f}\cdot(0, 0, 1) = 4x$, flujo 36; piso $z = 0$, $\vec{f}\cdot(0, 0, -1) = 0$; cara $x = 0$, $\vec{f}\cdot(-1, 0, 0) = -2y$, flujo $\int_0^2\int_0^3 -2y\, dy\, dz = -18$; cara $y = 0$, $\vec{f}\cdot(0, -1, 0) = -x$, flujo $\int_0^2\int_0^3 -x\, dx\, dz = -9$. $\Phi_\Sigma = 9\pi + 36 - 36 - 0 + 18 + 9 = 9\pi + 27$ ✓.

Trampa: el cuarto del primer octante es $\theta \in [0, \pi/2]$; y el producto mixto sen θ cos θ se integra fácil como ½ sen 2θ. Sin el dibujo de la orientación el ejercicio no está completo.

Ejercicio 4. Calcule

$\iiint_H z\, dx\, dy\, dz$,

donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 7z^2 \le 16,\ 0 \le z \le 1\}$.

Respuesta: $\iiint_H z\, dx dy dz = 25\pi/4$.

Planteo: integrar z sobre $H = \{x^2 + y^2 + 7z^2 \le 16,\ 0 \le z \le 1\}$.

El cuerpo: $x^2 + y^2 + 7z^2 = 16$ es un elipsoide de revolución alrededor del eje z, de semiejes 4, 4 y $4/\sqrt{7} \approx 1{,}51$. Como $1 < 4/\sqrt{7}$, los planos $z = 0$ y $z = 1$ lo cortan los dos: H es una rodaja con base el disco $x^2 + y^2 \le 16$ (radio 4) en $z = 0$, tapa el disco $x^2 + y^2 \le 9$ (radio 3) en $z = 1$, y costado el elipsoide. Cada tajada $z = \text{cte}$ es el disco $x^2 + y^2 \le 16 - 7z^2$.

Coordenadas: cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$, jacobiano r. Rangos: $0 \le z \le 1$, $0 \le r \le \sqrt{(16 - 7z^2)}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Cuenta (por tajadas): la integral en r y θ de r es el área del disco, $\pi(16 - 7z^2)$. Queda $\pi\int_0^1 z(16 - 7z^2)\, dz$. Primitiva $8z^2 - \frac{7z^4}{4}$, entre 0 y 1: $8 - \frac{7}{4} = \frac{25}{4}$.

Resultado: $\iiint_H z\, dV = \frac{25\pi}{4}$.

Control (orden dz dr): para $0 \le r \le 3$ el techo es el plano $z = 1$; para $3 \le r \le 4$ es el elipsoide $z = \sqrt{(\frac{16 - r^2}{7})}$. $2\pi[\int_0^3 r\cdot\frac{1}{2}\, dr + \int_3^4 r\cdot\frac{16 - r^2}{14}\, dr] = 2\pi[\frac{9}{4} + \frac{1}{14}\cdot\frac{49}{4}] = 2\pi(\frac{9}{4} + \frac{7}{8}) = \frac{25\pi}{4}$ ✓.

Trampa: integrando primero en z hay que partir en $r = 3$, donde el plano $z = 1$ deja de ser el techo. Por tajadas $z = \text{cte}$ se evita.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (0, 2) y está contenida en el semiplano $y \ge 1$.

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y),)$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las abscisas sean decrecientes.

Respuesta: C: $4x^2 + y^2 = 4$ con $y \ge 1$, de $(\sqrt{3}/2, 1)$ a $(-\sqrt{3}/2, 1)$. $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sqrt{3}$.

La coma final en $\vec{f} = (\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y),)$ es una errata: $\vec{f}$ es el campo de $\mathbb{R}^2$ $(\cos(\pi y), -\pi x\,\text{sen}(\pi y))$.

Línea de campo: una línea de campo $\vec{\alpha}(s) = (x(s), y(s))$ cumple $x' = y$, $y' = -4x$. Donde $y \ne 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{y}$, de variables separables: $y\, dy = -4x\, dx \Rightarrow y^2/2 = -2x^2 + c \Rightarrow 4x^2 + y^2 = K$. Confirmación sobre el sistema: $\frac{d}{ds}(4x^2 + y^2) = 8x\cdot y + 2y\cdot(-4x) = 0$, así que $4x^2 + y^2$ es constante a lo largo de toda línea de campo.

Por (0, 2): K = 4, o sea la elipse $\mathbf{4x^2 + y^2 = 4}$ ($x^2 + y^2/4 = 1$). Con $y \ge 1$: $4x^2 = 4 - y^2 \le 3$, $x \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$, y es el arco de arriba, que pasa por (0, 2). Parametrización: $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t \in [\pi/6, 5\pi/6]$

($y = 2 \operatorname{sen} t \geq 1 \Leftrightarrow t \in [\pi/6, 5\pi/6]$).

Orientación: abscisas decrecientes: $x = \cos t$ decrece con t, así que t creciente, de $A = (\sqrt{3}/2, 1)$ a $B = (-\sqrt{3}/2, 1)$.

¿$\vec{f}$ es de gradientes? $P = \cos(\pi y)$ y $Q = -\pi x \operatorname{sen}(\pi y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo, y $P'_y = -\pi \operatorname{sen}(\pi y) = Q'_x$. Potencial: $\phi = x\cos(\pi y)$ ($\phi'_x = \cos(\pi y)$, $\phi'_y = -\pi x \operatorname{sen}(\pi y)$ ✓).

Cuenta: $\cos(\pi) = -1$, así que $\phi(B) = (-\sqrt{3}/2)(-1) = \sqrt{3}/2$ y $\phi(A) = (\sqrt{3}/2)(-1) = -\sqrt{3}/2$.

Resultado: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = \sqrt{3}$.

Trampa: la línea de campo es $4x^2 + y^2 = 4$ (más alta que ancha), no $x^2 + 4y^2 = 4$: el 4 de $\vec{g}$ multiplica a x en la segunda componente, y eso pone el 4 delante de x^2 en la cantidad que se conserva.

20/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + 2xz, x^2z, \varphi(x, z))$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, a lo largo del borde de la superficie

$\Sigma : x = 2, y + z \le 4, y \ge 0, z \ge 0.$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

> **Respuesta:** Recorriendo $(2, 0, 0) \to (2, 4, 0) \to (2, 0, 4) \to (2, 0, 0)$ (antihorario visto desde x positivo, normal $(1, 0, 0)$): $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32$. En el sentido contrario, 32.
>
> **Planteo:** $\vec{f} = (P, Q, R)$ con $P = y^2 + 2xz$, $Q = x^2z$, $R = \varphi(x, z)$. Como $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\vec{f}$ es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$.
> **La superficie:** Σ es el triángulo del plano $x = 2$ con vértices $A = (2, 0, 0)$, $B = (2, 4, 0)$ y $D = (2, 0, 4)$; su borde C son los tres lados, una curva cerrada y suave a trozos. Σ es plana (suave, orientable, acotada) y ya es la superficie más cómoda con ese borde: la uso tal cual.
> **Rotor:** $R'_y - Q'_z = 0 - x^2 = -x^2$ (φ no depende de y); $P'_z - R'_x = 2x - \varphi'_x(x, z)$; $Q'_x - P'_y = 2xz - 2y$. **$\operatorname{rot} \vec{f} = (-x^2, 2x - \varphi'_x, 2xz - 2y)$**.
> **Orientación:** tomo $\vec{n} = (1, 0, 0)$, hacia x creciente. Regla de la mano derecha: con el pulgar hacia x positivo, los dedos recorren el borde en sentido antihorario **visto desde x positivo**, con el eje y hacia la derecha y el z hacia arriba (porque $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$). Eso es **A → B → D → A**: $(2, 0, 0) \to (2, 4, 0) \to (2, 0, 4) \to (2, 0, 0)$. En el gráfico, el triángulo en el plano $x = 2$ con esas flechas y la normal saliendo hacia x positivo.
> **Cuenta:** $\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} = -x^2$, que en Σ ($x = 2$) vale -4; la componente con φ se multiplica por 0. $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \int_0^4 \int_0^{4-y} (-4)\, dz\, dy = -4 \int_0^4 (4 - y)\, dy = -4\,[4y - y^2/2]_0^4 = -4 \cdot 8 = -32$.
> **Resultado:** recorriendo A → B → D → A, **$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = -32$** (en el sentido contrario, 32).
> **Control directo:** en $x = 2$ es $dx = 0$ y queda $\int 4z\, dy + \varphi(2, z)\, dz$. En AB, $z = 0$; en DA, $dy = 0$; los dos tramos con φ (BD y DA) se cancelan entre sí porque recorren el mismo intervalo de z en sentidos opuestos. Queda BD: $(2, 4 - t, t)$, $t \in [0, 4]$, $dy = -dt$: $\int_0^4 -4t\, dt = -32$ ✓.
> **Trampa:** "antihorario" depende de desde dónde mires: mirá desde la punta de la normal. Mirando el plano $x = 2$ desde el origen el mismo recorrido se ve horario.

Ejercicio 2. Hallar el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xe^z, z^2)$ a través de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 18, z \ge 3.$

Considere la orientación para la cual las normales apuntan hacia el origen.

> **Respuesta:** $\Phi = -243\pi/2$ (normales hacia el origen). Con la saliente sería $243\pi/2$.
>
> **Planteo:** Σ es el casquete de la esfera de radio $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ con $z \ge 3$; su borde es la circunferencia $z = 3$, $x^2 + y^2 = 18 - 9 = 9$. Es abierta: la cerramos con la tapa T: $z = 3$, $x^2 + y^2 \le 9$, y $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 18, z \ge 3\}$.
> **Orientación:** "hacia el origen" es hacia adentro de la esfera, o sea **entrante** a V. Calculamos todo con normal saliente y al final cambiamos el signo.
> **Hipótesis:** $\vec{f} = (yz, xe^z, z^2)$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$; V acotado, $\partial V = \Sigma \cup T$ cerrada y suave a trozos.
> **Divergencia:** $\partial(yz)/\partial x + \partial(xe^z)/\partial y + \partial(z^2)/\partial z = 0 + 0 + 2z$.
> **Triple (cilíndricas):** $3 \le z \le \sqrt{(18 - r^2)}$, $0 \le r \le 3$. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 [z^2]_3^{\sqrt{(18 - r^2)}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^3 (9 - r^2)\, r\, dr = 2\pi\,[9r^2/2 - r^4/4]_0^3 = 2\pi \cdot 81/4 = 81\pi/2$.

Tapa: normal saliente de V en z = 3: (0, 0, –1). $\mathbf{f} \cdot \hat{n} = -z^2 = -9$, flujo = –9 · área(T) = –9 · 9π = –81π.
Casquete con normal saliente: 81π/2 – (–81π) = 243π/2.
Resultado: con las normales hacia el origen, Φ = **–243π/2**.
Trampa: hay dos signos distintos en juego: restar la tapa con su normal saliente (hacia abajo) y después dar vuelta el resultado porque la orientación pedida es la entrante. Si te olvidás del último, contestás 243π/2.

Ejercicio 3. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas: $x^2 + ky = 0$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de la familia $\mathcal{G}$ que pasa por (0, –1). Calcule
$\iint_D x^2 \, dxdy$.

Respuesta: Γ: $x^2 + 2y^2 = 2$ (elipse de semiejes √2 en x y 1 en y). $\iint_D x^2 \, dxdy = \sqrt{2}\,\pi/2 \approx 2{,}221$.

EDO de $\mathscr{F}$: $x^2 + ky = 0$ son parábolas con vértice en el origen. Despejando $k = -\frac{x^2}{y}$ ($y \neq 0$) y derivando $x^2 + ky = 0$: $2x + k\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{k} = -2x \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2y}{x}$.

Familia ortogonal $\mathcal{G}$: $y' = -\frac{x}{2y}$. Separando: $2y\,dy = -x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + 2y^2 = C$. Por (0, –1): C = 2. **Γ: $x^2 + 2y^2 = 2$**, o sea $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Control: la tangente a $\mathscr{F}$ va en la dirección (x, 2y) y la de Γ en (2y, –x); producto escalar 2xy – 2xy = 0 ✓.
La región: Γ es una elipse acostada centrada en el origen que corta a los ejes en (±√2, 0) y (0, ±1). D = $\{x^2 + 2y^2 \leq 2\}$.
Cambio de variables: $x = \sqrt{2}\,r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($x^2 + 2y^2 = 2r^2$). Jacobiano: $\det \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,r$.
Cuenta: $\iint_D x^2 \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2\cos^2\theta \cdot \sqrt{2}\,r \, dr\, d\theta = 2\sqrt{2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3 \, dr\right) = 2\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}$.
Resultado: $\iint_D x^2 \, dxdy = \mathbf{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}} \approx 2{,}221$.
Control en cartesianas: para $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $|y| \leq \sqrt{1 - x^2/2}$: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2x^2\sqrt{1 - x^2/2}\,dx$; con $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,u$ ($dx = \sqrt{2}\cos u\,du$) queda $4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{sen}^2u\cos^2u\,du = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$ ✓.
Trampa: el √2 aparece dos veces: en $x^2 = 2r^2\cos^2\theta$ y en el jacobiano √2 r. Sin el del jacobiano da π/2, y sin el de x^2 da √2 π/4.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u - v, u + v, 2v + u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Calcular el área de la porción de Σ cuyos puntos satisfacen las condiciones: $x+y \leq 2$, $0 \leq x \leq y$.

Respuesta: $A(\Sigma) = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}995$.

Planteo: la superficie viene dada por $\vec{X}(u, v) = (u - v, u + v, 2v + u^2)$ y las condiciones están en x, y; hay que pasarlas a (u, v). $A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \, du\, dv$.
Dominio D: $x + y = (u - v) + (u + v) = 2u$, así que $x + y \leq 2$ es $u \leq 1$. $x \geq 0$ es $u - v \geq 0$, o sea $v \leq u$. $x \leq y$

es $u - v \le u + v$, o sea $v \ge 0$. $D = \{0 \le v \le u \le 1\}$: el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1) del plano uv. (De ahí sale $u \ge 0$ sola.) La aplicación $(u, v) \mapsto (x, y)$ es lineal con determinante $2 \neq 0$, así que $\vec{X}$ es inyectiva y Σ no se superpone.

Vector normal: $\vec{X}_u = (1, 1, 2u)$, $\vec{X}_v = (-1, 1, 2)$. $\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (1 \cdot 2 - 2u \cdot 1, 2u \cdot (-1) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = (2 - 2u, -2 - 2u, 2)$. $\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 = 4(1 - u)^2 + 4(1 + u)^2 + 4 = 4(3 + 2u^2)$, entonces $\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = 2\sqrt{(3 + 2u^2)}$, que nunca se anula: Σ es regular.

Cuenta: como la norma depende sólo de u, conviene integrar primero en v: $A = \int_0^1 \int_0^u 2\sqrt{(3 + 2u^2)}\, dv\, du$. Integral en v: primitiva $2\sqrt{(3 + 2u^2)}\, v$, entre 0 y u da $2u\sqrt{(3 + 2u^2)}$. Integral en u: con $w = 3 + 2u^2$, $dw = 4u\, du$, primitiva $\frac{1}{3}(3 + 2u^2)^{3/2}$; entre 0 y 1 da $\frac{5^{3/2} - 3^{3/2}}{3}$.

Resultado: $A(\Sigma) = \mathbf{\frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3}} \approx 1{,}995$.

Control (como gráfica): despejando $u = \frac{x + y}{2}$, $v = \frac{y - x}{2}$, Σ es la gráfica $z = (y - x) + \frac{(x + y)^2}{4}$ sobre $T = \{0 \le x \le y, x + y \le 2\}$. Con $s = x + y$: $z_x = \frac{s}{2} - 1$, $z_y = \frac{s}{2} + 1$ y $dS = \sqrt{(3 + \frac{s^2}{2})}\, dx\, dy$; integrado numéricamente sobre T da 1,99473 ✓ (y es la misma cuenta, porque $dx\, dy = 2\, du\, dv$ y $\sqrt{(3 + s^2/2)} = \sqrt{(3 + 2u^2)}$).

Trampa: integrar en (u, v) con los límites de x, y sin traducirlos, o dar como dominio el triángulo de x, y con la norma de (u, v): se mezclan las variables y se pierde el factor 2.

Ejercicio 5. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva

$\Gamma : y^2 + x^2 + 2x = 3,\ y - x \le 1,$

orientado de modo tal que el punto incial tenga ordenada positiva.

Respuesta: $\alpha(y) = 3y$, $\vec{f} = \nabla(3xy^2)$. Γ va de $(-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -12\sqrt{2}$.

Condición de gradientes: $P = y\alpha(y)$ y $Q = 2x\alpha(y)$ son C^1 en $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{f} = \nabla\phi$ (con $\phi \in C^2$, porque $\vec{f}$ es C^1), por Schwarz $P'_y = Q'_x$: $\alpha(y) + y\alpha'(y) = 2\alpha(y) \Leftrightarrow y\alpha'(y) = \alpha(y)$ para todo y.

La EDO: para $y \neq 0$, $(\alpha/y)' = \frac{y\alpha' - \alpha}{y^2} = 0$, así que $\alpha = K_1 y$ en $y > 0$ y $\alpha = K_2 y$ en $y < 0$. Como $\alpha \in C^1$, α' es continua en 0: $\alpha'(0) = K_1$ por derecha y K_2 por izquierda, entonces $K_1 = K_2 = K$ (y $\alpha(0) = 0$ sale de la ecuación en $y = 0$). Queda $\alpha(y) = Ky$. Control: $y \cdot K = Ky$ ✓.

Constante: $\vec{f}(1, 1) = (\alpha(1), 2\alpha(1)) = (K, 2K) = (3, 6) \Rightarrow K = 3$ (las dos componentes dan lo mismo, así que el dato es consistente). $\alpha(y) = 3y$ y $\vec{f} = (3y^2, 6xy)$. Con esto, $P'_y = 6y = Q'_x$ en $\mathbb{R}^2$, simplemente conexo: es de gradientes, con potencial $\phi(x, y) = 3xy^2$ ($\phi'_x = 3y^2$, $\phi'_y = 6xy$ ✓).

La curva: $y^2 + x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 4$, circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 2. La recta $y = x + 1$ pasa por el centro, así que $y - x \le 1$ se queda con media circunferencia: la que contiene a (1, 0) ($0 - 1 \le 1$ ✓) y a $(-1, -2)$. Extremos: reemplazando $y = x + 1$, $2(x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2}$: $P_1 = (-1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $P_2 = (-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Orientación: el punto inicial tiene ordenada positiva, así que se va de P_1 a P_2 (en sentido horario, pasando por (1, 0) y $(-1, -2)$).

Cuenta: $\phi(P_2) = 3(-1 - \sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = -6 - 6\sqrt{2}$ y $\phi(P_1) = 3(-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2})^2 = -6 + 6\sqrt{2}$.

Resultado: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \mathbf{-12\sqrt{2}}$.

Trampa: la condición $P'_y = Q'_x$ es una EDO para α, no una igualdad entre números; y como el campo es de gradientes, no hace falta parametrizar el arco: alcanzan los extremos, pero bien elegidos (el inicial es el de ordenada positiva).