Análisis Matemático II

Final, libre e integrador: exámenes reales, enunciados

Análisis Matemático II (61.03 / 81.01) · CB001

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

14/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial	3
14/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial	4
7/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial	5
7/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial	6
29/6/26 (diferido)	7
27/6/26, tema 1	8
27/6/26, tema 2	9
11/5/26, tema 1 (diferido)	10
9/5/26, tema 1	11
9/5/26, tema 2	12
3/3/26 (integrador)	13
24/2/26 (recuperatorio)	14
24/2/26 (integrador)	15
10/2/26 (recuperatorio) · 1er parcial	16
10/2/26 (recuperatorio) · 2do parcial	17
16/12/25 (recuperatorio) · 1er parcial	18
16/12/25 (recuperatorio) · 2do parcial	19
6/12/25, tema 1	20
6/12/25, tema 2	21
18/10/25, tema 2	22
5/8/25 (recuperatorio)	23
5/8/25 (integrador)	24
15/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial	25
15/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial	26
8/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial	27
8/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial	28
30/6/25 (diferido)	29
28/6/25, tema 2	30
10/5/25, tema 1	31
10/5/25, tema 2	32
25/2/25, tema 1 (integrador)	33
25/2/25, tema 2 (integrador)	34
18/2/25, tema 2 (integrador)	35
11/2/25, tema 2 (integrador)	36
17/12/24, tema 2 (integrador)	37
10/12/24, tema 1 (recuperatorio)	38
10/12/24, tema 1 (integrador)	39
10/12/24, tema 2 (integrador)	40
9/11/24, tema 1 (recuperatorio)	41
21/10/24, tema 1 (diferido)	42
19/10/24, tema 1	43
19/10/24, tema 2	44
13/8/24, tema 1 (integrador)	45
13/8/24, tema 2 (integrador)	46
6/8/24, tema 1 (integrador)	47
30/7/24, tema 1 (integrador)	48
30/7/24, tema 2 (integrador)	49
10/7/24, tema 2 (integrador)	50
2/7/24, tema 1 (recuperatorio)	51
2/7/24, tema 1 (integrador)	52
3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)	53
1/6/24, tema 1 (recuperatorio)	54
1/6/24, tema 2 (recuperatorio)	55
13/5/24, tema 1 (diferido)	56
11/5/24, tema 1	57
5/3/24, tema 2 (integrador)	58
29/2/24 (libre)	59
27/2/24, tema 1 (integrador)	60
27/2/24, tema 2 (integrador)	61
20/2/24, tema 2 (integrador)	62

14/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar
$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$,
Halle y clasifique los puntos críticos de f siendo
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 2, y < 1\}$.

Ejercicio 2. Sean $p(u, v) = 2 - u + v + uv - v^2$ el polinomio de Taylor de segundo orden en (0, 1) de $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, y $\vec{f}(x, y) = (e^{x-y} - 1, x + y + 1)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $h = g \circ \vec{f}$ en (0, 0, h(0, 0)).

Ejercicio 3. Se sabe que la ecuación $x + e^{xy-1} + z^2 = 3$ define implícitamente a $x = f(y, z)$ en un entorno de $(x_0, y_0.z_0) = (1, 1, 1)$, con f de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales la derivada direccional de la función $h(y, z) = y^2 + yz + f(y, z)$ en el punto (1, 1) sea nula.

Ejercicio 4. Sean S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z = 1$ y C la curva intersección entre S y Π: $x + y = 1$. Encuentre el o los puntos de C en los cuales la recta tangente a la curva es paralela al plano de ecuación $x - z = 0$.

Ejercicio 5. Dado el campo escalar
$f(x, y) = \sqrt{(\ln(2x - y + 4))}$
a) Determine gráfica y analíticamente el dominio natural D de f.
b) Grafique por separado el interior y la frontera de
$T = \{(x, y) \in D / f^2(x, y) < \ln 5\}$.

14/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (z + y, x + z + 3y^2, x + y)$.
a) Pruebe que $\vec{f}$ es campo de gradientes y halle una función potencial.
b) Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, con
C: $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, $x \geq 0$,
recorrida de modo tal que la coordenada y resulta creciente.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (1, 0).
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^{x^2} - 3y, \cos^2(y) + x)$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el versor tangente a Γ en (1, 0) sea (0, –1).

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo
H: $1 \leq z \leq 5 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie
Σ: $z + y^2 = 5$, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 2$, $z \geq 1$.
Indique en un gráfico las orientaciones utilizadas en el cálculo.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 3$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + y^2, y - z^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

7/7/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dado el campo escalar $f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; 0 si $(x, y) = (0, 0) \}$,

a) analice su continuidad en el origen;
b) calcule la derivada parcial respecto de x en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea Σ_1 el conjunto de nivel de $F(x, y, z) = \ln(xy^2) + z^3$ que contiene al punto $P = (1, -1, 1)$ y sea Σ_2 la superficie parametrizada por $\vec{\Gamma}(u, v) = (u + v^2, u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle una ecuación del plano normal a $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en P.

Ejercicio 3. a) Demuestre que la ecuación $z - u^2 + v^2 + \ln(v + z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(u_0, v_0, z_0) = (1, 0, z_0)$.
b) Calcule los versores para los cuales la derivada direccional de $h = f \circ \vec{g}$ en el punto (1, 1) se anula. Considere la función f del inciso anterior y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, y - x^2)$.

Ejercicio 4. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ y determine si allí se producen extremos.

Ejercicio 5. Grafique el dominio natural del campo $\vec{f}(x, y) = (\ln(x^2 - y), \sqrt{(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4})})$; indique si es abierto, cerrado, conexo y/o acotado y represente su frontera en otro gráfico.

7/7/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el volumen del cuerpo H: $2y \le z \le 3 - x^2 - y^2$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(x) - y^2, xy + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de la curva
C: $x - y^2 = 0$, $x \le 1$
recorrida de modo que la coordenada y sea creciente.

Ejercicio 3. Halle el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie
Σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 3 - 2x$, $z \le 0$
orientada de modo que en $(-1, 0, -2)$ la normal tenga tercera componente negativa. Se sabe que $\operatorname{div}(\vec{f}) = 2$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (y, x, 2)$.
Si lo necesita, use que el volumen de la esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C el borde del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ y $(0, 1, 1)$. Indique el sentido de recorrido considerado en el cálculo mediante un gráfico.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \varphi(x)(2y + x^2, x)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, tal que
1. $\vec{f}(-1, 0) = (-2, 2)$;
2. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ para toda curva cerrada C.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva
Γ: $\vec{X} = (\sqrt{(3 + t^2)}, t^4 + t + 1)$, $-1 \le t \le 1$
orientada según esa parametrización.

29/6/26 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región H de $\mathbb{R}^3$ definida por
$H: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 17,\ z \geq 2,$
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (e^x + h(3x + 3y),\ x^2 + h(3x + 3y))$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |y| \leq x \leq 2 - y^2\}$
recorrida en sentido antihorario.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 2,\ y \geq 0$
orientada de modo tal que las normales apunten hacia el eje z.
Calcule el flujo a través de Σ de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, \cos(xyz))$.

Ejercicio 4. Sea C la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por (1, 0) y está contenida en el semiplano $3x - y \geq 0$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (2 + xy^2,\ y + x^2y)$ a lo largo de C. Indique en un gráfico la orientación elegida.

Ejercicio 5. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y^2,\ 3x^2y^2z^2 + y,\ 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por
$x^2 + y^2 - 2y = 0,\ 2y + z = 6.$
Indique la orientación elegida para el cálculo.

27/6/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint xz \, dxdydz$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - y, 3x + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la unión de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$ y $C = (4, 0)$, recorrida en el sentido $A \to B \to C$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
Σ: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$, $1 \leq z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, \varphi(x), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
Σ: $z = 5 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + y^2 = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por $(-1, 1)$.
Calcule $\int_C x \, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos $(-1, 1)$ y $(0, b)$.

27/6/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región del primer octante limitada inferiormente por Σ_1 y superiormente por Σ_2, donde
Σ_1: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint yz \, dxdydz$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^3 - 2y, e^{\cos(y)} + x)$ a lo largo de la unión de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con $A = (0, 0)$, $B = (3, 6)$ y $C = (6, 0)$, recorrida en el sentido $A \to B \to C$.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie
Σ: $z - \sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$, $1 \leq z \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(y), y, z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
Σ: $z = 10 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 9$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = c$, $c > 0$ y sea Γ la curva ortogonal a la familia $\mathscr{F}$ que pasa por $(1, 1)$.
Calcule $\int_C x \, ds$, donde C es la porción de Γ que tiene por extremos los puntos $(1, 1)$ y $(0, b)$.

11/5/26, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{x + y^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \frac{1}{3}x^2(1 - y)$.
Si $h = f \circ \vec{g}$, calcule $h(1.95, -3.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea Γ la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en los versores $\check{v}$ tangentes a Γ en ese punto.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u \cos(v), u, u \operatorname{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en (1/2, 0) un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

9/5/26, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 + y)\ \sqrt{}(4 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,x^2y - 2xy + b\,y^3$ tal que (1, 1) es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f que tienen ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (1, –1, 1), la ecuación
$\ln(x + y^2 - z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(-1, 1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((-1, 1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(x + y - z, xyz)$, con f(u, v) una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $L(u, v) = 1 + 2u - v$ es la aproximación lineal de f en el punto $(u_0, v_0) = (3, -1)$. Sea Σ la superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r^2 + s^2, r + s, r - s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto (1, 1, –1).

9/5/26, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$f(x, y) = \ln(x^2 - y)\ \sqrt{}(9 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = a\,xy^2 - 2xy + b\,x^3$ tal que (1, 1) es punto crítico de f.
a) Halle los valores de las constantes a y b.
b) Para los valores hallados en el punto a), encuentre todos los puntos críticos de f q[ilegible] ambas coordenadas no nulas y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (1, 1, –1), la ecuación
$\ln(x - y^2 + z^2) - xyz = 1$
define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1 y calcule $\nabla g(1, -1)$.
Halle el versor $\check{v}$ para el cual $g'((1, -1), \check{v})$ es máxima y halle el valor de esa derivada.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y, z) = f(xyz, x + y - z)$, con f(u, v) una función de clase C^1(ℝ[ilegible] $L(u, v) = 1 - u + 2v$ es la aproximación lineal de f en el punto $(u_0, v_0) = (-1, 3$[ilegible] superficie definida por
Σ: $h(x, y, z) = 8$.
Pruebe que $(1, 1, -1) \in \Sigma$ y halle una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (r - s^2, r + s, r^2 + s^2)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la recta normal a Σ en el punto (–1, 1, 1).

3/3/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ tal que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{g}$ tiene componentes en $C^1(\mathbb{R}^3)$.
Calcule la circulación $\vec{f}$ a lo largo de la curva C de ecuaciones
$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \wedge z + y = 2$
sabiendo que $\nabla \times \vec{g}(x, y, z) = (x, x + z, y - 2)$. Indique claramente en un gráfico la orientación de C que eligió para hacer el cálculo.

Ejercicio 2. Calcule el volumen de la porción de la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y de radio 2 que está contenida en el cilindro sólido definido por $x^2 + z^2 \leq 1$.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$z = x^2 \wedge x \geq 0 \wedge z \leq 9 \wedge -1 \leq y \leq 1$.
Calcule la integral del campo escalar $h(x, y, z) = xy^2$ sobre Σ.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(x)y^2, yx + \varphi(x)y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, un campo conservativo tal que $\vec{f}(0, 1) = (1, 1)$.
Halle φ y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de una curva Γ suave a trozos con punto inicial $(0, 1)$ y punto final $(0, 0)$.

Ejercicio 5. Sea Σ la frontera del cuerpo
$x^2 + y^2 \leq z \leq 4$
y sea $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial C^1 del cual se sabe que $D\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + z & 0 & x \\ -y^2 & -2x & 0 \\ 0 & 2 & 2z \end{pmatrix}$.
Calcule $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\, d\sigma$. Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

24/2/26 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $g(x, y) = xf(y) + yf(x) + 4x^2 + 2xy + y^2$; con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$. Demuestre que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico de g y clasifíquelo.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto $(\pi, 1, 0)$ la ecuación

$$\frac{x}{y} + \operatorname{sen}(xz) + 2yz^2 = \pi,$$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(\pi, 1, 0)$.

Ejercicio 3. Sea $h = f \circ \vec{g}$, con $f(x, y) = x + xy^2$, y $\vec{g}(u, v) = (au + v, v)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halle el valor de a para que el versor en el cual se produce la máxima derivada direccional de h en el punto $(0, 1)$ sea $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Indique el valor de esa derivada direccional máxima.

Ejercicio 4. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{2x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

a) Grafique los conjuntos de nivel 0 y 1 de f.

b) Calcule, si existe, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, (Sugerencia: Utilice el resultado del ítem anterior).

Ejercicio 5. Sea C la curva intersección de las superficies de ecuaciones

$$z = x^2 + y^2,\ z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}.$$

Calcule el o los puntos de C donde la recta tangente resulta paralela al eje y.

24/2/26 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y \le z \le 9 + 2y - x^2 - y^2\}$.

Ejercicio 2. Sea Γ la porción de la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por $(0, 2)$ y está contenida en el semiplano $y \ge 0$; sea D la región limitada por Γ y el eje x.
Calcule $\iint_D y \, dxdy$.

Ejercicio 3. Considere la curva C: $\{ x + y + z^2 = 2 \; ; \; x - y + z^2 = 0 \; ; \; x \ge 0 \}$.
1. Halle una parametrización de C.
2. Calcule la masa de un alambre con la forma de C sabiendo que la densidad de masa lineal es $\delta(x, y, z) = \sqrt{(4z^2 + 1)}$.

Ejercicio 4. Sea Γ el borde del triángulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + y, xz - x, e^{z^2} + xy)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 5. Calcule el flujo del campo $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ a través de la porción de cilindro
$\Sigma: x^2 + y^2 - 4y = 0, \; 0 \le z \le 4$,
sabiendo que $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = z$ y que $\vec{f}(x, y, 0) = (x, y, 2)$ y $\vec{f}(x, y, 4) = (2x + y, 3x - y, 0)$. Indique en un gráfico la orientación de Σ considerada en el cálculo.

10/2/26 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$\vec{f}(x, y) = \left(\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)}, \dfrac{1}{x^2 - y^2}\right)$

Determine y grafique el dominio natural D. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea la superficie Σ parametrizada por

$\vec{X}(u, v) = (u^2 + v, u - v, u + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

y P = (1, 1, 1). Determine, si existe, el punto donde la recta normal a Σ en P interseca al plano xy.

Ejercicio 3. Sea

$g(x, y) = f(x^2 - y + 2, x^2 - y^2)$,

donde w = f(u, v) es una función definida implícitamente en un entorno de $(u_0, v_0) = (2, 0)$ por

$u\, e^{vw} - 3uv - 2w = 0$.

Estime g(1.03, 0.98) mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $h(x, y) = x^2y + y\, f(xy)$, con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 8$.

Determine si P = (1, 1) es punto crítico de h y, en caso afirmativo, clasifíquelo.

Ejercicio 5. Sea $f \in C^1$, con $f(1, 2) = -1$. Se sabe que la derivada de f en (1, 2) en la dirección del versor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ es $2\sqrt{2}$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 1$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de f en (1, 2, −1).

10/2/26 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle el valor de

$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$, donde D: $1 \le x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge |x|$.

Ejercicio 2. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas planas de ecuación $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$. Sea Γ la curva de la familia ortogonal a $\mathscr{F}$ que pasa por el punto $(0, 2)$. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^4 - y, y^3 - 2x)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico la orientación elegida.

Ejercicio 3. Calcule el área de la porción de superficie
Σ: $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 \le 2y$, $z \ge 0$.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva $\vec{X} = (4 - t^2, t^3 + 1, 1 + t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, contenida en el primer octante. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y + 4x^3, x, 2z)$ a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y\varphi(z), x\varphi(z), 1 + z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie
Σ: $z + x^2 + y^2 = 9$, $z \ge 0$
orientada de modo que las normales tengan tercera componente positiva.

16/12/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{y(y + 2x)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \ (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ 0 \ (x, y) = (0, 0) \}$

a) Analice la continuidad de f en el origen.

b) Determine si existen las derivadas parciales en (0, 0) y qué puede decir de la diferenciabilidad de f en ese punto.

Ejercicio 2. Pruebe que en un entorno del punto (1, –1, –1) la ecuación

$x^2y - yz^2 + 2z^3 + x + y = -2$

define implícitamente una función $x = g(y, z)$ de clase C^1. Calcule el valor mínimo de la derivada direccional de g en (–1, –1) y la dirección (versor) en la cual se produce.

Ejercicio 3. Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y - z = 0$ y sea L la recta de ecuación

$\vec{X} = (-1, -2, 1) + \lambda(-2, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

Halle él o los puntos P en los cuales S y L se intersecan ortogonalmente.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = \alpha e^{\alpha x} - xy + \beta \operatorname{sen}(y) - x + y + y^2$.

Determine, si existen, los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que f alcance un extremo relativo en el origen y clasifique el tipo de extremo.

Ejercicio 5. Sean f(u, v, w) un campo escalar $C^2(\mathbb{R}^3)$ y h(x, y) = f(x + y, x – y, xy). Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden de h en (1, 0) es

$p(x, y) = 9 - 3x + 2y - xy - x^2 + \frac{1}{2}y^2$

y que $f'_w(1, 1, 0) = 2$.

Calcule $\nabla f(1, 1, 0)$ y halle el plano tangente al conjunto de nivel de f en el punto (1, 1, 0).

16/12/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa plana que ocupa la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al origen.

Ejercicio 2. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xy, -y^2 + z, z)$ a través de la frontera del cuerpo
$H: x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2 - x,\ y \ge 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \frac{1}{\sqrt{(4 + 4y^2)}}\, ds$, donde C es la curva
$C: x^2 + y^2 = 4,\ 2x - z = 0,\ y \ge 0$.

Ejercicio 4. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con
$\Sigma_1: x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $\Sigma_2: 2x + z = 4$.
Calcule la circulación de $\vec{f} = \nabla\phi + \vec{g}$ a lo largo de C, siendo ϕ un campo escalar de clase C^2 y $\vec{g}(x, y, z) = (x + y, y^2 - 2x, z + y)$. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = \mu(x)(y^2 - 1, xy)$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\vec{f}(1, 1) = (0, 2)$.
a) Halle μ para que $\vec{f}$ sea un campo de gradientes.
b) Encuentre todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

6/12/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 8 - x^2 - y^2,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + 8y^2 + z = 8,\ x^2 - z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y - 2e^{2x-z}, x, e^{2x-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva C: $x^2 + 4x + y^2 = 0,\ y \geq 0$, recorrida de $(-4, 0)$ a $(0, 0)$.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 + z = 4,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (z + \varphi(x) + x, y\varphi(x), 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$.

6/12/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región definida por
$H: 2x^2 + 2y^2 \leq z^2 \leq 12 - x^2 - y^2,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$
Calcule la masa de un cuerpo que ocupa la región H, siendo la densidad de masa en cada punto P proporcional a la distancia de P al plano xy.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$8x^2 + y^2 + z = 8,\ y^2 - z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y,\ x - 2e^{2y-z},\ e^{2y-z} + z)$ a lo largo de C. Indique la orientación de C elegida para el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x^2 - y^2,\ xy + e^{\cos(y)})$ a lo largo de la curva $C: x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y \geq 0$, recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 + z = 9,\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq x$
orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ a través de Σ.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x) + x,\ y\varphi(x) + y,\ 2z)$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) El flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier cubo es nulo;
b) $\vec{f}(0, 0, 0) = (3, 0, 0)$.

18/10/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x^2 + y)}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique por separado D y su frontera. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

b) Grafique por separado el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 2. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}$ y $f: D \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = y^2x + 2x^2 + y^2 + 1$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno de (2, 1, 2), la ecuación

$xz + yz + e^{y+z-3} = 7$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((2, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea f(u, v) una función de clase C^1 tal que $L(u, v) = 1 + 2v - u$ es su aproximación lineal en (–1, 1). Sea $g(x, y) = f(e^y x, \cos(xy) + y)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto (–1, 0, g(–1, 0)).

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (uv, u + v, 2v - u), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

y C la curva definida por las ecuaciones $xy + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z = 0$. Halle el o los puntos $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano normal a C en (1, 0, –1).

5/8/25 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 - 2x}$.

Identifique y grafique el dominio natural de f e indique si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

Ejercicio 2. Sean $g(x, y, z) = f(\vec{h}(x, y, z))$, con $\vec{h}(x, y, z) = (y - x^2 + z, e^{y+z} - x)$, y $p(u, v) = 1 - uv$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(-1, 0)$. Encuentre la dirección de la máxima derivada direccional de g en el punto $(1, 0, 0)$. Justifique sus cálculos.

Ejercicio 3. Dado el sistema de ecuaciones

$\{ u + vx + y = 3 \; ; \; u^2 - x^2 - yv = -1 \}$

a) verifique que en un entorno del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$, el mismo define implícitamente funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de clase C^1;

b) calcule $u'_x(1, 1)$ y $v'_x(1, 1)$.

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = y - x - x^2 - \dfrac{y^3}{3}$.

Halle los extremos relativos de f y en qué puntos se alcanzan.

Ejercicio 5. Halle una ecuación para el plano normal, en $P = (2, -1, 0)$, a la curva que se obtiene de la intersección de la gráfica de $f(x, y) = 1 - x - y$ con el conjunto de nivel de $g(x, y, z) = xe^z + y^3$ que contiene a P. Justifique sus cálculos.

5/8/25 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule
$\iiint_D z\,dxdydz$,
donde
D: $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 2 - x^2 - y^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y), h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| \leq y \leq 2 - x^2\}$
recorrida en sentido horario.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + x, x^2 + y, x^2 + y^2 + z)$ a través de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente no negativa.
Puede utilizar que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + y, 2x^2y^3z)$
y C la curva definida por las ecuaciones
$x^2 + y^2 - 4y = 0$, $2y + z = 8$.
recorrida de modo que en el punto (0, 0, 8) el versor tangente tenga primera componente positiva.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva, perteneciente a la familia de curvas ortogonales a la familia $\mathscr{F}$: $x^2 + 2y^2 = c$, que tiene por extremos los puntos (1, 1) y $(2, y_0)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (y, x + y^3)$ a lo largo de Γ recorrida de $(2, y_0)$ a (1, 1).

15/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Considere el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}}$.

a) Grafique en gráficos separados su dominio, la frontera del mismo y el conjunto de nivel 0.

b) Indique si el dominio natural es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea el campo escalar

$f(x, y) = \{ \dfrac{y}{x^2}$ si $x \neq 0$; 0 si $x = 0. \}$

a) ¿Es f continuo en (0, 0)?

b) ¿Existen las derivadas parciales de f en (0, 0)?

c) ¿Qué puede decir con respecto a la diferenciabilidad de f en el origen?

Justifique todas sus respuestas.

Ejercicio 3. Se sabe que el polinomio de Taylor de segundo orden en (0,1) de cierto campo escalar f(u, v) de clase C^2 es $P(u, v) = 1 - u^2 + uv$. Si $\vec{g}(x, y) = (xy, y - x)$, halle una ecuación para el plano tangente al gráfico de $h(x, y) = (f \circ \vec{g})(x, y)$ en $(-1, 0, h(-1, 0))$. Justifique todos sus cálculos.

Ejercicio 4. Considere la curva C definida por la intersección de la superficie parametrizada por $\vec{\sigma}(u, v) = (u + v^2, u^2, u + v)$, con $(u, v) \in [0, 2] \times [-1, 1]$, y la superficie de nivel de $f(x, y, z) = y^3 + xz$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Halle una ecuación para la recta tangente a la curva C en el punto (1, 1, 1).

Ejercicio 5. Halle valores reales de a y b para los cuales $f(x, y) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y^2} + xy$ tiene un extremo en (1, 1). ¿De qué extremo se trata y cuál es su valor? Analice si para esos valores de a y b existen otros puntos críticos de f.

15/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la parte del primer octante limitada superiormente por el plano $x + y + z = 2$, suponiendo que la densidad de masa en el punto P es proporcional a su distancia al plano yz.

Ejercicio 2. Calcule el área de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ 1 \le z \le 2,$
mediante una integral de superficie.

Ejercicio 3. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$ con $\vec{f}(x, y) = (x^3e^x + xy,\ x^2 + y^2)$ y
$C: x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x \ge 2$
recorrida de (2, 2) a (2, –2).

Ejercicio 4. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (3x, y)$ de extremos (1, 1) y $(8, y_1)$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2xy + y^2,\ x^2 + 2xy)$ a lo largo de C. Indique el sentido de recorrido considerado.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ que se encuentra arriba del plano $z = 1$.
Calcule el flujo del campo $\vec{f} = (y + z,\ xz,\ z^2)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

8/7/25 (recuperatorio) · 1er parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea
$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - 4)}}{\sqrt{(xy - x)}}$.
Exprese y grafique el dominio natural de f, indicando si es conexo, abierto y/o cerrado, justificando brevemente su respuesta.

Ejercicio 2. Sean $f(x, y) = ax^2 + xy$ y C la curva de ecuación vectorial $\vec{X} = (2t, t^2 + 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que en el punto $(1, \dfrac{5}{4})$ la curva C y el conjunto de nivel de f tengan la misma recta tangente.

Ejercicio 3. Sean $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$, con $\vec{g}(x, y) = (x^2y, y - x^2)$, y, $x + 2y + z = 3$ la ecuación del plano tangente al gráfico de $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$. Calcule $h(1.02, 1.97)$ utilizando una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u^2 + v, u - v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Halle la intersección entre la recta normal a Σ en $(2, 4, -1)$ y el plano xy.

8/7/25 (recuperatorio) · 2do parcial

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, y^2 + x, e^x y)$ a través de la frontera del cuerpo $H: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, 0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie
$\Sigma: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq x, y \geq 0$.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (ye^{xy} - xy + e^x, xe^{xy} + x^2)$ a lo largo de la curva
$\Gamma: x^2 - 4x + y^2 = 0, y \geq 0$
recorrida de (0, 0) a (4, 0).

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), x + z, e^{z^2})$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices (2, 0, 2), (0, 2, 0), (–2, 0, 2). Indique en un gráfico el sentido de recorrido usado en el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\vec{g}(x, y) = \mu(x)(xe^x, e^{2x+y})$ con $\mu \in C^1(\mathbb{R})$.
a) Halle μ para que $\vec{g}$ sea campo de gradientes y $\vec{g}(0, 0) = (0, 2)$.
b) Halle todas las funciones potenciales de $\vec{g}$ para la función μ hallada en a).

30/6/25 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x^3 + y, y^3 - z, y)$ a través de la frontera del cuerpo definido por
$3x^2 + 3y^2 - 5 \leq z \leq x^2 + y^2 + 3$.
Indique en un gráfico la orientación considerada en el cálculo.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\bar{A}\bar{B}$ y $\bar{B}\bar{C}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (t \cos \frac{\pi t}{2}, t \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}, t + 1), t \in \mathbb{R}$
que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (e^x(y + z), e^x, e^x + 2z)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Ejercicio 5. Sean C la linea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto $(0, 0)$ y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x \, dxdy$.

28/6/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ la región contenida en el primer octante que se encuentra limitada inferiormente por el plano xy y superiormente por la superficie de ecuación $3x^2 + 3y^2 + z = 12$. Grafique H y calcule $\iiint_H y^2 \, dxdydz$.

Ejercicio 2. Sea C la curva definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $y^2 - z = 0$, $x \geq 0$.
Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo $\vec{f}(x, y, z) = (yze^x, y + ze^x, ye^x)$. Indique en un gráfico la orientación de C empleada en el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y), h(3x + 3y) - e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde del triángulo de vértices A = (0, 3), B = (3, 0) y C = (3, 6), recorrido en el sentido A → C → B → A.

Ejercicio 4. Considere la superficie
Σ: $z + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente negativa. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (xyz, 1, 1 - 2y)$ a través de Σ.

Ejercicio 5. Halle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ para que el campo vectorial
$\vec{f}(x, y, z) = (y + \varphi(x), x - y, x - z\varphi(x))$
satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
a) $\vec{f}(0, 1, 1) = (2, -1, -1)$;
b) el flujo de $\vec{f}$ a través de la frontera de cualquier bola cerrada sea nulo.

10/5/25, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2x - x^2 - y^2)}}{\sqrt{(x - y)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (2, 0), (0, 0).

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y$ y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$\operatorname{sen}(x) + y^2z^3 - e^xz + x + 2y = 2$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((0, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (e^t, -\cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\nabla g(1, -1)$

b) Calcule aproximadamente $h(0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, v^2, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

10/5/25, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{(2y - y^2 - x^2)}}{\sqrt{(y - x)}}$.

a) Grafique separadamente D, su frontera y su interior.

b) Grafique el conjunto de nivel 0. Indique cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ese conjunto: (1, 1), (0, 2), (0, 0).

Ejercicio 2. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = y^3 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x$ y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$\operatorname{sen}(y) + x^2z^3 - e^yz + y + 2x = 2$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ tal que $z_0 = f(x_0, y_0) > 0$. Halle todos los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 0), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ con $f(r, s)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $P(r, s) = 1 - r + s$ es su polinomio de Taylor de orden 1 en $(-1, 2)$. Sea $h(t) = g \circ \vec{\alpha}(t)$, con $\vec{\alpha}(t) = (-\cos(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $\nabla g(-1, 1)$

b) Calcule aproximadamente $h(-0.05)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sean Σ_1 la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u + v, u^2, v - u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

y Σ_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Sea Π el plano tangente a Σ_1 en $A = (0, 1, 2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a Σ_2 en P es paralelo a Π.

25/2/25, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, z, z^2)$ a través de la frontera de
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 12, \sqrt{(2x^2 + y^2)} \leq z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (2x + yz, 4y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x \geq 0$,
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 2$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(2x + 2y), h(2x + 2y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 3\}$
recorrida en sentido horario.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 3)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por (0, 0). Calcule $\iint_D x \, dxdy$.

25/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (z, -x, z^2)$ a través de la frontera de
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, \sqrt{(x^2 + 2y^2)} \leq z\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (4x + yz, 2y + xz, xy)$
y C el arco de curva definido por
$x^2 + y^2 = 4y, x^2 + y^2 - z = 0, x \geq 0,$
recorrido de modo tal que la coordenada y sea creciente.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del plano de ecuación $x + y + z = 3$ contenido en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación considerada.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(3x + 3y), h(3x + 3y) + e^y)$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$
recorrida en sentido horario.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curva: $y = k(x - 2)$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de $\mathcal{G}$ que pasa por (0, 0). Calcule $\iint_D x \, dxdy$.

18/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región triangular de vértices (–2, 4), (0, 0) y (2, 4), suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ es proporcional al cuadrado de la distancia de P al origen.

Ejercicio 2. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2x - \cos(z), y + e^{x^2+z^2}, z)$ sobre la porción de paraboloide
$\Sigma : z = 4x^2 + y^2,\ z \leq 4,$
orientada de modo tal que las normales tengan tercera componente positiva.

Ejercicio 3. Considere la superficie
$\Sigma : y + x^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq x^2.$
Halle una parametrización de Σ y calcule la integral del campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{(1 + 4x^2)}$ en Σ.

Ejercicio 4. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, siendo $\vec{f} = \nabla\varphi + \vec{g}$ con $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ y
$\vec{g}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + y, 2x^3yz^2, 2x^3y^2z)$
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 6 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la curva $y = \alpha(x)$ que tiene por extremos los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (2, y_1)$, siendo $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que cumple la ecuación diferencial $y' + 2xy = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (2x + y, x)$ a lo largo de Γ recorrida de A a B.

11/2/25, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de una chapa plana que ocupa la región del plano limitada por las curvas de nivel 4 y 9 de la función $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$, suponiendo que la densidad de masa en cada punto P es proporcional al cuadrado de la distancia entre P y (1, 0).

Ejercicio 2. Calcule el área de la porción de la superficie Σ de ecuación $z + x^2 + y^2 = 9$ que se encuentra contenida en el primer octante.

Ejercicio 3. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \operatorname{sen}(y^2 z), y + e^{z^2}, 2z)$ a través de la frontera de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 5 - y^2, |x| \leq 2\}$.
Indique en un gráfico la orientación utilizada en el cálculo.

Ejercicio 4. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva
$\Gamma : x^2 + y^2 = 4, x - y \geq 0, x \leq 0$.
Indique en un gráfico la orientación elegida para Γ.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las condiciones
$x^2 + y^2 - 2y = 0, z - y = 0, x \geq 0$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), z, y)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ. Indique el sentido de recorrido de la curva utilizado.

17/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada la curva C parametrizada por
$\vec{\alpha} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\alpha}(t) = (2 - 4\,\text{sen}(t)\cos(t), 2\,\text{sen}(t))$
cuyo gráfico es el siguiente
[gráfico: curva cerrada con forma de gota invertida, con un pico en el eje x y la parte redondeada arriba]
indique la orientación dada por la parametrización y calcule el área de la región encerrada por ella.

Ejercicio 2. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas formada por las lineas de campo de $\vec{g}(x, y) = (x, 4y)$ y sea Γ la curva ortogonal a las curvas de $\mathscr{F}$ que pasa por $(0, 1)$. Calcule
$\iint_D (x^2 + 4y^2)\,dx\,dy$
donde D es la región acotada del plano cuyo borde es Γ.

Ejercicio 3. Calcular la masa del cuerpo
$H : \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq z \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al plano xy.

Ejercicio 4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x + z, y^2 - xy, y + z^2)$ a lo largo del borde de la superficie
$\Sigma : z + y^2 = 5,\ y \geq 0,\ 0 \leq x \leq 2,\ z \geq 1$.
Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido.

Ejercicio 5. Sea H la región acotada de $\mathbb{R}^3$ limitada por el plano de ecuación $x + y + z = 4$ y los planos coordenados. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x - z^2, y + x^2, z)$ a través de la frontera de H orientada de modo que las normales apunten hacia el interior de H.

10/12/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \{ \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

a) Estudie la continuidad de f en (0, 0).

b) Calcule las derivadas parciales de f en el origen. Indique, con fundamento, si ambas derivadas parciales son continuas en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea g un función de clase $C^3(\mathbb{R}^2)$ cuyo polinomio de Taylor de orden 2 en (1, –1) es $P(x, y) = 1 - x + y + x^2 + xy + y^2$.

Determine si $f(x, y) = e^{g(x,y)}$ alcanza un extremo relativo en (1, –1). En caso afirmativo indique tipo y valor.

Ejercicio 3. Considere la ecuación

$2z + \cos(y - z) + xy = 4$.

a) Pruebe que en un entorno del punto (1, 1, 1) la ecuación define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1.

b) Encuentre los versores para los cuales derivada direccional de $h(x, z) = x^3 + zf(x, z)$ en el punto (1, 1) resulta nula. Justifique sus cálculos.

Ejercicio 4. Sea g(u, v) un campo escalar de clase C^1 tal que $w = 1 - 2u + 3v$ es una ecuación del plano tangente al gráfico de g en (2, 1, g(2, 1)). Sea $f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy)$.

Calcule f(0.9, 1.05) mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 5. Sea Σ la superficie de ecuación

$\vec{X} = (u + v, \dfrac{v^2}{2}, \dfrac{u^2}{2})$, $u > 0$, $v > 0$.

Halle todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto A = (–1, 1, 1). Para cada uno de lo P hallados, encuentre una ecuación del plano tangente a Σ en ese punto.

10/12/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 8, y \geq 0, z \geq 1\}$.

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 - y, 3x^2y^2z^2 + \varphi(y), 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación

$\vec{X} = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t), t)$, $t \in \mathbb{R}$

contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 3$. Calcule la longitud de Γ.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (y^2 + h(y), xh'(y) + \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

recorrido en sentido horario.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (9y, -x)$ que pasa por (0, 1) y está contenida en el semiplano $x - 3y \leq 0$.

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

10/12/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule

$\iiint_H yz\,dx\,dy\,dz$

donde

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 18, y \geq 0, z \geq 1\}$.

Ejercicio 2. Calcular $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo

$\vec{f}(x, y, z) = (2xy^3z^2 + \varphi(x), 3x^2y^2z^2 + x, 2x^2y^3z)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

y C el borde de la superficie

$\Sigma : x + y + z = 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Ejercicio 3. Sea Γ el arco de de la curva de ecuación

$\vec{X} = (\text{sen}(\pi t), \cos(\pi t), t), t \in \mathbb{R}$

contenido en la región $D : x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4$. Calcule la longitud de Γ.

Ejercicio 4. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (h(y) - y^2, xh'(y) - \cos(y))$, siendo $h \in C^2(\mathbb{R})$, a lo largo del borde de la región

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3 - x^2\}$

recorrido en sentido horario.

Ejercicio 5. Sea Γ la porción de la línea del campo vectorial $\vec{g}(x, y) = (-y, 9x)$ que pasa por $(1, 0)$ y está contenida en el semiplano $3x - y \geq 0$.

Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (x + xy^2, 2 + x^2y)$ a lo largo de Γ. Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

9/11/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea

$f(x, y) = \dfrac{\ln(y + 2x)}{\sqrt{(9 - 9x^2 - y^2)}}$.

Exprese el dominio natural de f mediante ecuaciones y/o inecuaciones, grafíquelo e indique si es abierto o cerrado. Represente en otro gráfico su frontera.

Ejercicio 2. Sea

$f(x, y) = y^3 - 6\mathbf{a}^2xy + 3\mathbf{a}x^2y$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Halle el o los valores de **a** para que f tenga un punto crítico en (1, 1) y clasifíquelo para cada valor hallado.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2z \operatorname{sen}(x + y) + yz^2 - 4 = 0$

define implícitamente en un entorno del punto (–1, 1, 2) a $z = f(x, y)$ con f de clase C^1. Halle la dirección en la cual la derivada direccional de f en A = (–1, 1) alcanza su máximo valor e indique cuánto vale este máximo.

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial $\vec{X} = \vec{h}(r, s)$, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, donde $\vec{h} = \vec{F} \circ \vec{g}$ con $\vec{g}(r, s) = (r + s, r - s, s^2)$ y $\vec{F}(u, v, w) = (v, u + v, u^2 + v^2 + w)$.

Halle una ecuación del plano tangente a Σ en $P = \vec{h}(0, 1)$.

Ejercicio 5. Halle el o los puntos de la curva C definida por las ecuaciones

$\{ x^2 + y^2 = 1 \; ; \; x + y + z = 1 \}$,

para los cuales la recta tangente a C en ellos es paralela al plano yz.

21/10/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Dada $f(x, y) = \dfrac{9 - x^2 - y^2}{y - x^2}$

a) Determine y grafique su dominio natural. Indique si es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.
b) Halle el conjunto de nivel 0 de f y represéntelo en otro gráfico.

Ejercicio 2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, una función de clase C^1 tal que $\vec{g}(2, -3) = (2, 1)$ con matriz jacobiana $D\vec{g}(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $f(x, y) = x \ln(y) + \dfrac{1}{3}x^2(1 - y)$.
Si $h = f \circ \vec{g}$, halle una ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(2, -3, h(2, -3))$.

Ejercicio 3. Sea $f(x, y, z) = xy^2 + yz$ y sea C la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y $x^2 + z^2 = y$. Halle la derivada direccional de f en $P = (1, 2, -1)$ en la dirección tangente a C en P de coordenada x negativa.

Ejercicio 4. Sea L la recta que en el punto (0, 2, 2) es normal a la superficie Σ parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v) = (u \cos(v), u, u \operatorname{sen}(v))$, $1 \le u \le 3$, $0 \le v \le \pi$.
Analice si L tiene algún punto en común con la curva de ecuación $\vec{X} = (3 - t, t^2 + 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Determine todos los valores no nulos de a y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x, y) = axy^2 + bx^4 - x$ presenta en (1/2, 0) un extremo local. ¿Qué tipo de extremo es?

19/10/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (1 + \ln(xy), \sqrt{(3 - x^2 + 2x - 4y^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(x - 2)^2 + 2y] + \mathbf{b}[(y + 1)^2 - 2x^3] + 8x - 4y$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (1, 0) y clasifíquelo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zy - \cos(z)x + yx^2 = 0$
define implícitamente una función $x = f(y, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(y_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(y_0, z_0) = x_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(x + y, x^3y^2)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que $f(0, 1) = 1$ y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y - 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 - 2y - x + 1 = 0 \; ; \; y - z = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

19/10/24, tema 2

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de
$\vec{f}(x, y) = (2 - \ln(xy), \sqrt{(3 - y^2 + 2y - 4x^2)})$.
1. Grafique D, su frontera y su interior.
2. Determine si D es abierto, cerrado, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea
$f(x, y) = \mathbf{a}[(y - 2)^2 + 2x] + \mathbf{b}[(x + 1)^2 - 2y^3] + 8y - 4x$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
Halle los valores de **a** y **b** para que f tenga un punto crítico en (0, 1) y clasifíquelo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$3zx - \cos(z)y + xy^2 = 0$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, z_0) = (1, 0)$ tal que $f(x_0, z_0) = y_0 > 0$. Calcule aproximadamente $f(0.95, 0.02)$ mediante una aproximación lineal.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(x - y, x^2y^3)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se sabe que $f(0, 1) = 1$ y que $f'((0, 1), \check{v}) = \sqrt{2}$ y $f'((0, 1), \check{u}) = 2\sqrt{2}$ cuando $\check{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $\check{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, 1, g(1, 1))$.

Ejercicio 5. Sean Σ la superficie de ecuación $x + (y + 1)^2 + z^2 = 3$ y Γ la curva definida por las ecuaciones $\{ y^2 + 2y - x + 1 = 0 \; ; \; z - y = 1 \}$.
1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre la recta tangente a Γ en P.

13/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ y $0 \leq z \leq x$.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (3\cos(t), 3\,\text{sen}(t), 3 - 3\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (g(x) + yz, xz + 2x, xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
$\Sigma : z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 1$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (x - y\varphi(2xy), 3x - x\varphi(2xy) + y^2)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4y^2 + 8y + x^2 = 0$ contenido en el semiplano $x \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(x)\vec{g}(x, y)$. con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (2 + 3x\cos(y), -x^2\text{sen}(y))$.
Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(1, \pi/2) = (2, -1)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

13/8/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule el volumen del cuerpo definido por
$H : x^2 + y^2 - 6y \leq 0$ y $0 \leq z \leq x$.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 2 - 2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hallar la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz - 2y, xz + g(y), xy)$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$, a lo largo de Γ recorrida según la parametrización dada.

Ejercicio 3. Calcule el área de la superficie Σ, siendo
$\Sigma : z = 9 - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 5$.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y) = (3y - y\varphi(2xy) + x^2, y - x\varphi(2xy))$ con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de la curva de ecuación $4x^2 + 8x + y^2 = 0$ contenido en el semiplano $y \geq 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido elegido para el cálculo.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y) = h(y)\vec{g}(x, y)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$ y $\vec{g}(x, y) = (-y^2\text{sen}(x), 2 + 3y\cos(x))$.
Sabiendo que $\vec{f}$ es campo de gradientes y que $\vec{f}(\pi/2, 1) = (-1, 2)$, encuentre h y todas las funciones potenciales de $\vec{f}$.

6/8/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ z \geq 1\}$,
suponiendo que la densidad de masa en cada punto $P \in H$ es proporcional a la distancia de P al plano xy.

Ejercicio 2. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z)$ a lo largo de la curva $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, siendo $\Sigma_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $\Sigma_2 : z + x^2 = 1$.
Indique en un gráfico la orientación de Γ elegida para el cálculo.

Ejercicio 3. Sea D la región del plano contenida en el primer cuadrante limitada por la línea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (2, 0) y los ejes coordenados. Calcule
$\iint_D y \, dxdy$.

Ejercicio 4. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (x + \varphi(x - y), 2y + \varphi(x - y), 2z - 1)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 0,\ z \geq 0$,
orientada de modo que en el punto (0, 2, 2) el versor normal sea $\check{n} = (0, 0, 1)$.
Dato: el volumen de una bola de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 5. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, donde A = (0, 0), B = (1, 2) y C = (2, 0). Calcule
$\int_\Gamma (x - y^2)\, dx + e^{y^2}\, dy$
con Γ recorrida en el sentido $A \to B \to C$.

30/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies
$\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
Calcule $\iiint_H z \, dxdydz$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} - y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + x^2 - x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 4, \; y \geq 0, \; 0 \leq z \leq 4 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, 1)$ a través de Σ.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (\varphi(x), 2y\varphi(x), 4xz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

30/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea H la región contenida en el semiespacio $z \geq 0$ limitada por las superficies
$\Sigma_1 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 18$.
Calcule $\iiint_H z \, dxdydz$.

Ejercicio 2. Sea T el triángulo de vértices (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3). Calcule la circulación del campo $\vec{f} = \vec{g} + \vec{h}$ a lo largo del borde de T, sabiendo que $\vec{g}(x, y, z) = (xz, yx, yz)$ y que $\vec{h}$ es un campo de gradientes de clase C^1. Indique en un gráfico la orientación elegida para hacer el cálculo.

Ejercicio 3. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (xe^{x^2} + y, e^{y^2})$ a lo largo de la porción de la curva de ecuación $y + 2x^2 - 2x = 0$ contenida en el primer cuadrante, recorrida de modo que la coordenada x sea creciente.

Ejercicio 4. Considere la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 = 9, \; y \geq 0, \; 0 \leq z \leq 9 - x^2$,
orientada de modo tal que las normales tengan segunda componente no negativa.
Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (0, 1, -1)$ a través de Σ.

Ejercicio 5. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (2x\varphi(y), \varphi(y), 4yz)$ con φ de clase C^1. Halle una función φ para la cual se cumpla lo siguiente:
1. El flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es nulo para todo $r > 0$.
2. $\vec{f}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

10/7/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcular el volumen de la región
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 - 4y \leq z \leq 5 + 2x^2 + y^2\}$.

Ejercicio 2. Considere la familia de curvas $\mathscr{F}$: $\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Halle la curva Γ que pasa por el punto $(-1, 0)$ y es ortogonal a las curvas de la familia $\mathscr{F}$.
b) Sea D la región encerrada por Γ y Γ^*, donde Γ^* es la curva de ecuación $y = -3$.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{-x^3} - y^2, \cos(y^5) + xy)$ a lo largo de ∂D. Indique en un gráfico la orientación elegida para el cálculo.

Ejercicio 3. Sea Σ la superficie definida por
$\Sigma : y + x^2 = 4,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq x$.
Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (-1, x, y^2)$ a través de Σ, orientada de modo tal que las normales tengan primera componente no negativa.

Ejercicio 4. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - e^z, 2xy, 2z - xe^z)$. Calcule $\int_C \vec{f}.\vec{ds}$, con
$C : x^2 + y^2 = 4,\ x + z = 1,\ y \geq 0$,
orientada de modo tal que la coordenada z resulte creciente.

Ejercicio 5. Calcule el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x, y + \varphi(z), z)$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, a través de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 - z = 0,\ z \leq 9$.
Indique en un gráfico la orientación considerada para la superficie.

2/7/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Halle los puntos críticos de $f(x, y) = 6x^2y - x^3y - x^2y^2$ en la región
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
y clasifíquelos.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$f(x, y) = \sqrt{(x + y)}\ \ln(2 - x^2 - y^2)$.
a) Grafique D e indique si es abierto, cerrado y/o conexo.
b) Grafique el conjunto de nivel 0 de f.

Ejercicio 3. Pruebe que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$, la ecuación
$e^{y+z} + xz^2 + y = 1$
define implícitamente una función $y = f(x, z)$ de clase C^1. Encuentre los versores $\check{v}$ para los cuales $f'((1, 1), \check{v}) = 0$.

Ejercicio 4. Sea $f(x, y) = g(x^2 - y^2, x + y, x - y)$ con $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
Sabiendo que $p(u, v, w) = 4 - u + 2v - w$ es el polinomio de Taylor de orden 1 de g en (0, 2, 0), halle la aproximación lineal de f alrededor del punto (1, 1).

Ejercicio 5. Halle los puntos P de la superficie
$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$
para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano tangente a la superficie
$\vec{X} = (uv, u + v, u - v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$
en Q = (1, 2, 0).

2/7/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa del cuerpo que ocupa la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las superficies de ecuaciones
$\Sigma_1 : 3x^2 + 3y^2 - z = 5$ y $\Sigma_2 : x^2 + y^2 - z = -3$.
Suponga que la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ es proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al eje z.

Ejercicio 2. Sea Γ la curva que se obtiene al unir los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y $C = (2, 0)$. Sea $\vec{f}(x, y) = (\varphi(y) + y^2, x\varphi'(y) + xy)$, con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$.
Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de Γ orientada de modo tal que el punto inicial es A y el final C.

Ejercicio 3. Sea Σ la porción de la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ contenida en el primer octante. Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2yz, -2xz, 1)$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida para Σ.

Ejercicio 4. Sea Γ la porción de la curva de ecuación vectorial
$\vec{X} = (t \cos \frac{\pi t}{2}, t \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}, t + 1), t \in \mathbb{R}$
que está contenida en la bola cerrada centrada en el origen de radio 1.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz - e^y, 2z + xy)$ a lo largo Γ orientada de acuerdo a la parametrización dada.

Ejercicio 5. Sean C la línea de campo de $\vec{g}(x, y) = (-y, x + 2)$ que pasa por el punto $(0, 0)$ y D la región acotada del plano limitada por C. Calcule $\iint_D x dx dy$.

3/6/24, tema 1 (recuperatorio diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean $f(x, y) = 3xy - x^3$ y $h(x, y) = f'_x(x, y)f'_y(x, y)$. Grafique los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) > 0\}$ e indique para cada uno de ellos si es abierto, cerrado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea $z = f(u, v)$ la función definida implícitamente por la ecuación
$z^3u + zv^2 + u^2 - 1 = 0$
en un entorno del punto $(1, 1)$. Calcular mediante una aproximación lineal el valor de $h(2.01, 0.97)$, siendo $h(x, y) = f(x - y^2, x^2 - 3y)$.

Ejercicio 3. Sea r_0 la recta normal a la superficie
$\Sigma : 2z^2 + xy - y^2 = 0 \wedge y > 0$
en $A = (1, y_0, 1)$. Halle $r_0 \cap \Pi$, siendo Π el plano que en el punto $(0, -1, 2)$ es tangente a la superficie de ecuación
$\vec{X} = (u^2 + v, uv, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4. Sea $p_2(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + y^2 - 2y - 1$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ alrededor de cierto punto $A \in \mathbb{R}^2$. Halle A sabiendo que es punto crítico de f y determine si en él se produce o no un extremo relativo de f.

Ejercicio 5. Considere el campo escalar
$f(x, y) = \{ \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$; 0 si $y = 0. \}$
Determine todas las direcciones para las cuales la derivada direccional de f es nula en el origen.

1/6/24, tema 1 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ax^2 + by^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = x^2 + xy - x - y^2 - 2y + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

Ejercicio 2. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x + y), \sqrt{(4 - x^2 - 4y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(x^2 - 1)z + \ln(2x + y + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (1, 2). Calcule mediante una aproximación lineal f(1.1, 1.95).

Ejercicio 4. Sea f(x, y) una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $2x - 3y = 1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en el punto (2, 1);
b) la derivada direccional de f en (2, 1) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(2, 1)$.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$x^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en (1, 1, 1) con el plano tangente a Σ en (1, 1, 2).

1/6/24, tema 2 (recuperatorio)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea D el dominio de la función
$\vec{f}(x, y) = (\ln(x - y), \sqrt{(4 - 4x^2 - y^2)})$.
a) Grafique D, el interior de D y la frontera de D.
b) Indique si D es cerrado, abierto, acotado y/o conexo.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = g(x, y) + ay^2 + bx^3$. Se sabe que g es de clase C^2 y que
$p_2(x, y) = y^2 + xy - y - x^2 - 2x + 3$
es su polinomio de Taylor de 2do orden en (1, 1). Determine a y b para que (1, 1) sea punto crítico de f y analice si se produce o no un extremo relativo en ese punto. En caso afirmativo indique tipo y valor del extremo.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación
$(y^2 - 1)z + \ln(2y + x + z) = 0$
define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno del punto (2, 1). Calcule mediante una aproximación lineal f(1.95, 1.1).

Ejercicio 4. Sea f(x, y) una función de clase C^1 tal que:
a) la recta de ecuación $3x - 2y = -1$ es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = -2$ en el punto (1, 2);
b) la derivada direccional de f en (1, 2) en la dirección del versor $\check{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ vale $-\sqrt{2}$.
Calcule $\nabla f(1, 2)$.

Ejercicio 5. Sean Γ la curva definida por las ecuaciones
$y^2 - xy + z = 1 \wedge xy + z^2 = 2$
y Σ la superficie de ecuación vectorial
$\vec{X} = (u + v, v - u, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Halle la intersección de la recta tangente a Γ en (1, 1, 1) con el plano tangente a Σ en (1, 1, 2).

13/5/24, tema 1 (diferido)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x, y) = \{ \dfrac{x \operatorname{sen}(y)}{x^2 + 3y^2}\ (x, y) \neq (0, 0)\ ;\ 0\ (x, y) = (0, 0)\ \}$.

Pruebe que existen las derivadas parciales de f en todo punto. Decida, con fundamento, si f es continua en (0, 0).

Ejercicio 2. Sea $h(x, y) = f \circ \vec{g}(x, y)$ con $\vec{g}(x, y) = (x - y^2, -2xy)$ y f una función escalar de clase C^1. Sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 1 de h en (2, 1) es $p_1(x, y) = 4x - 2y + 1$, halle el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto (1, –4) y la dirección en la cual este valor se produce.

Ejercicio 3. Sea $C = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, con Σ_1 la superficie de ecuación $x - y^2 + z = 1$ y Σ_2 la superficie que admite la parametrización

$\vec{X} = (2u^2, u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Sea r_0 la recta tangente a C en el punto $(x_0, 1, z_0)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ en el punto (–1, –1, 1).

Ejercicio 4. Sea

$f(x, y) = 2y^2 + \dfrac{4}{y} + x^3 - 3x^2 + 2$.

Halle los puntos críticos de f y determine en cada uno de ellos si se produce un extremo relativo.

Ejercicio 5. Pruebe mediante el teorema de la función implícita que la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ define una función $w = f(u, v)$ de clase C^1 en un entorno de $(u_0, v_0, w_0) = (0, 3, 1)$.

Sea C es la curva de ecuación

$C : f(x + y, 2x - y) = 1$.

Halle la recta normal a C en el punto (1, –1).

11/5/24, tema 1

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sean Σ la superficie de ecuación $x^2y + xz - e^y + z^2 = 0$ y Γ la curva de parametrización $\vec{X} = (t^2, 0, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Encuentre los puntos donde se intersecan Σ y Γ.
2. Para cada punto P hallado en el ítem 1, encuentre el plano tangente a Σ en P.

Ejercicio 2. Sea $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 3. Pruebe que la ecuación

$2xy - \cos(x)z + yz^2 = 0$

define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 1$. Halle los versores en los cuales la derivada direccional de f en $(0, 1)$ se anula.

Ejercicio 4. Sea $g(x, y) = f(ye^x, x + 2y)$ con $f(r, s)$ un campo escalar de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que $L(r, s) = 1 + 2r - 3s$ es la aproximación lineal de f en $(1, 2)$. Halle el plano tangente y la recta normal al gráfico de g en el punto $(0, 1, g(0, 1))$.

Ejercicio 5. Dada la función

$$f(x, y) = \left\{ \frac{\operatorname{sen}(3xy)}{x^2 + 2y^2} \ (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ 0 \ (x, y) = (0, 0) \right\},$$

estudie la continuidad f en $(0, 0)$ y la existencia de $f'_x(0, 0)$ y $f'_y(0, 0)$.

5/3/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea C la curva definida por las ecuaciones
$9x^2 + y^2 - z = 0 \land z + 4y = 5$
y sea $\vec{f}(x, y, z) = (\alpha(x^2) - y, 2x, z^2 + 2x)$ con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Elija una orientación para C, indíquela claramente en un gráfico y calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva.

Ejercicio 2. Sea Γ la linea de campo de $\vec{f}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por el punto (2, 0). Calcule
$\int_\Gamma y^3\,dx + xy^2\,dy$.
Indique en un gráfico la orientación elegida.

Ejercicio 3. Sea H el sólido definido por $2x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ y $z \geq \sqrt{(x^2 + 2y^2)}$. Calcular el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (2xz, -yz, e^{xy})$ a través de la frontera de H orientada de modo tal que las normales apunten hacia el exterior de H.

Ejercicio 4. Sea Γ el arco de la curva
$\vec{X} = (\cos(\frac{\pi\, t}{4}), \operatorname{sen}(\frac{\pi\, t}{4}), t - 1), t \in \mathbb{R}$
contenido en la bola cerrada de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.
Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y) = (e^{y^2} + 2z, 2xye^{y^2} - y^2, 2x)$ a lo largo de Γ orientada según la parametrización dada.

Ejercicio 5. Sea Σ la porción de la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$ cuyos puntos satisfacen: $0 \leq y \leq x, z \leq 4$. Calcule el área de Σ.

29/2/24 (libre)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en (0, 0). Decida, con fundamento, si f es diferenciable en el origen.

Ejercicio 2. Sean C la curva plana de ecuación $2xy + \ln(x^2 + y^2 - 4) + 2x = 6$ y $f(x, y) = xy - y^2$. Halla la derivada direccional de f en (1, –1) en la dirección tangente a C en el punto (1, 2) orientada hacia y^+.

Ejercicio 3. Sea f un campo escalar de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto (3, –1) es $p(u, v) = -1 - 3v + uv + u^2 - 3v^2$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y - xy)$ en el punto (2, 1, g(2, 1)).

Ejercicio 4. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} x - yz - \cos(yz) = 0 \\ x^2 + y^3 + xz - yz^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

define una curva regular C en un entorno del punto P = (1, 0, 2), y halle la intersección de la recta tangente a C en P con el plano de ecuación $2y - x + z = 5$.

Ejercicio 5. Halle los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ y determine en qué puntos del disco se producen dichos extremos absolutos. .

27/2/24, tema 1 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y - 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2 + g(x),\ 2x^3yz^2 - x,\ 2x^3y^2z)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 3 - 4\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + y, 2x + y, xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

Ejercicio 4. Calcule
$\iiint_H z\,dx\,dy\,dz$,
donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (4y, -x)$ que pasa por (2, 0) y está contenida en el semiplano $x \geq 1$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-\pi y\,\text{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las ordenadas sean crecientes.

27/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la masa de la placa que ocupa la región del plano
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 3|x|,\ y + 2x \leq 5\}$,
suponiendo que la densidad de masa es proporcional a la distancia del punto al eje x.

Ejercicio 2. Calcule $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, siendo
$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2y^2z^2,\ 2x^3yz^2 - x,\ 2x^3y^2z + g(z))$, $g \in C^1(\mathbb{R})$,
y C la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3\cos(t),\ 3\,\mathrm{sen}(t),\ 4 - 6\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Considere la orientación dada por la parametrización.

Ejercicio 3. Sean Σ la superficie definida por
$x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$,
y $\vec{f}(x, y, z) = (x + 2y,\ x + y,\ xz^2)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de Σ. Indique en un gráfico la orientación elegida en el cálculo.

Ejercicio 4. Calcule
$\iiint_H z\,dx\,dy\,dz$,
donde $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 7z^2 \leq 16,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

Ejercicio 5. Sea C la porción de la linea del campo $\vec{g}(x, y) = (y, -4x)$ que pasa por (0, 2) y está contenida en el semiplano $y \geq 1$.
Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (\cos(\pi y), -\pi x\,\mathrm{sen}(\pi y),)$ a lo largo de C recorrida de modo tal que las abscisas sean decrecientes.

20/2/24, tema 2 (integrador)

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 bien resueltos

Ejercicio 1. Calcule la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 + 2xz, x^2z, \varphi(x, z))$, con $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, a lo largo del borde de la superficie

$\Sigma : x = 2, y + z \leq 4, y \geq 0, z \geq 0.$

Indique en un gráfico el sentido de recorrido empleado en el cálculo.

Ejercicio 2. Hallar el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xe^z, z^2)$ a través de la superficie

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 18, z \geq 3.$

Considere la orientación para la cual las normales apuntan hacia el origen.

Ejercicio 3. Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas: $x^2 + ky = 0$, $k \in \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{G}$ la familia de curvas ortogonales a las curvas de $\mathscr{F}$. Sea D la región acotada de $\mathbb{R}^2$ cuyo borde es la curva de la familia $\mathcal{G}$ que pasa por $(0, -1)$. Calcule

$\iint_D x^2 \, dxdy.$

Ejercicio 4. Sea Σ la superficie de ecuación vectorial

$\vec{X} = (u - v, u + v, 2v + u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$

Calcular el área de la porción de Σ cuyos puntos satisfacen las condiciones: $x+y \leq 2$, $0 \leq x \leq y$.

Ejercicio 5. Sabiendo que $\vec{f}(x, y) = (y\alpha(y), 2x\alpha(y))$, con $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ y que $\vec{f}(1, 1) = (3, 6)$, calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo del arco de curva

$\Gamma : y^2 + x^2 + 2x = 3, y - x \leq 1,$

orientado de modo tal que el punto incial tenga ordenada positiva.