Álgebra Lineal

Segundo parcial: exámenes reales, con resoluciones

Álgebra II (61.08 / 81.02) · CB002 · Cátedra Palacios

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; las resoluciones son nuestras. Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

7/VII/25	3
4/XII/24, tercer turno	6
4/XII/24, 17 hs	8
4/XII/24, 14 hs	10
7/VIII/24, 9 hs	12
31/VII/24, 9 hs	15
10/VII/24, 9 hs	17
27/VI/24, 14 hs	19
27/VI/24, 9 hs	21
26/VI/24	23

7/VII/25

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Utilizar la técnica de mínimos cuadrados para ajustar los siguientes datos

x	1	2	3	4	5
y	4	5	11	12	13

mediante una función de la forma $y = ax + b$.

> **Respuesta:** $y = (5/2)x + 3/2$.
>
> **1 · Ajuste por recta.** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $y = [4,5,11,12,13]^T$.
>
> $M^TM = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$ y $M^Ty = [\Sigma x_i y_i, \Sigma y_i]^T = [4+10+33+48+65, 45]^T = \mathbf{[160, 45]^T}$.
>
> De $15a + 5b = 45$: $b = 9 - 3a$.
>
> $55a + 15(9 - 3a) = 160 \Longrightarrow 10a = 25 \Longrightarrow \mathbf{a = 5/2}$, $\mathbf{b = 3/2}$.
>
> **$y = 2{,}5x + 1{,}5$**.
>
> Chequeo (el único que vale): los residuos $r = y - \hat{y}$ son $[0; -1{,}5; 2; 0{,}5; -1]$ y tienen que ser ortogonales a las dos columnas de M, o sea $\Sigma r_i = 0$ ✓ y $\Sigma x_i r_i = -3 + 6 + 2 - 5 = 0$ ✓. No esperes que la recta pase cerca de todos los datos: acá el residuo en $x = 3$ vale 2. Lo que se verifica es la ortogonalidad del residuo, no el ajuste visual.

Ejercicio 2. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $x_0 = [4,1,3]^T$, hallar $A^{50}x_0$.

> **Respuesta:** $(1/2)[6^{50}, 2^{50} + 6^{50}, -6^{50}]^T$.
>
> **2 · Potencia alta.** A tiene la primera y la tercera fila opuestas, así que rango 2.
>
> χ: los autovalores son **0, 2 y 6**, con $S_0 = \text{gen}\{[1,0,1]^T\}$, $S_2 = \text{gen}\{[0,1,0]^T\}$ y $S_6 = \text{gen}\{[-1,-1,1]^T\}$.
>
> Descomponemos $x_0 = [4,1,3]^T = c_1[1,0,1] + c_2[0,1,0] + c_3[-1,-1,1]$: $c_1 - c_3 = 4$, $c_2 - c_3 = 1$, $c_1 + c_3 = 3 \Longrightarrow$ **$c_1 = 7/2$, $c_3 = -1/2$, $c_2 = 1/2$**.
>
> $A^{50}x_0 = c_1 \cdot 0^{50}[1,0,1] + c_2 \cdot 2^{50}[0,1,0] + c_3 \cdot 6^{50}[-1,-1,1] = \mathbf{(1/2)[6^{50},\ 2^{50} + 6^{50},\ -6^{50}]^T}$.
>
> **No lo desarrolles en decimal:** 6^{50} tiene 39 dígitos. La respuesta correcta es la expresión en potencias.

Ejercicio 3. Encontrar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que cumpla: $\{ [1,1,1]^T, [1,2,1]^T \} \subset \text{Nul}(A^{-1} - 2I)$ y $\text{tr}(A) = 2$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$.

3 · Simétrica desde A^{-1}. $v \in \text{Nul}(A^{-1} - 2I) \Rightarrow A^{-1}v = 2v \Rightarrow$ **$Av = (1/2)v$**.
Los dos vectores dados son autovectores del mismo autovalor $\alpha = 1/2$, así que su autoespacio es el plano que generan.
Normal: $[1,1,1] \times [1,2,1] =$ **$[-1, 0, 1]$**, o sea el plano $\{x_1 - x_3 = 0\}$, y el tercer autoespacio es $\text{gen}\{[-1,0,1]^T\}$, con autovalor β.
$\text{tr} = 2(1/2) + \beta = 2 \Rightarrow$ **$\beta = 1$**.

$$A = (1/2)I + (1 - 1/2)\cdot[-1,0,1]^T[-1,0,1]/2 = (1/2)I + (1/4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/4} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{0} & \mathbf{3/4} \end{pmatrix}.$$

Verificación: $\text{tr} = 3/4 + 1/2 + 3/4 = 2$ ✓, $A[1,1,1]^T = [1/2,1/2,1/2]^T$ ✓, $A[1,2,1]^T = [1/2,1,1/2]^T$ ✓.

Ejercicio 4. Hallar una matriz A que cumpla simultáneamente: $\text{Nul}(A) = \text{gen}\{[1,1,0]^T\}$; $[0,1,1]^T \in \text{Nul}(A^T)$; $\text{tr}(A^TA) = 29$; $\text{máx}_{\|x\|=1}\|Ax\| = 5$.

Respuesta: $A = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} & -5/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (no es única).

4 · El molde inverso de la DVS. Traducción dato por dato:
$\text{Nul}(A) = \text{gen}\{[1,1,0]^T\}$ de dimensión 1 $\Rightarrow$ A es 3×3 y **rango(A) = 2**, o sea $r = 2$.
$\text{máx}_{\|x\|=1}\|Ax\| =$ **$\sigma_1 = 5$** (es Rayleigh aplicado a A^TA) $\Rightarrow \sigma_1^2 = 25$.
$\text{tr}(A^TA) =$ **$\Sigma\sigma_i^2$** $= 29 \Rightarrow \sigma_2^2 = 4 \Rightarrow$ **$\sigma_2 = 2$**.
$\text{fil}(A) = \text{nul}(A)^\perp = \{x_1 + x_2 = 0\} = \text{gen}\{[1,-1,0]^T, [0,0,1]^T\} \Rightarrow$ ahí viven v_1 y v_2.
$\dim \text{nul}(A^T) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{nul}(A^T) = \text{gen}\{[0,1,1]^T\}$ y **$\text{col}(A) = \text{gen}\{[1,0,0]^T, [0,1,-1]^T\}$** $\Rightarrow$ ahí viven u_1 y u_2.
Ensamblado: eligiendo $v_1 = [1,-1,0]^T/\sqrt{2}$, $v_2 = [0,0,1]^T$, $u_1 = [1,0,0]^T$, $u_2 = [0,1,-1]^T/\sqrt{2}$:

$$A = 5u_1v_1^T + 2u_2v_2^T = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} & -5/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

→ **Verificación completa:** $A[1,1,0]^T = 0$ ✓ · $A^T[0,1,1]^T = 0$ ✓ · $\text{tr}(A^TA) = 25/2 + 25/2 + 2 + 2 = 29$ ✓ · $\sigma_1 = 5$ ✓.
No es única: cualquier otra elección de b.o.n. de fil(A) y col(A) sirve. Decilo.

Ejercicio 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar su pseudoinversa de Moore Penrose.

Respuesta: $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/8 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & -1/8 & 1/6 \end{pmatrix}$.

5 · Seudoinversa de rango 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene la fila 1 igual a la fila 3 $\Rightarrow$ **rango 2**.
A^TA tiene autovalores **32, 6 y 0** $\Rightarrow \sigma_1 =$ **$4\sqrt{2}$**, $\sigma_2 =$ **$\sqrt{6}$**.
$v_1 = [1,0,-1]^T/\sqrt{2}$ ($\lambda = 32$), $v_2 = [1,1,1]^T/\sqrt{3}$ ($\lambda = 6$), $v_3 = [1,-2,1]^T/\sqrt{6}$ ($\text{nul}(A)$).

$u_1 = Av_1/\sigma_1 = [0,8,0]^T/(\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}) = [0,1,0]^T$; $u_2 = Av_2/\sigma_2 = [3,0,3]^T/(\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}) = [1,0,1]^T/\sqrt{2}$.

$$A^\dagger = (1/(4\sqrt{2}))v_1u_1^T + (1/\sqrt{6})v_2u_2^T = (1/8)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (1/6)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/6} & \mathbf{1/8} & \mathbf{1/6} \\ \mathbf{1/6} & \mathbf{0} & \mathbf{1/6} \\ \mathbf{1/6} & \mathbf{-1/8} & \mathbf{1/6} \end{pmatrix}.$$

Controles: $A^\dagger$ tiene rango 2 ✓, y sus columnas 1 y 3 son iguales, lo que refleja que $\text{fil}(A^\dagger) = \text{col}(A)$ ✓.

4/XII/24, tercer turno

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a \neq 1$.
>
> **1 · Diagonalización con parámetro.** La matriz es triangular por bloques $\Rightarrow \chi(x) = \mathbf{-(x-1)(x+1)(x-a)}$: autovalores **1, –1 y a**.
>
> **a = 1:** $\lambda = 1$ doble; $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, rango $2 \Rightarrow \mu(1) = 1 < 2$. **No diagonaliza.**
>
> **a = –1:** $\lambda = -1$ doble; $A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rango $1 \Rightarrow \mu(-1) = 2$ ✓. **Diagonaliza.**
>
> Cualquier otro a: tres autovalores distintos $\Rightarrow$ diagonaliza.
>
> **Respuesta: $a \neq 1$.**

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A, traza$(A) = 12$ y $\det(A) = 54$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
>
> **2 · Simétrica, la versión con la cúbica.** $n = [1,-1,1]^T$. Llamemos α al autovalor del plano (doble) y β al de $\text{gen}\{n\}$.
>
> $2\alpha + \beta = 12$ y $\alpha^2\beta = 54 \Rightarrow \alpha^2(12 - 2\alpha) = 54 \Rightarrow 2\alpha^3 - 12\alpha^2 + 54 = 0 \Rightarrow \mathbf{\alpha^3 - 6\alpha^2 + 27 = 0}$.
>
> Probando $\alpha = 3$: $27 - 54 + 27 = 0$ ✓. Factorizando, $\mathbf{(\alpha - 3)(\alpha^2 - 3\alpha - 9) = 0}$.
>
> La raíz limpia es $\alpha = 3$, $\beta = 6$, que da $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}$, la misma de los otros dos turnos.
>
> Las otras dos raíces, $\alpha = (3 \pm 3\sqrt{5})/2$, **también son soluciones reales válidas**. Entregá la limpia y mencionalo.

Ejercicio 3. Hallar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $10A^2 + 20A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 27 \end{pmatrix}$.

> **Respuesta:** $A = (1/10)\begin{pmatrix} -17 & -9 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ (no es única).

3 · Ecuación matricial. $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 27 \end{pmatrix}$ tiene traza 30 y det $81 - 81 = 0 \Longrightarrow$ **$\sigma(B) = \{0, 30\}$**, con $w_1 = [3,1]^T$ (para 0) y $w_2 = [1,-3]^T$ (para 30).
$p(\lambda) = 10\lambda^2 + 20\lambda$: $p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0, -2\}$; $p(\lambda) = 30 \Longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{1, -3\}$.
"Inversible" prohíbe el 0, así que sobre $[3,1]^T$ va $\lambda = -2$, y sobre $[1,-3]^T$ va 1 o -3: **dos soluciones**.
Con $\lambda = 1$: $A = -2[3,1]^T[3,1]/10 + [1,-3]^T[1,-3]/10 = \mathbf{(1/10)}\begin{pmatrix} \mathbf{-17} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$, con det $= -2 \neq 0$ ✓. Con $\lambda = -3$: $A = (1/10)\begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 3 & -29 \end{pmatrix}$, det $= 6$ ✓. **Aclarar que no es única.**

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 8 & 8 & 14 \\ 8 & 8 & 14 \end{pmatrix}$. Hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = [1,0,0]^T$.

Respuesta: $A^\dagger = (1/729)\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \\ 7 & 14 & 14 \end{pmatrix}$ y $x^* = (1/729)[4,4,7]^T$.

4 · Seudoinversa de rango 1. Las tres filas son múltiplos de $[4,4,7]$: $A = [1,2,2]^T[4,4,7]$, **rango 1**.
$\|[1,2,2]\| = 3$, $\|[4,4,7]\| = 9 \Longrightarrow$ **$\sigma_1 = 27$**, $u_1 = [1,2,2]^T/3$, $v_1 = [4,4,7]^T/9$.
$A^\dagger = (1/27)v_1u_1^T = (1/(27\cdot27))[4,4,7]^T[1,2,2] = \mathbf{(1/729)}\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{8} \\ \mathbf{7} & \mathbf{14} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$.
$x^* = A^\dagger[1,0,0]^T = \mathbf{(1/729)[4,4,7]^T}$.
Control: x^* es múltiplo de $[4,4,7]^T$, o sea está en fil(A) ✓.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde $A = [1,1]^T[6,6,6] + [-1,1]^T[0,1,-1]$. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la esfera $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$.

Respuesta: Elipse **llena** de semiejes $6\sqrt{6}$ y 2.

5 · Imagen de la esfera, con rango deficiente. Chequeo: $[1,1]\cdot[-1,1] = 0$ ✓ y $[6,6,6]\cdot[0,1,-1] = 0 + 6 - 6 = 0$ ✓ $\Longrightarrow$ **es una DVS ya hecha**.
Normas: $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6\sqrt{3}, \sqrt{2} \Longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}\cdot6\sqrt{3} =$ **$6\sqrt{6} \approx 14{,}70$** con $u_1 = [1,1]^T/\sqrt{2}$; $\sigma_2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} =$ **2** con $u_2 = [-1,1]^T/\sqrt{2}$. Ya ordenados.
r = 2 < n = 3: nul(A) es una recta, la esfera se aplasta y la imagen es la **elipse llena** (con su interior).
Respuesta: la región elíptica centrada en el origen, con semieje mayor **$6\sqrt{6}$** en la dirección de la bisectriz $[1,1]^T/\sqrt{2}$ y semieje menor **2** en la dirección $[-1,1]^T/\sqrt{2}$, **incluido el interior**.
Verificación: $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $\operatorname{tr}(AA^T) = 110 + 110 = 220 = 216 + 4 = (6\sqrt{6})^2 + 2^2$ ✓.

4/XII/24, 17 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a \neq -1$.
>
> **1 · Diagonalización con parámetro, con dos casos.** Desarrollando por la primera fila: $\chi(x) = (1-x)[(1-x)(a-x) - a] = (1-x)(x^2 - x - ax) = \mathbf{-x(x-1)(x-1-a)}$.
> Autovalores: **0, 1 y 1+a**. Hay colisión si $1+a = 1$ ($a = 0$) o $1+a = 0$ ($a = -1$).
> **a = 0:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 1$ doble. $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, rango $1 \Longrightarrow \mu(1) = 2$ ✓ **diagonaliza**.
> **a = −1:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 0$ doble. A tiene rango 2 (la fila 3 es la suma de las filas 1 y 2) $\Longrightarrow$ $\mu(0) = 1 < 2 \Longrightarrow$ **no diagonaliza**.
> **Respuesta: $a \neq -1$.** Contestar "$a \neq 0$ y $a \neq -1$" es el error de no chequear el caso $a = 0$.

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\text{rango}(A - 3I) = 1$, $\det(A) = 54$ y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
>
> **2 · Simétrica, la versión directa.** $n = [1,-1,1]^T$, $\|n\|^2 = 3$.
> $\text{rango}(A - 3I) = 1 \Longrightarrow \mu(3) = 2 \Longrightarrow$ **$\alpha = 3$ en el plano**.
> $\det = \alpha^2\beta = 9\beta = 54 \Longrightarrow$ **$\beta = 6$**.
> $A = 3I + (6-3)nn^T/3 = 3I + nn^T = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, **la misma matriz del turno de las 14**.
> traza 12, det 54 ✓.

Ejercicio 3. Una partícula se encuentra, en el instante $t = 0$, en la posición $x_0 = [0,3,6]^T$. Cada segundo, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica tal que $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\{[-1,2,2]^T\}$ y $A[2,-1,2]^T = [-2,1,-2]^T$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 25 segundos.

> **Respuesta:** $[-4,5,2]^T$.
>
> **3 · Potencias, con la sorpresa del coeficiente nulo.** $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\{[-1,2,2]^T\} \Longrightarrow \lambda = 1$ sobre ese vector.

$A[2,-1,2]^T = -[2,-1,2]^T \Rightarrow \lambda = -1$ sobre $[2,-1,2]^T$.
El tercer autovalor **no está dado**, pero el tercer autovector sí se conoce: [–1,2,2], [2,–1,2] y [2,2,–1] son **ortogonales dos a dos, de norma 3**.
Descomponemos $x_0 = [0,3,6]^T$ en esa base ortogonal: $c_1 = (0+6+12)/9 = \mathbf{2}$, $c_2 = (0-3+12)/9 = \mathbf{1}$, $c_3 = (0+6-6)/9 = \mathbf{0}$.
Como $c_3 = 0$, el autovalor desconocido no interviene: $A^{25}x_0 = 2\cdot 1^{25}[-1,2,2]^T + 1\cdot(-1)^{25}[2,-1,2]^T = [-2,4,4]^T + [-2,1,-2]^T = \mathbf{[-4,5,2]^T}$.
Si te frenaste porque "falta un dato", el dato no falta: sobra. Descomponé primero.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de rango 2 tal que $[6,3,2]^T \in \text{nul}(A)$ y $A\cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = [0,1,0]^T$.

Respuesta: $x = (1/27)[-11,12,15]^T + t[6,3,2]^T$.

4 · Cuadrados mínimos con A reconstruida. Los vectores [6,3,2], [2,–6,3] y [–3,2,6] son ortogonales dos a dos y de norma 7.
Datos: $A[6,3,2]^T = 0$, $A[2,-6,3]^T = [6,-3,6]^T$, $A[-3,2,6]^T = [4,4,-2]^T$.
Las dos imágenes son **ortogonales entre sí** (24 – 12 – 12 = 0 ✓), con normas 9 y 6.
Entonces la DVS reducida es: $\sigma_1 = 9/7$ con $v_1 = [2,-6,3]^T/7$ y $u_1 = [2,-1,2]^T/3$; $\sigma_2 = 6/7$ con $v_2 = [-3,2,6]^T/7$ y $u_2 = [2,2,-1]^T/3$.
$x^* = A^\dagger b = (7/9)\langle u_1,b\rangle v_1 + (7/6)\langle u_2,b\rangle v_2$ con $b = [0,1,0]^T$: $\langle u_1,b\rangle = -1/3$ y $\langle u_2,b\rangle = 2/3$.
$x^* = (7/9)(-1/3)[2,-6,3]^T/7 + (7/6)(2/3)[-3,2,6]^T/7 = (-1/27)[2,-6,3]^T + (1/9)[-3,2,6]^T = \mathbf{(1/27)[-11, 12, 15]^T}$.
Todas las soluciones: $x = (1/27)[-11,12,15]^T + t[6,3,2]^T$, $t \in \mathbb{R}$, porque $\text{nul}(A) = \text{gen}\{[6,3,2]^T\}$.
Control: $x^* \perp [6,3,2]$: –66 + 36 + 30 = 0 ✓.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde
$A = 5[2,2,-1]^T[6,3,2] + 3[-1,2,2]^T[2,6,-3] + 2[2,-1,2]^T[3,2,6]$.
Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max_{\|x\|=1}\|T(x)\|$.

Respuesta: El enunciado tiene una errata: los vectores fila no son ortogonales. Ver la resolución.

5 · El ejercicio con la errata. Hacé el chequeo antes de leer nada: los vectores fila son [6,3,2], [2,6,–3] y [3,2,6], y **[6,3,2]·[2,6,–3] = 12 + 18 – 6 = 24 ≠ 0**. **No son ortogonales, así que la expresión dada NO es una descomposición en valores singulares** y no se pueden leer los σ de ahí.
Los valores singulares verdaderos de esa matriz son irracionales: ≈ 114,46 · 57,09 · 19,96.
Es exactamente la errata del 4.18(b) de la Guía 4.
Qué escribir: "los vectores [6,3,2] y [2,6,–3] no son ortogonales ($\langle\cdot,\cdot\rangle = 24$), por lo tanto la expresión no es una DVS", y después resolver el caso corregido (con [–2,6,–3] y [–3,2,6], que sí son ortogonales, como en el turno de las 14).
Con la corrección: $\sigma_1 = 5\cdot 3\cdot 7 = \mathbf{105}$, alcanzado en $\mathbf{x = \pm v_1 = \pm[6,3,2]^T/7}$, con imagen $\pm 105\cdot[2,2,-1]^T/3 = \pm 35[2,2,-1]^T$.
La justificación teórica: $\|Ax\|^2 = x^TA^TAx$, y por Rayleigh su máximo sobre $\|x\| = 1$ es el mayor autovalor de A^TA, o sea σ_1^2, alcanzado en el autovector correspondiente.

4/XII/24, 14 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que A sea diagonalizable y para dicho a determinar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

> **Respuesta:** $a = 0$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(3,3,1)$.
>
> **1 · El parámetro no está en χ.** La matriz es triangular por bloques: $\chi(x) = \mathbf{-(x-3)^2(x-1)}$ para todo a.
>
> $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$: rango 2 si $a \neq 0$ ($\Longrightarrow \mu(3) = 1 < 2$, no diagonaliza) y rango 1 si $a = 0$ ($\Longrightarrow \mu(3) = 2$ ✓).
>
> **$a = 0$.**
>
> $S_3 = \{x : 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0\} = \mathrm{gen}\{[1,0,1]^T, [0,1,-2]^T\}$; S_1: $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow$ $\mathrm{gen}\{[0,0,1]^T\}$.
>
> $\mathbf{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$, $\mathbf{\Lambda = \mathrm{diag}(3,3,1)}$, verificando con $AP = P\Lambda$.

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $[1,2,1]^T$ y $[1,1,0]^T$ son autovectores de A, $3 \in \sigma(A)$ y $\det(A) = 54$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
>
> **2 · Simétrica.** $\langle[1,2,1],[1,1,0]\rangle = 1+2+0 = \mathbf{3 \neq 0} \Longrightarrow$ mismo autovalor α, con autoespacio el plano que generan.
>
> Normal: $[1,2,1] \times [1,1,0] = [-1, 1, -1]$, o sea el plano $\mathbf{\{x_1 - x_2 + x_3 = 0\}}$ y el tercer autoespacio $\mathrm{gen}\{[1,-1,1]^T\}$.
>
> $\det = \alpha^2\beta = 54$ y $3 \in \sigma(A)$: con $\alpha = 3 \Longrightarrow \mathbf{\beta = 6}$. (Con $\beta = 3$ sale $\alpha = \pm3\sqrt{2}$, que también cumple; entregá la limpia y decilo.)
>
> $A = 3I + (6-3)\cdot[1,-1,1]^T[1,-1,1]/3 = 3I + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.
>
> traza $= 12 = 2\cdot3+6$ ✓, $\det = 9\cdot6 = 54$ ✓, $A[1,2,1]^T = [3,6,3]^T$ ✓.

Ejercicio 3. Hallar una matriz no inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 + 2A + 3I = (1/10)\begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & 57 \end{pmatrix}$.

> **Respuesta:** $A = (1/10)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ (no es única).
>
> **3 · Ecuación matricial con condición de rango.** $B = (1/10)\begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & 57 \end{pmatrix}$ tiene traza 9 y det $(33\cdot 57 - 81)/100 = 18 \Longrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \Longrightarrow$ **$\sigma(B) = \{3, 6\}$**, con $w_1 = [3,1]^T$ (para 3) y $w_2 = [1,-3]^T$ (para 6).
> $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$: $p(\lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda^2+2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0, -2\}$; $p(\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda^2+2\lambda-3 = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{1, -3\}$.
> **"No inversible" fuerza $0 \in \sigma(A)$**, y el único 0 está en la rama de w_1: $\lambda = 0$ sobre $[3,1]^T$.
> Sobre $[1,-3]^T$ puede ir 1 o -3: **hay dos soluciones**. Con $\lambda = 1$: $A = [1,-3]^T[1,-3]/10 =$ **$(1/10)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$**,
> que es una proyección ($A^2 = A$), así que $A^2+2A+3I = 3A+3I = B$ ✓. Con $\lambda = -3$: $A = (-3/10)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$,
> también válida. **Aclarar que no es única.**

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

> **Respuesta:** $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{6}$.
>
> **4 · DVS reducida.** $A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ con autovalores **8, 6, 0** $\Longrightarrow$ $\sigma_1 =$ **$2\sqrt{2}$**, $\sigma_2 =$ **$\sqrt{6}$**, $r = 2$.
> $v_1 = [-1,0,1]^T/\sqrt{2}$ ($\lambda = 8$), $v_2 = [1,1,1]^T/\sqrt{3}$ ($\lambda = 6$), $v_3 = [1,-2,1]^T/\sqrt{6}$ ($\lambda = 0$, o sea nul(A)).
> $u_1 = Av_1/\sigma_1 = [0,-4,0]^T/(\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}) =$ **$[0,-1,0]^T$**; $u_2 = Av_2/\sigma_2 = [3,0,3]^T/(\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}) =$ **$[1,0,1]^T/\sqrt{2}$**.
> **Reducida:** $A = U_r D V_r^T$ con $U_r = [\ [0,-1,0]^T \mid [1,0,1]^T/\sqrt{2}\ ]$, $D = \mathrm{diag}(2\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $V_r = [\ [-1,0,1]^T/\sqrt{2} \mid [1,1,1]^T/\sqrt{3}\ ]$.
> "Reducida" significa que **no** hay que completar bases: no aparecen v_3 ni u_3.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde
$A = 5[-1,2,2]^T[-2,6,-3] + 3[2,-1,2]^T[6,3,2] + 2[2,2,-1]^T[-3,2,6]$.
Caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la esfera $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$.

> **Respuesta:** Elipsoide de semiejes 105, 63 y 42.
>
> **5 · Imagen de la esfera. Primero el chequeo:** los vectores columna $[-1,2,2]$, $[2,-1,2]$, $[2,2,-1]$ son ortogonales dos a dos y de norma 3 ✓; los vectores fila $[-2,6,-3]$, $[6,3,2]$, $[-3,2,6]$ también son ortogonales dos a dos y de norma 7 ✓. **Es una DVS legítima.**
> $\sigma_i = c_i\cdot 3\cdot 7$: **$\sigma_1 = 105$, $\sigma_2 = 63$, $\sigma_3 = 42$**, ya ordenados.
> $r = 3 = n \Longrightarrow$ la imagen es la **cáscara de un elipsoide** (no el cuerpo macizo): semiejes **105** sobre $[-1,2,2]^T/3$, **63** sobre $[2,-1,2]^T/3$ y **42** sobre $[2,2,-1]^T/3$.
> Este enunciado es la versión **corregida** del 4.18(b) de la Guía 4, donde los vectores fila impresos no son ortogonales. Acá los signos están bien y todo cierra en enteros.

7/VIII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar, si existen, una matriz no singular $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

> **Respuesta:** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(4,4,8)$.
>
> **1 · Diagonalizar sin parámetro.** Desarrollando por la primera columna: $\chi(x) = (4-x)[(6-x)^2 - 4] = (4-x)(4-x)(8-x) = \mathbf{-(x-4)^2(x-8)}$.
>
> **$\lambda = 4$:** $A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, las tres filas iguales $\Longrightarrow$ rango 1 $\Longrightarrow$ **$\mu(4) = 2 = m(4)$**, con $S_4 = \{x : x_2 + x_3 = 0\} = \mathrm{gen}\{[1,0,0]^T, [0,-1,1]^T\}$.
>
> **$\lambda = 8$:** $A - 8I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_2 = x_3$ y $x_1 = x_2 \Longrightarrow S_8 = \mathrm{gen}\{[1,1,1]^T\}$.
>
> **Diagonaliza**: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Lambda = \mathrm{diag}(4,4,8)$.
>
> Verificación por $AP = P\Lambda$, columna a columna. A no es simétrica y sin embargo diagonaliza: el espectral es condición suficiente, no necesaria.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ una matriz diagonalizable tal que $\sigma(A^2 - 6A) = \{0, -8\}$ y $\mathrm{traza}(A) = 8$. Hallar $\sigma(A^2)$.

> **Respuesta:** $\sigma(A^2) = \{4, 36\}$.
>
> **2 · Espectro de un polinomio.** Mismo enunciado que el 27/VI/24 14hs pero con traza 8.
> $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda$: $p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0,6\}$; $p(\lambda) = -8 \Longrightarrow \lambda \in \{2,4\}$.
> Sumas posibles: 0+2 = 2, 0+4 = 4, 6+2 = **8** ✓, 6+4 = 10 $\Longrightarrow$ **$\sigma(A) = \{2, 6\}$**.
> **$\sigma(A^2) = \{4, 36\}$**.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\mathrm{traza}(A) = 3$, $\mathrm{rango}(A) = 2$, $A[0,0,1]^T = [0,0,2]^T$ y $A[1,1,0]^T \in \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \}$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (no es única).

3 · Simétrica. Mismo enunciado que el 27/VI/24 14hs pero con traza 3 (es el 4.10(d) de la Guía).
$\lambda = 2$ sobre e_3; rango 2 $\Longrightarrow 0 \in \sigma(A)$ simple; traza: $2 + 0 + \lambda_3 = 3 \Longrightarrow \mathbf{\lambda_3 = 1}$.
Los otros dos autoespacios viven en el plano invariante $\{x_3 = 0\}$, y $\{x_1 = x_2\} \cap \{x_3 = 0\} = \text{gen}\{[1,1,0]^T\} \Longrightarrow$ **$[1,1,0]^T$ es autovector**, de 0 o de 1; el tercero es $[1,-1,0]^T$.

Las dos opciones sirven: con $\lambda([1,1,0]) = 1$ sale $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A[1,1,0]^T = [1,1,0]^T \in \{x_1 = x_2\}$ ✓;

con $\lambda([1,1,0]) = 0$ sale $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A[1,1,0]^T = 0$ ✓.

Traza 3 y rango 2 en las dos. **Aclará que no es única.**

Ejercicio 4. Hallar una descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$, rango 2.

4 · DVS. Es la misma matriz del 27/VI/24 14hs ej 4, escrita de otra forma.

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con autovalores 2 (doble) y 0 $\Longrightarrow$ **$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$**, r = 2.

$S_2(A^TA) = \text{gen}\{[0,1,0]^T, [1,0,1]^T\}$, que ya es ortogonal: $v_1 = [0,1,0]^T$, $v_2 = [1,0,1]^T/\sqrt{2}$, $v_3 = [1,0,-1]^T/\sqrt{2}$.
$u_1 = Av_1/\sqrt{2} = [1,0,1]^T/\sqrt{2}$; $u_2 = Av_2/\sqrt{2} = [0,2,0]^T/2 = [0,1,0]^T$; $u_3 = [1,0,-1]^T/\sqrt{2}$ (b.o.n. de $\text{nul}(A^T) = \text{nul}(A)$).
$U = [\ [1,0,1]^T/\sqrt{2} \mid [0,1,0]^T \mid [1,0,-1]^T/\sqrt{2}\ ]$, $\Sigma = \text{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $V = [\ [0,1,0]^T \mid [1,0,1]^T/\sqrt{2} \mid [1,0,-1]^T/\sqrt{2}\ ]$.
Verificación: $2 + 2 + 0 = 4 = \text{tr}(A^TA)$ ✓.

Ejercicio 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz de rango 1 tal que $[2,1,2]^T \in \text{fil}(A)$ y $A[2,1,2]^T = [4,4,-2]^T$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y utilizarla para determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = [1,1,1]^T$.

Respuesta: $A^\dagger = (1/18)\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $x^* = [1/3, 1/6, 1/3]^T$.

5 · Seudoinversa de rango 1. Rango 1 y $[2,1,2]^T \in \text{fil}(A) \Longrightarrow$ **$\text{fil}(A) = \text{gen}\{[2,1,2]^T\}$** y $A = w \cdot [2,1,2]$ para algún w.

$A[2,1,2]^T = w\cdot(4+1+4) = 9w = [4,4,-2]^T \Longrightarrow$ **$w = [4,4,-2]^T/9$**, y $A = (1/9)\begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

$u_1 = w/\|w\| = [4,4,-2]^T/6 = [2,2,-1]^T/3$, $v_1 = [2,1,2]^T/3$, y $\sigma_1 = \|w\|\cdot\|[2,1,2]\| = (6/9)\cdot3 = \mathbf{2}$.

$A^{\dagger} = (1/2)v_1u_1^{T} = (1/18)[2,1,2]^{T}[2,2,-1] = \mathbf{(1/18)}\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

$x^* = A^{\dagger}[1,1,1]^{T} = (1/18)[6,3,6]^{T} = \mathbf{[1/3,\ 1/6,\ 1/3]^{T}}$.

Control: $x^* = (1/6)[2,1,2]^{T} \in \text{fil}(A)$ ✓.

31/VII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a \neq \sqrt{6}$ y $a \neq -\sqrt{6}$.
>
> **1 · Diagonalización con parámetro.** $\chi(x) = \mathbf{-(x-5)^2(x - a^2 + 1)}$: autovalores 5 (doble) y a^2-1.
>
> $A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & a^2-6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$: filas múltiplos de $[0,1,0] \Longrightarrow$ **rango 1 y $\mu(5) = 2$ siempre**.
>
> Falla sólo si $a^2-1 = 5 \Longrightarrow a^2 = 6$.
>
> **Diagonaliza $\Leftrightarrow$ $a \neq \pm\sqrt{6}$.**

Ejercicio 2. Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\text{traza}(A) = 2$ y $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

> **Respuesta:** Sí existe: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> **2 · Ecuación matricial. El "si existe" no significa que no exista.** $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ tiene traza -8 y det $0 \Longrightarrow \sigma(B) = \{0, -8\}$, con $w_1 = [1,1]^T$ (para 0) y $w_2 = [1,-1]^T$ (para -8).
>
> $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda$. $p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0,6\}$; $p(\lambda) = -8 \Longrightarrow \lambda^2-6\lambda+8 = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{2,4\}$.
>
> Trazas: $0+2 = \mathbf{2}$ ✓, $0+4 = 4$, $6+2 = 8$, $6+4 = 10$.
>
> $\lambda = 0$ sobre $[1,1]^T$ y $\lambda = 2$ sobre $[1,-1]^T \Longrightarrow A = 2\cdot[1,-1]^T[1,-1]/2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, **la misma matriz del 27/VI/24 9hs**.
>
> Verificación: $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ ✓.

Ejercicio 3. Una partícula se encuentra, en el instante $t = 0$, en la posición $x_0 = [1,0,0]^T$. Cada minuto, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 45 minutos.

> **Respuesta:** $[-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0]^T$.
>
> **3 · Rotación.** El bloque 2×2 es $\begin{pmatrix} \cos 45° & -\text{sen } 45° \\ \text{sen } 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$: una **rotación de 45° en el plano x_1x_2**, con el eje x_3 fijo. Sus autovalores son complejos, así que **no** se usa la técnica de autovectores.

A^{45} es la rotación de 45·45° = 2025°, y 2025 = 5·360 + **225**.
Rotar $[1,0]^T$ en 225°: $[\cos 225°, \operatorname{sen} 225°]^T = [-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]^T$.
Respuesta: $[-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0]^T$.
Control: la rotación es una isometría, así que la norma tiene que seguir siendo 1, y 1/2 + 1/2 = 1 ✓.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$. Hallar todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = [1,1,1]^T$ y determinar la de norma mínima.

Respuesta: $x = (1/3)[4,2,2]^T + t[1,-1,-1]^T$; la de norma mínima es $(1/3)[4,2,2]^T$.

4 · Cuadrados mínimos con una proyección. $n = [1,-1,-1]^T$, $\|n\|^2 = 3 \Longrightarrow A = I - nn^T/3 =$ **(1/3)** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.
El atajo: una proyección ortogonal es simétrica e idempotente, y su seudoinversa es **ella misma** (sus autovalores son 1 doble y 0, y A^+ invierte los no nulos).
$x^* = A^+b = Ab = (1/3)[2+1+1, 1+2-1, 1-1+2]^T =$ **$(1/3)[4,2,2]^T$**.
$\text{nul}(A) = \text{gen}\{n\} \Longrightarrow$ **todas las soluciones: $x = (1/3)[4,2,2]^T + t[1,-1,-1]^T$**, y la de norma mínima es x^*.
Control: $x^* \perp \text{nul}(A)$: (4−2−2)/3 = 0 ✓.

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	−1	1	4

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Respuesta: $y = (8/7)x^2 - 17/35$.

5 · Ajuste por parábola. Mismos x que el 27/VI $\Longrightarrow$ $\mathbf{M^TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$.
$M^Ty = [16+1+0+1+16, -8-1+0+1+8, 4+1-1+1+4]^T =$ **$[34, 0, 9]^T$**.
$10b = 0 \Longrightarrow$ **$b = 0$**.
$34a + 10c = 34$ y $10a + 5c = 9 \Longrightarrow c = (9-10a)/5 \Longrightarrow 34a + 18 - 20a = 34 \Longrightarrow 14a = 16 \Longrightarrow$ **$a = 8/7$, $c = (9 - 80/7)/5 = -17/35$**.
$y = (8/7)x^2 - 17/35$ $\approx 1{,}143x^2 - 0{,}486$.

10/VII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 0 & a^2-5a & 0 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a \neq 2$ y $a \neq 3$.
>
> **1 · Diagonalización con parámetro.** $\chi(x) = \mathbf{-(x+6)^2(x - a^2 + 5a)}$: autovalores -6 (doble) y a^2-5a.
>
> $A + 6I = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & a^2-5a+6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$: filas múltiplos de $[0,1,0] \Longrightarrow$ **rango 1 y $\mu(-6) = 2$ siempre**.
>
> Falla sólo si $a^2-5a = -6$, o sea $a^2-5a+6 = (a-2)(a-3) = 0 \Longrightarrow$ ahí $m(-6) = 3 > 2 = \mu(-6)$.
>
> **Diagonaliza $\Leftrightarrow$ $a \neq 2$ y $a \neq 3$.**

Ejercicio 2. En el instante $t = 0$ una partícula se encuentra en la posición $x_0 = [0,1,2]^T$. Cada segundo, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 30 segundos.

> **Respuesta:** $[1 - 2^{30},\ 1,\ 1 + 2^{30}]^T$.
>
> **2 · Potencias.** A es simétrica; el bloque $\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ tiene autovalores 1 (sobre $[1,1]$) y 2 (sobre $[1,-1]$), más $\lambda = 1$ en e_2.
>
> **$S_1 = \text{gen}\{[1,0,1]^T, [0,1,0]^T\}$, $S_2 = \text{gen}\{[1,0,-1]^T\}$.**
>
> $x_0 = [0,1,2]^T = 1\cdot[1,0,1]^T + 1\cdot[0,1,0]^T - 1\cdot[1,0,-1]^T$ (chequeo directo ✓).
>
> $A^{30}x_0 = 1^{30}[1,0,1]^T + 1^{30}[0,1,0]^T - 2^{30}[1,0,-1]^T = \mathbf{[1 - 2^{30},\ 1,\ 1 + 2^{30}]^T}$.
>
> Con calculadora, $2^{30} = 1\,073\,741\,824$, o sea $[-1\,073\,741\,823,\ 1,\ 1\,073\,741\,825]^T$. Dejalo en potencias.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $[1,1,1]^T$ y $[1,0,1]^T$ son autovectores de A, $3 \in \sigma(A)$ y $\det(A) = -9$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> **3 · Simétrica.** $\langle [1,1,1],[1,0,1] \rangle = \mathbf{2 \neq 0} \Longrightarrow$ los dos autovectores son del **mismo** autovalor α, y su autoespacio es el plano que generan.
>
> Normal: $[1,1,1] \times [1,0,1] = \mathbf{[1,0,-1]}$, o sea el plano $\{x_1 - x_3 = 0\}$.
>
> $\det = \alpha^2\beta = -9$ con $3 \in \sigma(A)$: si $\alpha = 3 \Longrightarrow \beta = -1$ ✓; si $\beta = 3 \Longrightarrow \alpha^2 = -3$, imposible.

$A = 3I + (-1-3)\cdot[1,0,-1]^T[1,0,-1]/2 = 3I - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

traza = 5 = 3+3−1 ✓, det = −9 ✓, $A[1,1,1]^T = [3,3,3]^T$ ✓.

Ejercicio 4. Hallar una descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $\sigma_1 = 3\sqrt{41}$, rango 1.

4 · DVS de rango 1. $[8,8,4] = 4[2,2,1]$ y $[10,10,5] = 5[2,2,1] \Longrightarrow \mathbf{A = [4,5]^T[2,2,1]}$, rango 1.

$\|[4,5]\| = \sqrt{41}$, $\|[2,2,1]\| = 3 \Longrightarrow \mathbf{\sigma_1 = 3\sqrt{41}}$, $u_1 = [4,5]^T/\sqrt{41}$, $v_1 = [2,2,1]^T/3$.

Completando: $\text{nul}(A) = \{2x_1+2x_2+x_3 = 0\}$ con base ortogonal $[1,-1,0]^T$ y $[1,1,-4]^T$; $\text{nul}(A^T) = \text{gen}\{[-5,4]^T\}$.

$\mathbf{U = (1/\sqrt{41})\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$, $\mathbf{\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\mathbf{V = [\ [2,2,1]^T/3 \mid [1,-1,0]^T/\sqrt{2} \mid [1,1,-4]^T/(3\sqrt{2})\ ]}$.

Verificación: $(3\sqrt{41})^2 = 369 = 64+64+16+100+100+25 = \text{tr}(A^TA)$ ✓.

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados ajustar los siguientes datos

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	6	8

mediante una recta y = mx + b.

Respuesta: y = (9/5)x + 3/5.

5 · Ajuste por recta. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $y = [1,2,4,6,8]^T$.

$M^TM = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{10} \\ \mathbf{10} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$, $M^Ty = [\Sigma x_iy_i, \Sigma y_i]^T = [0+2+8+18+32, 21]^T = \mathbf{[60, 21]^T}$.

De 10m + 5b = 21: b = (21−10m)/5.

30m + 2(21−10m) = 60 ⟹ 10m = 18 ⟹ **m = 9/5**, **b = 3/5**.

y = 1,8x + 0,6.

Chequeo: en x = 0 da 0,6 contra 1; en x = 4 da 7,8 contra 8. El residuo $r = y - \hat{y} = [0{,}4; -0{,}4; -0{,}2; 0; 0{,}2]$ es ortogonal a las dos columnas de M: $\Sigma r_i = 0$ ✓ y $\Sigma x_i r_i = 0$ ✓.

27/VI/24, 14 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a \neq 1$ y $a \neq -1$.
>
> **1 · Diagonalización con parámetro.** Desarrollando por la primera columna: $\chi(x) = \mathbf{-(x-1)^2(x - a^2)}$, o sea autovalores 1 (doble) y a^2.
>
> $A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$: las tres filas son múltiplos de $[0,1,0] \Longrightarrow$ **rango 1 y $\mu(1) = 2$**, para cualquier a.
>
> Lo único que puede romperlo es $a^2 = 1$, donde $m(1)$ sube a 3 y $\mu(1)$ sigue en 2.
>
> **Diagonaliza $\Leftrightarrow$ $a \neq \pm1$.**

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ una matriz diagonalizable tal que $\sigma(A^2 - 6A) = \{0, -8\}$ y $\text{traza}(A) = 2$. Hallar $\sigma(A^3)$.

> **Respuesta:** $\sigma(A^3) = \{0, 8\}$.
>
> **2 · Espectro de un polinomio.** $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda$. $p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0, 6\}$; $p(\lambda) = -8 \Longrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{2, 4\}$.
>
> $\sigma(p(A))$ tiene dos elementos distintos y A es 2×2 diagonalizable $\Longrightarrow$ A tiene dos autovalores distintos, uno de cada rama.
>
> Sumas: $0+2 =$ **2** ✓, $0+4 = 4$, $6+2 = 8$, $6+4 = 10 \Longrightarrow$ **$\sigma(A) = \{0, 2\}$**.
>
> **$\sigma(A^3) = \{0, 8\}$**.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\text{traza}(A) = 1$, $\text{rango}(A) = 2$, $A[0,0,1]^T = [0,0,2]^T$ y $A[1,1,0]^T \in \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \}$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (no es única).
>
> **3 · Simétrica** (es el 4.10(d) de la Guía 4). $Ae_3 = 2e_3 \Longrightarrow \lambda = 2$ sobre $\text{gen}\{e_3\}$.
>
> $\text{rango}(A) = 2 \Longrightarrow 0 \in \sigma(A)$ simple.
>
> traza: $2 + 0 + \lambda_3 = 1 \Longrightarrow \lambda_3 =$ **-1**.
>
> Los otros dos autoespacios son $\perp$ a e_3, o sea viven en el plano invariante $\{x_3 = 0\}$.
>
> $v = [1,1,0]^T$ está ahí, así que Av también; y $\{x_1 = x_2\} \cap \{x_3 = 0\} = \text{gen}\{v\} \Longrightarrow$ **v es autovector**, de 0 o de -1. El tercero es $[1,-1,0]^T$.
>
> **Las dos opciones sirven:** con $\lambda(v) = 0$ sale $A = 2e_3e_3^T - P_{\text{gen}\{[1,-1,0]\}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (y $Av = 0$,

que está en el plano); con $\lambda(v) = -1$ sale $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (y $Av = [-1,-1,0]^T$, también en el plano).

Entregá una y **aclarás que no es única**.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = [1,0,1]^T[0,1,0] + [0,1,0]^T[1,0,1]$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A.

Respuesta: $A^\dagger = A/2 = (1/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4 · Seudoinversa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, simétrica, de rango 2.

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene autovalores 2 (doble) y 0 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}}$.

$v_1 = [0,1,0]^T$, $v_2 = [1,0,1]^T/\sqrt{2}$, $v_3 = [1,0,-1]^T/\sqrt{2}$.

$u_1 = Av_1/\sqrt{2} = [1,0,1]^T/\sqrt{2}$, $u_2 = Av_2/\sqrt{2} = [0,1,0]^T$.

$A^\dagger = (1/\sqrt{2})(v_1u_1^T + v_2u_2^T) = \mathbf{(1/2)}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{A/2}$.

Sale así porque A es simétrica con $\sigma(A) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$, y para simétricas $A^\dagger$ se obtiene invirtiendo los autovalores no nulos: $(1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2})$, que es 1/2 de los originales. **Esta misma matriz vuelve a aparecer en el 7/VIII/24 ej 4.**

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	−2	−1	0	1	2
y	5	3	2	3	5

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Respuesta: $y = (5/7)x^2 + 76/35$.

5 · Ajuste por parábola. M tiene filas $[x_i^2, x_i, 1]$. Con $x = (-2,-1,0,1,2)$: $\Sigma x_i = \Sigma x_i^3 = 0$, $\Sigma x_i^2 = 10$, $\Sigma x_i^4 = 34$

$\Longrightarrow \mathbf{M^TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$.

$M^Ty = [\Sigma x_i^2 y_i, \Sigma x_i y_i, \Sigma y_i]^T = [20+3+0+3+20, -10-3+0+3+10, 18]^T = \mathbf{[46, 0, 18]^T}$.

Fila del medio: $10b = 0 \Longrightarrow \mathbf{b = 0}$ (los datos son simétricos).

$34a + 10c = 46$ y $10a + 5c = 18 \Longrightarrow c = (18-10a)/5 \Longrightarrow 34a + 36 - 20a = 46 \Longrightarrow 14a = 10 \Longrightarrow \mathbf{a = 5/7}$, $\mathbf{c = 76/35}$.

$\mathbf{y = (5/7)x^2 + 76/35} \approx 0{,}714x^2 + 2{,}171$.

27/VI/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza(A) = 2 y $A^2 - 6A + 8I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

> **Respuesta:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> **1 · Ecuación matricial.** $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ tiene traza 8 y det 0 $\Longrightarrow \sigma(B) = \{0, 8\}$, con $w_1 = [1,-1]^T$ (para 0) y $w_2 = [1,1]^T$ (para 8).
> $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$. $p(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{2,4\}$; $p(\lambda) = 8 \Longrightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{0,6\}$.
> Trazas posibles: 2+0 = **2** ✓, 2+6 = 8, 4+0 = 4, 4+6 = 10.
> $\lambda = 2$ sobre $[1,-1]^T$, $\lambda = 0$ sobre $[1,1]^T \Longrightarrow A = 2\cdot[1,-1]^T[1,-1]/2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
> Verificación: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^2 - 6A + 8I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ✓.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = (1/2)\begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una base del subespacio $\mathbb{S} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^k x \}$.

> **Respuesta:** $\mathbb{S} = \text{gen}\{[0,1,1]^T, [1,0,-1]^T\}$.
>
> **2 · Límite de potencias.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ es triangular por bloques $\Longrightarrow \chi(x) = (-2-x)(1/2-x)(1-x)$
> $\Longrightarrow$ **$\sigma(A) = \{-2, 1/2, 1\}$**.
> El límite existe $\Leftrightarrow$ la componente en autoespacios con $|\lambda| > 1$ (y con $\lambda = -1$) es nula. Acá sólo -2 molesta.
> $S_{1/2}$: $x_2 = x_3$ y $x_1 = 0 \Longrightarrow \text{gen}\{[0,1,1]^T\}$.
> S_1: $x_2 = 0$ y $x_1 = -x_3 \Longrightarrow \text{gen}\{[1,0,-1]^T\}$.
> **$\mathbb{S} = \text{gen}\{[0,1,1]^T, [1,0,-1]^T\}$**, dim 2. $S_{-2} = \text{gen}\{[1,0,0]^T\}$ es lo que queda afuera.

Ejercicio 3. Comprobar que la matriz $U = (1/5)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ es ortogonal y caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

> **Respuesta:** Simetría respecto de $\text{gen}\{[2,1]^T\}$.
>
> **3 · Isometría.** Columnas $[3,4]^T/5$ y $[4,-3]^T/5$: normas 1 y producto interno $(12-12)/25 = 0 \Longrightarrow$ **ortogonal**.
> $\det(U) = (-9-16)/25 = \mathbf{-1} \Longrightarrow$ **simetría**.

Eje = nul(U − I): $(1/5)\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = 2x_2 \Longrightarrow$ **gen{[2,1]^T}**.

T es la simetría respecto de la recta gen{[2,1]^T}. Control: nul(U+I) = gen{[−1,2]^T} ⊥ al eje ✓.

Ejercicio 4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que posea las siguientes propiedades: $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$, rango(A − 2I) = 1, $A^3 - 4A^2$ es singular y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

Respuesta: $A = (1/9)\begin{pmatrix} 26 & -4 & 8 \\ -4 & 20 & -4 \\ 8 & -4 & 26 \end{pmatrix}$.

4 · Simétrica. n = [2,−1,2]^T, ||n|| = 3.

rango(A − 2I) = 1 ⟹ μ(2) = 2 ⟹ **el plano tiene λ = 2**.

$A^3 - 4A^2 = A^2(A - 4I)$ singular ⟹ 0 ∈ σ(A) o 4 ∈ σ(A); σ(A) ⊂ (0,+∞) mata el 0 ⟹ **β = 4** sobre gen{n}.

$A = 2I + (4-2)nn^T/9 = 2I + (2/9)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{(1/9)}\begin{pmatrix} \mathbf{26} & \mathbf{-4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{20} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-4} & \mathbf{26} \end{pmatrix}$.

Verificación: traza = 8 = 2·2+4 ✓, det = 16 = 2^2·4 ✓.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A.

Respuesta: $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/36 & 1/36 \\ 0 & -1/12 & -1/12 \end{pmatrix}$.

5 · Seudoinversa. La primera matriz tiene columnas [−2,1,1], [1,1,1], [0,−1,1]: **ortogonales**, de normas √6, √3, √2. La tercera tiene filas [1,1] y [1,−1], ortogonales de norma √2.

Multiplicando, $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 0 & -6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, de rango 2, y la factorización dada **ya es una DVS sin normalizar**: A = $(-3)(\sqrt{6}\,u_1)(\sqrt{2}\,v_1^T) + 3(\sqrt{3}\,u_2)(\sqrt{2}\,v_2^T)$ con $u_1 = [-2,1,1]^T/\sqrt{6}$, $u_2 = [1,1,1]^T/\sqrt{3}$, $v_1 = [1,1]^T/\sqrt{2}$, $v_2 = [1,-1]^T/\sqrt{2}$.

Los coeficientes son $-3\sqrt{12} = -6\sqrt{3}$ y $3\sqrt{6}$. **El signo negativo se absorbe cambiando el signo de u_1**: $\sigma_1 = \mathbf{6\sqrt{3}} \approx 10{,}39$ con $\tilde{u}_1 = [2,-1,-1]^T/\sqrt{6}$, y $\sigma_2 = \mathbf{3\sqrt{6}} \approx 7{,}35$. Ya están ordenados.

$A^\dagger = (1/\sigma_1)v_1\tilde{u}_1^T + (1/\sigma_2)v_2u_2^T = (1/36)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (1/18)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/9} & \mathbf{1/36} & \mathbf{1/36} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1/12} & \mathbf{-1/12} \end{pmatrix}$.

Control: $A^\dagger$ es 2×3, la traspuesta del tamaño de A ✓.

26/VI/24

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & a+3 \\ 5 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene un autovalor doble y es diagonalizable.

> **Respuesta:** $a = -3$.
>
> **1 · Es el ejercicio 4.2 de la Guía 4, literal.** $\chi(x) = -(x+2)(x-9)(x-a^2)$.
> Autovalor doble $\Longrightarrow a^2 = 9$ ($a^2 = -2$ no tiene solución real) $\Longrightarrow a = \pm3$, con el doble igual a 9.
> **$a = 3$:** $A - 9I = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rango 2 $\Longrightarrow \mu(9) = 1 < 2$. No diagonaliza.
> **$a = -3$:** la entrada $a+3$ se anula, $A - 9I = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rango 1 $\Longrightarrow \mu(9) = 2$. **Diagonaliza.**
> **Respuesta: $a = -3$.** $S_9 = \text{gen}\{[0,1,0]^T,[0,0,1]^T\}$, $S_{-2} = \text{gen}\{[-11,4,5]^T\}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = (1/4)\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to+\infty} A^k x = [0,6,6]^T$.

> **Respuesta:** $x = [0,6,6]^T + t[1,-1,1]^T$, $t \in \mathbb{R}$.
>
> **2 · Límite igualado a un vector.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \chi(x) = (1-x)[(3/4-x)^2 - 1/16] = (1-x)(1-x)(1/2-x) \Longrightarrow$ **$\lambda = 1$ doble, $\lambda = 1/2$.**
> $A - I = (1/4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, rango 1 $\Longrightarrow \mu(1) = 2$, **$S_1 = \text{gen}\{[1,0,0]^T, [0,1,1]^T\}$.**
> **$S_{1/2} = \text{gen}\{[1,-1,1]^T\}$.**
> Como $|1/2| < 1$, esa componente se va a cero, y **$\lim A^k x$ = la componente de x en S_1.**
> El dato $[0,6,6]^T = 6[0,1,1]^T$ **está en S_1** ✓ (si no lo estuviera, no habría solución).
> **$x = [0,6,6]^T + t[1,-1,1]^T$**, $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Comprobar que la matriz $U = (1/2)\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

> **Respuesta:** Rotación de $\pi/6$ (30°).

3 · Isometría. Columnas $[\sqrt{3},1]^T/2$ y $[-1,\sqrt{3}]^T/2$: normas $(3+1)/4 = 1$ ✓, producto $(-\sqrt{3}+\sqrt{3})/4 = 0$ ✓ $\Longrightarrow$ **ortogonal**.

$\det(U) = (3+1)/4 =$ **+1** $\Longrightarrow$ **rotación**.

Comparando con $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ y $\operatorname{sen}\theta = 1/2 \Longrightarrow$ **$\theta = \pi/6 = 30°$**, antihoraria.

$\sigma(U) = \{e^{\pm i\pi/6}\}$: no hay autovalores reales, por eso no se contesta con autovectores.

Ejercicio 4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $\sigma(A) \subset (-\infty, 0)$, $\operatorname{rango}(A + 2I) = 1$, $\det(A^3 + 3A^2) = 0$ y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

Respuesta: $A = (1/9)\begin{pmatrix} -22 & 2 & -4 \\ 2 & -19 & 2 \\ -4 & 2 & -22 \end{pmatrix}$.

4 · Simétrica (el gemelo del 27/VI con los signos invertidos). $n = [2,-1,2]^T$.

$\operatorname{rango}(A + 2I) = 1 \Longrightarrow \mu(-2) = 2 \Longrightarrow$ **$\alpha = -2$** en el plano.

$\det(A^3 + 3A^2) = \det(A^2(A + 3I)) = 0 \Longrightarrow 0 \in \sigma(A)$ o $-3 \in \sigma(A)$; $\sigma(A) \subset (-\infty,0)$ mata el $0 \Longrightarrow$ **$\beta = -3$**.

$$A = -2I + (-3+2)nn^T/9 = -2I - (1/9)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{(1/9)}\begin{pmatrix} \mathbf{-22} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-19} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{-22} \end{pmatrix}.$$

traza $= -7 = 2(-2)+(-3)$ ✓, $\det = (-2)^2(-3) = -12$ ✓.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Hallar $\sigma > 0$ tal que $\hat{x} = [\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]^T$ sea la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = [0,1]^T$.

Respuesta: $\sigma = 1/5$.

5 · DVS con parámetro. La primera matriz tiene columnas $[1,2]^T$ y $[-2,1]^T$, ortogonales de norma $\sqrt{5}$; la tercera es **ortogonal** (es V^T).

Σ tiene un solo elemento no nulo, así que A tiene **rango 1** y $A = (\sqrt{5}\,\sigma)\cdot u_1 v_1^T$ con $u_1 = [1,2]^T/\sqrt{5}$ y $v_1 = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]^T$.

El valor singular es **$\sigma_1 = \sqrt{5}\cdot\sigma$**.

$A^\dagger = (1/(\sqrt{5}\sigma))v_1u_1^T \Longrightarrow \hat{x} = A^\dagger[0,1]^T = (1/(\sqrt{5}\sigma))\cdot\langle u_1,[0,1]\rangle\cdot v_1 = (1/(\sqrt{5}\sigma))\cdot(2/\sqrt{5})\cdot v_1 =$ **$(2/(5\sigma))\cdot[1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]^T$**.

Pedimos que sea $[\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]^T$: $(2/(5\sigma))\cdot(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Longrightarrow 2/(5\sigma) = 2 \Longrightarrow$ **$\sigma = 1/5$**.

Verificación: con $\sigma = 1/5$, $\hat{x} = 2\cdot[1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}]^T = [\sqrt{2},0,\sqrt{2}]^T$ ✓, y $\hat{x} \in \operatorname{fil}(A) = \operatorname{gen}\{[1,0,1]^T\}$ ✓.