Álgebra Lineal

Segundo parcial: exámenes reales, enunciados

Álgebra II (61.08 / 81.02) · CB002 · Cátedra Palacios

Material de estudio no oficial, sin vínculo con la FIUBA, la UBA ni la cátedra. Los enunciados están transcriptos de exámenes tomados; Más guías en guiasdeingenieria.com.ar.

Índice

7/VII/25	3
4/XII/24, tercer turno	4
4/XII/24, 17 hs	5
4/XII/24, 14 hs	6
7/VIII/24, 9 hs	7
31/VII/24, 9 hs	8
10/VII/24, 9 hs	9
27/VI/24, 14 hs	10
27/VI/24, 9 hs	11
26/VI/24	12

7/VII/25

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Utilizar la técnica de mínimos cuadrados para ajustar los siguientes datos

x	1	2	3	4	5
y	4	5	11	12	13

mediante una función de la forma $y = ax + b$.

Ejercicio 2. Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $x_0 = [4,1,3]^T$, hallar $A^{50}x_0$.

Ejercicio 3. Encontrar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que cumpla: $\{ [1,1,1]^T, [1,2,1]^T \} \subset \text{Nul}(A^{-1} - 2I)$ y $\text{tr}(A) = 2$.

Ejercicio 4. Hallar una matriz A que cumpla simultáneamente: $\text{Nul}(A) = \text{gen}\{[1,1,0]^T\}$; $[0,1,1]^T \in \text{Nul}(A^T)$; $\text{tr}(A^TA) = 29$; $\text{máx}_{\|x\|=1}\|Ax\| = 5$.

Ejercicio 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, hallar su pseudoinversa de Moore Penrose.

4/XII/24, tercer turno

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A, $\operatorname{traza}(A) = 12$ y $\det(A) = 54$.

Ejercicio 3. Hallar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $10A^2 + 20A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 27 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 8 & 8 & 14 \\ 8 & 8 & 14 \end{pmatrix}$. Hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = [1,0,0]^T$.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde $A = [1,1]^T[6,6,6] + [-1,1]^T[0,1,-1]$. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la esfera $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$.

4/XII/24, 17 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\text{rango}(A - 3I) = 1$, $\det(A) = 54$ y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

Ejercicio 3. Una partícula se encuentra, en el instante $t = 0$, en la posición $x_0 = [0,3,6]^T$. Cada segundo, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica tal que $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\{[-1,2,2]^T\}$ y $A[2,-1,2]^T = [-2,1,-2]^T$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 25 segundos.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de rango 2 tal que $[6,3,2]^T \in \text{nul}(A)$ y $A \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = [0,1,0]^T$.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde
$A = 5[2,2,-1]^T[6,3,2] + 3[-1,2,2]^T[2,6,-3] + 2[2,-1,2]^T[3,2,6]$.
Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

4/XII/24, 14 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que A sea diagonalizable y para dicho a determinar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

Ejercicio 2. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $[1,2,1]^T$ y $[1,1,0]^T$ son autovectores de A, $3 \in \sigma(A)$ y $\det(A) = 54$.

Ejercicio 3. Hallar una matriz no inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $A^2 + 2A + 3I = (1/10)\begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & 57 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

Ejercicio 5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde
$A = 5[-1,2,2]^T[-2,6,-3] + 3[2,-1,2]^T[6,3,2] + 2[2,2,-1]^T[-3,2,6]$.
Caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la esfera $S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \}$.

7/VIII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar, si existen, una matriz no singular $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ una matriz diagonalizable tal que $\sigma(A^2 - 6A) = \{0, -8\}$ y $\text{traza}(A) = 8$. Hallar $\sigma(A^2)$.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\text{traza}(A) = 3$, $\text{rango}(A) = 2$, $A[0,0,1]^T = [0,0,2]^T$ y $A[1,1,0]^T \in \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \}$.

Ejercicio 4. Hallar una descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz de rango 1 tal que $[2,1,2]^T \in \text{fil}(A)$ y $A[2,1,2]^T = [4,4,-2]^T$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y utilizarla para determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = [1,1,1]^T$.

31/VII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 2. Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\text{traza}(A) = 2$ y $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Una partícula se encuentra, en el instante $t = 0$, en la posición $x_0 = [1,0,0]^T$. Cada minuto, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 45 minutos.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}$. Hallar todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = [1,1,1]^T$ y determinar la de norma mínima.

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	−1	1	4

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

10/VII/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 0 & a^2-5a & 0 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 2. En el instante t = 0 una partícula se encuentra en la posición $x_0 = [0,1,2]^T$. Cada segundo, la partícula recibe un impacto que la desplaza de la posición x a la posición Ax, donde $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$. Calcular la posición de la partícula luego de transcurridos 30 segundos.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $[1,1,1]^T$ y $[1,0,1]^T$ son autovectores de A, $3 \in \sigma(A)$ y $\det(A) = -9$.

Ejercicio 4. Hallar una descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados ajustar los siguientes datos

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	6	8

mediante una recta y = mx + b.

27/VI/24, 14 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz diagonalizable tal que $\sigma(A^2 - 6A) = \{0, -8\}$ y $\text{traza}(A) = 2$. Hallar $\sigma(A^3)$.

Ejercicio 3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\text{traza}(A) = 1$, $\text{rango}(A) = 2$, $A[0,0,1]^T = [0,0,2]^T$ y $A[1,1,0]^T \in \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \}$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = [1,0,1]^T[0,1,0] + [0,1,0]^T[1,0,1]$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A.

Ejercicio 5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	−2	−1	0	1	2
y	5	3	2	3	5

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

27/VI/24, 9 hs

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente

---

Ejercicio 1. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza(A) = 2 y $A^2 - 6A + 8I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = (1/2)\begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una base del subespacio $\mathbb{S} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^k x \}$.

Ejercicio 3. Comprobar que la matriz $U = (1/5)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ es ortogonal y caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por T(x) = Ux.

Ejercicio 4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$, rango(A − 2I) = 1, $A^3 - 4A^2$ es singular y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A.

26/VI/24

5 problemas · 3 horas · se aprueba con 3 resueltos correctamente · fecha aproximada

---

Ejercicio 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & a+3 \\ 5 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que A tiene un autovalor doble y es diagonalizable.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por $A = (1/4)\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to+\infty} A^k x = [0,6,6]^T$.

Ejercicio 3. Comprobar que la matriz $U = (1/2)\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ es ortogonal y caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

Ejercicio 4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $\sigma(A) \subset (-\infty, 0)$, $\text{rango}(A + 2I) = 1$, $\det(A^3 + 3A^2) = 0$ y el plano $\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \}$ es un autoespacio de A.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Hallar $\sigma > 0$ tal que $\hat{x} = [\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]^T$ sea la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = [0,1]^T$.